الباب السادس

مقدمة فى المعادلات التفاضلية الجزئية وتطبيقاتها فى الفيزياء

Partial Differential Equations

مقدمة:

أي مسألة فيزيائية يمكن صياغتها رياضياً بوضعها في صورة معادلات يمكن حلها، والحصول على الكميات المجهولة التي تشتمل عليها، وذلك باستخدام شروط معينة، إما أن تكون معطاه صراحة، أو تكون موجودة ضمناً في المسألة.

وقد وجد العلماء أن الغالبية العظمى من المسائل الفيزيائية يمكن صياغتها رياضيا في صورة ما يعرف بالمعادلات التفاضلية الجزئية ،وذلك يلزمنا إعطاء نبذة عن تلك المعادلات وكيفية حلها.

المعادلات التفاضلية الجزئية: Partial Differential Equations

أي معادلة تفاضلية يجب أن تشتمل على مشتقات تفاضلية ويوجد نوعان من هذه المعادلات:

1- **معادلات تفاضلية عادية:** تشتمل على مشتقات عادية (كلية) لدالة أو أكثر بالنسبة لمتغير واحد.

مثال:

$$\frac{d^2u}{dt^2}+u(\frac{du}{dx})^2=0, \qquad u=u(x)$$

$$\frac{d^4u}{dt^4}+5(\frac{d^2u}{dt^2})+3u=\sin t, \qquad u=u(t)$$

2- **معادلات تفاضلية جزئية:** تشتمل على مشتقات جزئية لدالة أو أكثر بالنسبة لأكثر من متغير.

مثال:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}=0, \qquad u=u(x,t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0\ , \qquad u=u(x,y,z)$$

رتبة المعادلة(Order): هي رتبة أعلى مشتقة بها

مثال: المعادلة $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=2x-y$ ← حيث $u=u(x,y)$ من الرتبة الثانية لإحتوائها على المشتقة الثانية للدالة u.

درجة المعادلة (degree): هي أس (قوة) أكبر مشتق في المعادلة

فمثلاً: المعادلة $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=e^{xy}$ من الرتبة الثانية (لوجود المشتقة $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$) ومن الدرجة الأولى. والمعادلة $(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y})^3=\sin xy$ من الرتبة الثانية ومن الدرجة الثالثة.

مثال: أوجد رتبة ودرجة كلاً من المعادلات التفاضلية الجزئية:

(i) $x u_x + y u_y = 0, \qquad u_x=\frac{\partial u}{\partial x}, u_y=\frac{\partial u}{\partial y}$

(ii) $u_{xx}-a^2 u_{yy}=0, \qquad u_{xx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u_{yy}=\frac{\partial^2 u}{\partial u^2}$

(ii) $u_y+u_y^2=2u$

(iv) $u_{xx}^3=u_y+u$

الحل: المعادلة (i) هي معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى.

المعادلة (ii) هي معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الثنية والدرجة الأولى.

المعادلة (iii) هي معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الأولى والدرجة الثانية.

المعادلة (iv) هي معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الثانية والدرجة الثالثة.

طرق حل المعادلات التفاضلية الجزئية: هي إيجاد الدالة التي تحقق المعادلة،ويوجد ثلاثة أنواع من الحلول:

1) حل عام (General Solution)
2) حل خاص (Particular Solution)
3) حل مفرد أو شاذ (Singular Solution)

أولاً: الحل العـــام: يشتمل على دالة إختيارية أو أكثر

فمثلاً: الحل: $u(x,y)=x^2y-\frac{1}{2}xy^2+F(x)+G(y)$ يمثل حلاً عامل للمعادلة التفاضلية الجزئية ذات الرتبة الثانية

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=2x-y$$

حيث $F(x), G(y)$ دالتان إختياريتان.

ثانياً: الحل الخاص: هو حل يمكن الحصول عليه من الحل العام بإعطـــاء الـــدوال الإختيارية قيما خاصة معينة.

فمثلاً: بإعطاء الدالتين $F(x), G(y)$ قيماً معينة ولتكن:

$$F(x)=2\sin x, \quad G(y)=3y^4-5$$

فإننا نحصل على الحل الخاص الآتي للمعادلة المعطاة:

$$u(x,y)=x^2y-\frac{1}{2}xy^2+2\sin x+3y^4-5$$

ثالثاً: الحل المفرد أو الشاذ (Singular): هو حل لا يمكن الحصول عليـــه مـــن الحل العام بأي اختيار خاص للدوال الاختيارية.

فمثلاً: إذا كان للمعادلة التفاضلية الجزئية ذات الرتبـــة الأول: $u=x\frac{\partial u}{\partial x}-(\frac{\partial u}{\partial x})^2$ حلان هما:

(i) $u=xf(y)-f^2(y)$ حيث $f(y)$ دالة إختيارية

(i) $u = x f(y) - f^2(y)$ حيث $f(y)$ دالة إختيارية

(ii) $u = \frac{1}{4}x^4$

الحل الأول هو حل عام لأنه يشتمل على الدالة الإختيارية $f(y)$ بينما الحل الثاني هو حل مفرد، لأنه لا يمكن الحصول عليه من الحل الأول بأي إختيار للدالة $f(y)$.

المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية: هي معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الثانية في x,y تكون فيها الدالة u ومشتقاتها من الدرجة الأولى، وصورتها العامة:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = H \qquad (1)$$

المعاملات a,b,c,d,e,f إما أن تكون معاملات ثابتة أو أن تكون معتمدة على x,y (أي متغيرة).

ملاحظة(١): إذا كانت H في المعادلة (1) تساوي صفراً $(H=0)$ فتسمى المعادلة معادلة متجانسة (Homogeneous).

أما إذا كانت $(H \neq 0)$تسمى المعادلة غير متجانسة (Non-homogeneous)

ملاحظة(٢): المعادلة (1) يمكن كتابتها بالصورة:

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = H \qquad (2)$$

حيث: $u_x = \frac{\partial u}{\partial x},\ u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x}$

تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية: بكتابة المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة بالصورة:

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = 0 \qquad (3)$$

ومقارنتها بالمعادلة العامة للقطوع المخروطية

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \qquad (4)$$

فإن المعادلة (3) تعبر عن قطع مخروطي (ناقص أو زائد أو مكافئ).

يمسى المقدار b^2-4ac بالمميز ويرمز له بالرمز Δ.

ويكون لدينا ثلاث حالات:

(1) فإذا كان:

$$\boxed{b^2<4ac} \leftarrow \Delta=b^2-4ac<0$$

فإن المعادلة (3) تعبر عن قطع ناقص وتسمى معادلة ناقصية (Elleptic).

(2) وإذا كان:

$$\boxed{b^2>4ac} \leftarrow \Delta=b^2-4ac>0$$

فإن المعادلة (3) تعبر عن قطع زائد وتسمى معادلة زائدية (Hyperbolic).

(3) وإذا كان:

$$\boxed{b^2=4ac} \leftarrow \Delta=b^2-4ac=0$$

فإن المعادلة (3) تعبر عن قطع مكافئ وتسمى معادلة مكافئية (Parabolic).

<u>ملخص</u>: تسمى المعادلة ناقصية إذا كان $\Delta<0$، وتسمى زائدية إذا كان $\Delta>0$ وتسمى مكافئية إذا كان $\Delta=0$.

<u>مثال</u>: صنف المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية الآتية من حيث كونها: مكافئية أو ناقصية أو زائدية.

1) $$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow ku_{xx}-u_y=0$$

بمقارنة هذه المعادلة بالمعادلة (3):

$$a=k,\ b=0,\ c=0$$

$$b^2-4ac=0-0=0 \rightarrow b^2=4ac$$

إذاً المعادلة هي معادلة مكافئية.

2) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \rightarrow u_{xx}+u_{yy}=0$$

بمقارنة هذه المعادلة بالمعادلة (3):

$$a=1,\ b=0,\ c=1$$

$$b^2-4ac=0-4=-40<0$$

إذاً المعادلة المعطاه هي معادلة ناقصية.

وتعرف المعادلة $u_{xx}+u_{yy}=0$ أو $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. بمعادلة لابلاس في المستوى (x,y).

$$3)\quad V^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\rightarrow V^2 u_{xx}-u_{tt}=0$$

بمقارنة هذه المعادلة بالمعادلة (3) [وإعتبار $y=1$]:

$$a=V^2,\ b=0,\ c=-1$$

$$b^2-4ac=0-4(V^2)(-1)=4V^2>0$$

إذاً المعادلة المعطاه هي معادلة زائدية.

وتعرف المعادلة $u_{xx}=\frac{1}{V^2}u_{tt}$ أو $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ بالمعادلة الموجبة (Wave Equation)، حيث $V=c$ تعرف بسرعة الموجة.

معادلة أويلر: هي معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الثانية صورتها:

$$au_{xx}+bu_{xy}+cu_{yy}=0 \qquad (1)$$

حيث a,b,c ثوابت.

نبحث عن حل المعادلة (1) بالصورة:

$$u(x,y)=f(y+mx) \qquad (2)$$

حيث f دالة إختيارية تمثل حل المعادلة (1).

بحيث أن:

$$am^2+bm+c=0 \qquad (3)$$

حيث m بارامتر.

المعادلة (3) معادلة جبرياً من الدرجة الثانية لهـا جـذران m_1, m_2 وتعـرف بالمعادلة المميزة.

ويكون الحل العام بالصورة الآتية:

$$u(x,y)=f_1(y+m_1x)+f_2(y+m_2x)$$

بحيث أن $a\neq 0$.

الإثبات: حيث أن (من (2)):

$$u=f(y+mx),\ \ u_x=\frac{\partial u}{\partial x}=mf',\ u_{xx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=m^2 f''$$

$$u_{xy}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial y})=\frac{\partial}{\partial x}(f')=mf''$$

$$u_{yy}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial y})=\frac{\partial}{\partial y}(f')=f''$$

بالتعويض في (1):

$$am^2 f''+bmf''+cf''=0$$

$$(am^2+bm+c)f''=0$$

إذاً الدالة f تصبح حلاً [أي تحقق (1)] بشرط أن:

$$am^2+bm+c=0 \qquad (3)$$

حيث a,b,c ثوابت. وهو المطلوب.

أمثلة محلولة:

مثال(1): أوجد حلاً للمعادلة التفاضلية الجزئية.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

الحل: نكتب المعادلة بالصورة: $u_{xx}-u_{yy}=0$

بمقارنتها بالمعادلة العامة لأويلر:

$$au_{xx}+bu_{xy}+cu_{yy}=0$$

$$\therefore a=1,\ b=0,\ c=-1$$

إذاً الحل المطلوب يكون بالصورة:

$$u = f_1(y+m_1x) + f_2(y+m_2x)$$

حيث: m_1 , m_2 هما جذراً المعادلة المميزة $am^2 + bm + c = 0$

$$\therefore m^2 - 1 = 0 \to m^2 = 1 \quad \therefore m = \pm 1 \to m_1 = +1 , \ m_2 = -1$$

إذاً الحل يكون بالصورة:

$$u = f_1(y+x) + f_2(y-x)$$

حيث f_1 , f_2 دالتان إختياريتان.

<u>مثال(2):</u> أوجد حلاً لمعادلة لابلاس:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

<u>الحل</u>: نكتب المعادلة بالصورة:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

وحيث أن:

$$a u_{xx} + b u_{xy} + c u_{yy} = 0$$

$$\therefore a = 1, \ b = 0, \ c = 1$$

الحل المطلوب يكون بالصورة:

$$u = f_1(y+m_1x) + f_2(y+m_2x)$$

حيث: m_1 , m_2 هما جذراً المعادلة المميزة $am^2 + bm + c = 0$

$$\therefore m^2 + 1 = 0 \to m^2 = -1 \to m = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

$$\therefore \ m_1 = +i, \quad m_2 = -i$$

$$\therefore u = f_1(y+ix) + f_2(y-ix)$$

وهو المطلوب.

مثال(3): أوجد حلاً للمعادلة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-5\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+6\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

الحل: نكتب المعادلة بالصورة: $u_{xx}-5u_{xy}+6u_{yy}=0$

وحيث أن: $a=1,\ b=-5,\ c=6 \leftarrow au_{xx}+bu_{xy}+cu_{yy}=0$

الحل المطلوب يكون بالصورة:

$$u=f_1(y+m_1x)+f_2(y+m_2x)$$

حيث: m_1, m_2 هما جذراً المعادلة المميزة $m^2-5m+6=0$

$$\therefore (m-2)(m-3)=0 \rightarrow m_1=2, m_2=3$$

$$\therefore u=f_1(y+2x)+f_2(y+3x)$$

وهو المطلوب.

مسألة القيمة الحدية Boundary Value Problem

تسمى المسألة التي تتضمن معادلة تفاضلية جزئية ويتم فيها البحث عن حل تلك المعادلة مع تحقيق شروط معينة تسمى الشروط عند الحدود أو الشروط الحدية، بمسألة القيمة الحدية.

طرق حل مسائل القيمة الحدية: يوجد نوعان من طرق حل مسائل القيم الحدية

1- طرق عامة (حلول عامة).

2- طرق خاصة (حلول خاصة).

أولاً : الطرق العامة للحل: وفيها نوجد أن:

(1) الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية.

ثم (2) الحل الخاص الذي يحقق الشروط الحدية المعطاه.

وعند إيجاد الحلول العامة يجب اعتبار النظريتين الآتيتين:

<u>نظرية (1):</u> وتسمى بمبدأ التراكيب(Superposition): وتنص على الآتي:

إذا كانت $u_1, u_2, \cdots, u_n$ هي حلول للمعادلة التفاضلية الجزئية المعطاه، فإن:

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n$$

حيث $u_1, u_2, \cdots, u_n$ ثوابت. تكون أيضاً حلاً للمعادلة

<u>نظرية(2):</u> تخص الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة وتنص على أن:

الحل العام يساوي مجموع حلين:

(1) y_c " الحل المتمم " وهو الحل العام للمعادلة المتجانسة.

(2) y_p " الحل الخاص " وهو الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة.

<u>ملاحظات عند إيجاد الحلول العامة:</u>

(1) في بعض الأحيان يمكن إيجاد الحلول العامة باستخدام طرق المعادلات التفاضلية العادية.

(2) في المعادلات التفاضلية الجزئية ذات المعاملات الثابتة (ثوابت $a, b, \ldots$) يمكن الحصول على الحل العام للمعادلة المتجانسة بإفتراض أن هذا الحل يأخذ الصورة الآتية: $u = e^{\alpha x + \beta y}$

حيث α, β ثابتان يلزم إيجادهما من الشروط الحدية المعطاه في المسألة أو بأي طريقة أخرى.

<u>ثانياً: الطرق الخاصة لحل المعادلات التفاضلية الجزئية</u>: وهي طرق متعددة نذكر منها الطرق الآتية:

(1) طريقة استخدام التكامل المباشر.

(2) طريقة دالمبيرت (أوكيرتشوف).

(3) طريقة فصل المتغيرات.

(4) طريقة استخدام تحويلات لابلاس وتحويلات فورييه التكاملية.

أمثلة محلولة

أولاً: أمثلة على الطرق العامة:

مثال(1): أثبت أن $u(x,t)=e^{-8t}\sin 2x$ هــو حــل لمــسألة القيمــة الحديــة $u_t=2u_{xx}$ حيث $u_t=\dfrac{\partial u}{\partial t}, u_{xx}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

مع الشروط الحدية:

(i) $u(0,t)=u(\pi,t)=0$

(ii) $u(x,0)=\sin 2x$

الحل: حل المسألة هنا مُعطىً، فلإثبات أنه هو الحل فعلاً، نثبت أنه:

(i) يحقق الشروط الحدية.

(ii) يحقق المعادلة التفاضلية.

(i) لتحقيق الشروط الحدية:

$$u(x,t)=e^{-8t}\sin 2x\,,\quad u(0,t)=e^{-8t}\underbrace{\sin 0}_{=0}=0$$

$$u(\pi,t)=e^{-8t}\underbrace{\sin 2\pi}_{=0}=0\,,\ u(x,0)=\underbrace{e^0}_{=1}\sin 2x=\sin 2x$$

(ii) لتحقيق المعادلة التفاضلية: $u_t=2u_{xx}$

$$u=e^{-8t}\sin 2x$$

$$u_t=\frac{\partial u}{\partial t}=-8e^{-8t}\sin 2x \qquad (1)$$

$$u_x=\frac{\partial u}{\partial x}=2e^{-8t}\cos 2x$$

$$u_{xx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=(2e^{-8t})(-2\sin 2x)=-4e^{-8t}\sin 2x \qquad (2)$$

من (2):

$$2u_{xx} = -8e^{-8t}\sin 2x \qquad (3)$$

من (3), (1) يتضح أن: $u_t = 2u_{xx}$. وهو المطلوب.

مثال(2): أثبت أن $u(x,y) = F(y-3x)$

هي الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية: $u_x + 3u_y = 0$ ومن ثم أوجد الحل الخاص الذي يحقق الشرط الحدي $u(0,y) = 4\sin y$، حيث F دالة اختيارية قابلة للتفاضل.

الحل: الحل العام المعطى هو:

$$z = y - 3x,\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 1,\qquad \frac{\partial z}{\partial x} = -3$$

$$u(x,y) = F(y-3x) = F(z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = F'(z)\cdot(-3) = -3F' = u_x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = F'(z)\cdot(1) = F' = u_y$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاه:

$$-3F' + 3(F') = 0$$

إذاً الطرف الأيسر يساوي الطرف الأيمن، أي أن F المعطاه تحقق المعادلة التفاضلية فهي الحل العام لها. وهو المطلوب أولاً.

ولإيجاد المطلوب الثاني: يمكن الحصول على الحل الخاص من الحل العام بإعطاء الدالة الإختيارية F قيمة خاصة تحقق الشروط المعطاه.

الشرط المعطي في المسألة:

$$u(\underset{\substack{\downarrow\\ x=0}}{0}, y) = 4\sin y$$

وحيث أن:

$$u(x,y) = F(y-3x)$$

$$\therefore u(0,y) = F(y) = 4\sin y$$

وعلى ذلك فإذا كانت $F(y)=4\sin y$

$$\therefore F(y-3x)=4\sin\,(y-3x)$$

ويصبح الحل المطلوب (الحل الخاص) هو:

$$u(x,y)=4\sin\,(y-3x)$$

وهو المطلوب.

مثال(3): أثبت أن المعادلة التفاضلية الجزئية التي يكون حلها على الصورة:

$$u(x,y)=f(2x+y)+g(x-y)-xy$$

هي $u_{xx}-u_{xy}-2u_{yy}=1$

الحل: حيث أن

$$u=f(2x+y)+g(x-y)-xy \qquad (1)$$

$$u_x=\frac{\partial u}{\partial x}=2f'+g'-y \qquad (2)$$

$$u_{xx}=2[2f'']+g''=4f''+g'' \qquad (3)$$

$$u_y=\frac{\partial u}{\partial y}=f'+g'(-1)-x=f'-g'-x \qquad (4)$$

$$u_{xy}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial y})=2f''-g''(1)-1=2f''-g''-1 \qquad (5)$$

$$u_{yy}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(1)-g''(-1)-0=f''+g'' \qquad (6)$$

بالتعويض في المعادلة المطلوبة:

الطرف الأيسر $=u_{xx}-u_{xy}-2u_{yy}=(4f''+g'')-(2f''-g''-1)-2(f''-g'')$

$=4f''-4f''+2g''-2g''+1=1=$ الطرف الأيمن

$\therefore$ الحل المعطى يحقق المعادلة المعطاه.

ملحوظة: إذا كان رأس المسألة كالآتي: أوجد المعادلة التفاضلية الجزئية التي يكون حلها على الصورة:

$$u(x,y)=f(2x+y)+g(x-y)-xy$$

فيكون الحل كالتالي

الحل: أوجدنا العلاقة الآتية:

$$u_x=2f'+g'-y \tag{2}$$

$$u_{xx}=4f''+g'' \tag{3}$$

$$u_y=f'-g'-x \tag{4}$$

$$u_{xy}=2f''-g''-1 \tag{5}$$

$$u_{yy}=f''+g'' \tag{6}$$

المطلوب هو تكوين معادلة تفاضلية تختفي فيها الدوال الإختيارية $[f', g', f'', g'']$.

من (3), (6) بالطرح:

$$u_{xx}-u_{yy}=3f'' \tag{7}$$

بضرب (6) في الرقم 4:

$$4u_{yy}=4f''+4g'' \tag{8}$$

من (3), (8) بالطرح:

$$u_{xx}-4u_{yy}=-3g'' \tag{9}$$

بالتعويض عن f'', g'' من (7), (9) في (5):

$$u_{xy}=\frac{2}{3}\left[u_{xx}-u_{yy}\right]+\frac{1}{3}\left[u_{xx}-4u_{yy}\right]-1=u_{xx}-2u_{yy}-1$$

$$\therefore u_{xx}-u_{xy}-2u_{yy}=1$$

وهي المعادلة المطلوبة.

ملحوظة: يعرف هذا الحل عادة تحت عنوان: تكوين المعادلات التفاضلية بحذف الدوال الإختيارية، ويمكن صياغة رأس المسألة كالآتي:

أوجد المعادلة التفاضلية الجزئية التي تنشأ من حذف الدالتين الإختياريتين f,g من العلاقة الآتية:

$$u(x,y)=f(2x+y)+g(x-y)-xy$$

<u>مثال آخر على حذف الدوال الإختيارية:</u>

أوجد المعادلة التفاضلية الجزئية التي تنشأ عن حذف الدالتين الإختياريتين f,g من العلاقة الآتية:

$$y(x,t)=f(x-ct)+g(x+ct) \qquad (1)$$

حيث c ثابت

<u>الحل</u>: من (1) بالتفاضل الجزئي بالنسبة إلى x:

$$\therefore y_x=\frac{\partial y}{\partial x}=f'\cdot(1)+g'\cdot(1)=f'+g' \qquad (2)$$

وبالتفاضل الجزئي بالنسبة إلى t:

$$y_t=\frac{\partial y}{\partial t}=f'\cdot(-c)+g'\cdot(c)=-cf'+cg' \qquad (3)$$

وبتفاضل كل من (3) ,(2) مرة ثانية بالنسبة إلى x,t نحصل على:

$$y_{xx}=f''\cdot(1)+g''\cdot(1)=f''+g'' \qquad (4)$$

$$y_{tt}=-c\cdot f''(-c)+c\cdot g''(c)=c^2f''+c^2g''=c^2(f''+g'') \qquad (5)$$

من $(4), (5)$ نجد أن:

$$y_{tt}=c^2\,y_{xx}\rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

وهي معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الثانية تدل على حركة موجية بسرعة تساوي c وتكتب أحياناً بالصورة:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{c^{23}}\rightarrow u_{xx}-\frac{1}{c^2}u_{tt}=0$$

<u>مثال(4)</u>: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة:

$$2u_x+3u_y-2u=0 \qquad (1)$$

<u>الحل</u>: المعادلة المعطاه هي معادلة تفاضلية جزئية ذات معـاملات ثابتـة فـيمكن الحصول على الحل العام لها بإفتراض أن هذا الحل يكتب بالصورة:

$$u=e^{\alpha x+\beta y} \qquad (2)$$

من (2):

$$u_x=\frac{\partial u}{\partial x}=\alpha e^{\alpha x+\beta y} \qquad (3)$$

$$u_y=\frac{\partial u}{\partial y}=\beta e^{\alpha x+\beta y} \qquad (4)$$

بالتعويض من (4) ,(3) في (1):

$$2\alpha e^{\alpha x+\beta y}+3\beta e^{\alpha x+\beta y}-2e^{\alpha x+\beta y}=0$$

بالقسمة على $e^{\alpha x+\beta y}$:

$$2\alpha+3\beta-2=0$$

$$2\alpha=2-3\beta \quad \rightarrow \alpha=\frac{2-3\beta}{2}$$

ويصبح الحل بالصورة:

$$u=e^{\alpha x+\beta y}=e^{(\frac{2-3\beta}{2})x+\beta y}=e^{(1-\frac{3\beta}{2})x+\beta y}$$

$$=e^{x}\cdot e^{\frac{\beta}{2}(2y-3x)}=e^{x}\cdot F(2y-3x)$$

حيث $F(2y-3x)=e^{\frac{\beta}{2}(2y-3x)}$ هي دالة إختيارية في $(2y-3x)$.

$\therefore$ الحل العام للمعادلة المعطاه هو بالصورة:

$$u=e^{x}\cdot F(2y-3x)$$

وهو المطلوب.

<u>مثال(5):</u> أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية ذات الرتبة الثانية:

$$u_{xx}+3u_{xy}+2u_{yy}=0 \qquad (1)$$

__الحل__: المعادلة المعطاه هي معادلة تفاضلية جزئية متجانسة ذات معاملات ثابتة،
فنفرض أن الحل العام لها هو:

$$u(x,y)=e^{\alpha x+\beta y} \qquad (2)$$

حيث α,β ثابتان، والمطلوب إيجادهما:
من (2)

$$u_x=\frac{\partial u}{\partial x}=\alpha e^{\alpha x+\beta y}$$

$$u_{xx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\alpha^2 e^{\alpha x+\beta y} \qquad (3)$$

$$u_y=\frac{\partial u}{\partial y}=\beta e^{\alpha x+\beta y}$$

$$u_{yy}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\beta^2 e^{\alpha x+\beta y} \qquad (4)$$

$$u_{xy}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial y})=\frac{\partial u_y}{\partial x}=\alpha\beta e^{\alpha x+\beta y} \qquad (5)$$

بالتعويض من (5) ,(4) ,(3) في (1):

$$\alpha^2 e^{\alpha x+\beta y}+3\alpha\beta e^{\alpha x+\beta y}+2\beta^2 e^{\alpha x+\beta y}=0$$

بالقسمة على $e^{\alpha x+\beta y}$:

$$\alpha^2+3\alpha\beta+2\beta^2=0$$

وهي معادلة جبرية يمكن حلها كالآتي:

$$(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)=0$$

$$\alpha+\beta=0 \longrightarrow \alpha=-\beta$$

$$\alpha+2\beta=0 \longrightarrow \alpha=-\beta$$

ويكون لدينا حالتان يعطي كل مهما حلاً للمعادلة المعطاه:

(1) إذا كانت $\alpha=-\beta$:

$$\therefore u=e^{\alpha x+\beta y}=e^{-\beta x+\beta y}=e^{\beta(y-x)}$$

ونحصل على الحل الأول بالصورة:

(6) $$u_1=e^{\beta(y-x)}=f_1(y-x)$$

(2) إذا كانت $\alpha=-2\beta$:

$$u=e^{\alpha x+\beta y}=e^{-2\beta x+\beta y}=e^{\beta(y-2x)}$$

ونحصل على الحل الثاني بالصورة:

(7) $$u_2=e^{\beta(y-2x)}=f_2(y-2x)$$

حيث f_1,f_2 دالتان إختياريتان.

وحيث أن u_1,u_2 يمثلان حلان للمعادلة التفاضلية الجزئية المعطاه، فمن مبدأ التراكب:

المجموع الخطي لهما يمثل أيضاً حلاً لنفس المعادلة أي:

$$u=a_1u_1+a_2u_2=a_1f(y-x)+a_2f(y-2x)$$

وهو الحل العام المطلوب.

ثانياً: <u>الطرق الخاصة لحل المعادلات التفاضلية الجزئية:</u>

(1) <u>الطريقة الأولى</u>: <u>استخدام التكامل المباشر:</u>

<u>مثال(1):</u> باستخدام التكامل المباشر أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية:

$$u_{yx}=x^3-y$$

<u>الحل:</u> نكتب المعادلة بالصورة:

$$u_{yx}=\frac{\partial^2u}{\partial y\,\partial x}=x^3-y\rightarrow\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=x^3-y$$

$$\therefore\ \partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=(x^3-y)\partial y$$

بإجراء التكامل الجزئي بالنسبة إلى y حيث نعتبر x ثابتاً ويكون ثابت التكامل عبارة عن دالة إختيارية في x أي $f(x)$ مثلاً.

$$\therefore\int\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\int(x^3-y)\partial y$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x}=(x^3y-\frac{1}{2}y^2)+f(x) \qquad (1)$$

وبإجراء التكامل الجزئي مرة ثانية على (1) باعتبار أن y ثابتة:

$$\int \partial u=\int\left[(x^3y-\frac{1}{2}y^2)+f(x)\right]\partial x$$

$$\therefore u=\left[\frac{1}{4}x^4y-\frac{1}{2}y^2x+\int f(x)\partial x\right]+g(y)$$

حيث $g(y)$ دالة إختيارية تمثل ثابت التكامل في هذه الحالة.

وبأخذ $\int f(x)\partial x=h(x)$

$$\therefore u=\frac{1}{4}x^4y-\frac{1}{2}y^2x+h(x)+g(y) \qquad (2)$$

حيث $h(x),g(y)$ دالتان اختياريتان.

المعادلة (2) تمثل الحل المطلوب للمعادلة التفاضلية الجزئية المعطاه. وهو المطلوب.

ملحوظة: الفرق بين حل المعادلة التفاضلية العادية وحل المعادلة التفاضلية الجزئية باستخدام التكامل هو أن:

" المعادلة التفاضلية العادية يتضمن حلها ثوابت إختيارية "

" المعادلة التفاضلية الجزئية يتضمن حلها دوال إختيارية "

مثال(2): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية:

$$tu_{xt}+2u_x=x^2 \qquad (1)$$

حيث $u=u(x,t)$.

الحل: المعادلة المعطاة من الرتبة الثانية فيشتمل الحل العام لها على دالتين اختياريتين :

نكتب (1) بالصورة:

$$t\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}+2\frac{\partial u}{\partial x}=x^2$$

$$t\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial t})+2\frac{\partial u}{\partial x}=x^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[t\frac{\partial u}{\partial t}+2u\right]=x^2$$

$$\int\partial\left[t\frac{\partial u}{\partial t}+2u\right]=\int x^2\,\partial x$$

وبإجراء التكامل الجزئي المباشر بالنسبة إلى x (مع اعتبار t ثابتاً)

$$\therefore t\frac{\partial u}{\partial t}+2u=\frac{1}{3}x^3+f(t)$$

حيث $f(t)$ دالة إختيارية في الثابت t.

بالقسمة على t:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{2}{t}u=\frac{1}{3}\frac{x^3}{t}+\frac{f(t)}{t} \qquad (2)$$

المعادلة (2) هي معادلة تفاضلية جزئية خطية يمكـن حلهـا باسـتخدام طـرق المعادلات التفاضلية العادية ولتكن طريقة استخدام عامل التكامل:

عامل التكامل للمعادلة (2) هو:

$$e^{\int\frac{2}{t}dt}=e^{2\int\frac{dt}{t}}=e^{2\ell nt}=e^{\ell nt^2}=t^2$$

بضرب المعادلة (2) في عامل التكامل:

$$t^2\frac{\partial u}{\partial t}+2tu=\frac{1}{3}tx^3+tf(t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(t^2u)=\frac{1}{3}tx^3+tf(t)$$

$$\ell na^2=2\ell na$$
$$e^{\ell nx}=x$$

$$\therefore\int\partial(t^2u)=\int[\frac{1}{3}tx^3+tf(t)]\partial t$$

وبإجراء التكامل الجزئي بالنسبة إلى t مع أعتبار x ثابتاً ويكون ثابت التكامـــل هو دالة إختيارية في x وليكن $g(x)$:

$$\therefore t^2u=[\frac{1}{6}t^2x^3+\underbrace{\int t\,f(t)\partial t}_{h(t)}]+g(x)$$

وبأخذ $\int t\,f(t)\partial t=h(t)$ دالة إختيارية في t.

$$\therefore t^2u=\frac{1}{6}t^2x^3+h(t)+g(x)$$

وبالقسمة على t^2:

$$\therefore u=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{t^2}[h(t)+g(x)] \qquad (3)$$

وهو الحل المطلوب.

مثال(3): باستخدام التكامل المباشر أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية

$$u_{xy}=x^2y$$

ثم أستنتج الحل الخاص باستخدام الشروط الحدية الآتية:

عند $y=0$ فإن $u=x^2$ $\qquad (i)\quad u(x,0)=x^2$

عند $x=1$ فإن $u=\cos y$ $\qquad (ii)\ u(1,y)=\cos y$

الحل: الحل العام للمعادلة المعطاه يشتمل على دوال اختيارية، والحل الخاص يمكن الحصول عليه من الحل العام بإيجاد قيم لهذه الدوال وذلك باســتخدام الــشروط الحدية المعطاة في رأس المسألة .

أولاً: نوجد الحل العام: نكتب المعادلة المعطاه بالصورة الآتية:

$$u_{xy}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=x^2 y \rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial y})=x^2 y$$

$$\partial\,(\frac{\partial u}{\partial y})=x^2 y\,\partial x$$

وبإجراء التكامل بالنسبة إلى x مع اعتبار y ثابتة واختيار ثابت التكامل دالـة اختيارية في y وليكن: $f(y)$

$$\therefore \int \partial\,(\frac{\partial u}{\partial y})=\int x^2 y\,\partial x$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial y}=(\frac{1}{3}x^3 y)+f(y)$$

$$\therefore \int \partial u=\int[(\frac{1}{3}x^3 y)+f(y)]\partial y$$

وبإجراء التكامل مرة ثانية بالنسبة إلى y مع اعتبار x ثابتة وبأخذ ثابت التكامل دالة اختيارية في x وليكن: $g(x)$

$$\therefore u=[\frac{1}{6}x^3 y^2+\underbrace{\int(f(y)\partial y}_{h(y)}]+g(x)$$

وبأخذ $\int f(y)\partial y=h(y)$

$$\therefore \quad u=\frac{1}{6}x^3y^2+h(y)+g(x) \qquad (1)$$

وهو الحل العام للمعادلة المعطاه بدلالة $h(y), g(x)$.

ثانياً: نوجد الحل الخاص، باستخدام الشروط الحدية المعطاه:

الشرط (i): $u=x^2$ عند $y=0$، فمن (1):

$$\therefore x^2=h(0)+g(x)$$

$$\therefore \quad g(x)=x^2-h(0) \qquad (2)$$

بالتعويض في (1):

$$u=\frac{1}{6}x^3y^2+h(y)+x^2-h(0) \qquad (3)$$

الشرط (ii): $u=\cos y$ عند $x=1$: فمن (3):

$$\cos y=\frac{1}{6}y^2+h(y)+1-h(0)$$

$$\therefore \quad h(y)=\cos y-\frac{1}{6}y^2-1+h(0) \qquad (4)$$

بالتعويض عن $h(y)$ من (4) في (3):

$$\therefore u=\frac{1}{6}x^3y^2+\left[\cos y-\frac{1}{6}y^2-1\cancel{+h(0)}\right]+x^2\cancel{-h(0)}$$

$$=\frac{1}{6}x^3y^2+\cos y+x^2-\frac{1}{6}y^2-1$$

$$=\frac{1}{6}y^2(x^3-1)+\cos y+x^2-1$$

وهو الحل المطلوب.

مسألة: باستخدام التكامل المباشرة أوجد الحل لمسألة القيمة الحدية الآتية:

$$u=xy^2, \qquad u(0,y)=y^2$$
$$u(x,1)=\cos x$$

حل المسألة: نكتب المعادلة التي تصف المسألة بالصورة:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]=xy^2$$

$$\therefore \partial\left[u_y\right]=(xy^2)\,\partial x$$

وبإجراء التكامل بالنسبة إلى x (مع اعتبار y ثابتة):

$$u_y=\frac{1}{2}x^2y^2+f(y)=\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\therefore \partial u=\left[\frac{1}{2}x^2y^2+f(y)\right]\partial y$$

وبالتكامل بالنسبة إلى y (مع اعتبار x ثابتة):

$$\therefore u=u(x,y)=\frac{1}{6}x^2y^3+\int f(y)dy+g(x)$$

$$=\frac{1}{6}x^2y^3+h(y)+g(x) \qquad (1)$$

الحل (1) هو الحل المطلوب ولكن مع وجود الدالتين $g(x),h(y)$ ولإيجادهما نستخدم الشروط الحدية:

فمن الشرط الأول (بوضع $x=0$ في (1)):

$$u(0,y)=y^2=h(y)+g(0)$$

$$\therefore h(y)=y^2-g(0) \qquad (2)$$

ومن الشرط الثاني (بوضع $y=1$ في (1)):

$$u(x,1)=\cos x=\frac{1}{6}x^2+h(1)+g(x)$$

$$\therefore g(x)=\cos x-\frac{1}{6}x^2-h(1) \qquad (3)$$

ومن (2) بوضع $y=1$:

$$h(1)=1-g(0)$$

بالتعويض في (3):

$$\therefore g(x)=\cos x-\frac{1}{6}x^2-1+g(0) \qquad (4)$$

وبالتعويض من (4) ,(2) في (1) نحصل على الحل المطلوب:

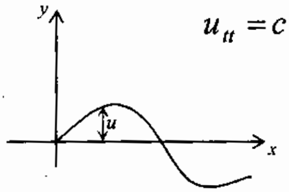
$$u(x,y)=\frac{1}{6}x^2y^3+\left[y^2-\cancel{g(0)}\right]+\left[\cos x-\frac{1}{6}x^2-1+\cancel{g(0)}\right]$$

$$=\frac{1}{6}x^2y^3+y^2+\cos x-\frac{1}{6}x^2-1$$

وهو المطلوب.

[2] **الطريقة الثانية: طريقة دالمبيرت (أو كيرتشوف):**

هي طريقة خاصة بإيجاد الحل العام لمعادلة حركة تموجية (المعادلة الموجيـــة) التي صورتها:



$$u_{tt} = c^2\, u_{xx} \qquad (1)$$

حيث c تمثل سرعة الموجة

وحيث $u = u(x,t)$ تمثل الإزاحة

عند أي نقطة وعند الزمن t.

حل المعادلة (1) بطريقة دالمبيرت: نكتب (1) بالصورة الآتية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \;\rightarrow\; \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0}$$

تمثل هذه المعادلة ما يسمى بالموجة المستوية (Plane Wave).

نفرض متغيرين جديدين v, w حيث:

$$v = x + ct, \quad w = x - ct$$

$$\therefore \frac{\partial v}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = c, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -c$$

باستخدام قاعدة السلسلة (في التفاضلات الجزئية):

$$u = u(x,t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial w} \qquad \left| \begin{array}{l} x = x(v,w) \\ t = t(v,w) \end{array} \right.$$

$$\therefore \boxed{\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial w}} \qquad (2)$$

أيضاً

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t}=c\frac{\partial u}{\partial v}+(-c)\frac{\partial u}{\partial w}=c\left(\frac{\partial u}{\partial v}-\frac{\partial u}{\partial w}\right)$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial t}=c\left(\frac{\partial}{\partial v}-\frac{\partial}{\partial w}\right)} \qquad (3)$$

التفاضلات الثانية: من (3) ,(2):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\left(\frac{\partial}{\partial v}+\frac{\partial}{\partial w}\right)\left[\frac{\partial u}{\partial v}+\frac{\partial u}{\partial w}\right]$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial v\partial w}+\frac{\partial^2 u}{\partial w^2} \qquad (4)$$

[بإعتبار أن $\frac{\partial^2 u}{\partial v\partial w}=\frac{\partial^2 u}{\partial w\partial v}$]

أيضاً:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]=c^2\left(\frac{\partial}{\partial v}-\frac{\partial}{\partial w}\right)\left[\frac{\partial u}{\partial v}-\frac{\partial u}{\partial w}\right]$$

$$=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial v\partial w}+\frac{\partial^2 u}{\partial w^2}\right) \qquad (5)$$

بالتعويض في المعادلة الموجية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial v\partial w}+\frac{\partial^2 u}{\partial w^2}\right]-\frac{1}{c^2}\cdot c^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial v\partial w}+\frac{\partial^2 u}{\partial w^2}\right]=0$$

$$\therefore 2\frac{\partial^2 u}{\partial v\partial w}+2\frac{\partial^2 u}{\partial v\partial w}=0$$

$$\therefore 4\frac{\partial^2 u}{\partial v\partial w}=0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial v\partial w}=0 \qquad (6)$$

$\therefore$ باستخدام المتغيرين $v=x+ct,\ w=x-ct$ تحولت المعادلة الموجية $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$ إلى المعادلة $\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial w}=0$

الحل العام للمعادلة (6) هو:

$$u=f_1(v)+f_2(w) \tag{7}$$

الإثبات: بتكامل (6) بالنسبة إلى w (تكامل جزئي مع أعتبار v ثابتة)

$$\frac{\partial}{\partial w}\left[\frac{\partial u}{\partial v}\right]=0 \qquad \therefore \frac{\partial u}{\partial v}=f(v)$$

حيث $f(v)$ هو ثابت التكامل وهو دالة في v.

وبالتكامل مرة ثانية بالنسبة إلى v (تكامل جزئي مع اعتبار w ثابتة)

$$\partial u=f(v)\partial v \to u=\underbrace{\int f(v)\partial v}_{f_1(v)}+f_2(w)$$

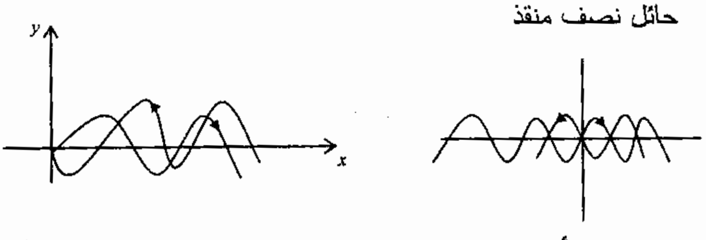
حيث $f_2(w)$ ثابت التكامل وهو دالة في w.

$$\therefore u=f_1(v)+f_2(w)$$

ويصبح الحل العام للمعادلة الموجية المعطاه (المعادلة (1)) بالصورة:

$$u(x,t)=f_1(x+ct)+f_2(x-ct) \tag{8}$$

<u>المعنى الفيزيائي لحل دالمبيرت (للمعادلة (8)):</u>



هذا الحل يمثل موجتين أحدهما تنتشر في الاتجاه الموجب لمحور x (موجة نافذة) والأخرى تنتشر في عكس الاتجاه (موجة منعكسة).

موجة ساقطة: Incident Wave ، موجة منعكسة: Reflected Wave

موجة نافذة: Penetrating Wave

<u>ملحوظة</u>: يطلق أحياناً على حل دالمبيرت للمعادلة الموجية أسم حـل كيرتـشوف (نسبة إلى العالم الألماني: كيرتشوف).

<u>مثال</u>: استخدم حل كيرتشوف للمعادلة الموجية لحل المسألة الحدية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad , \qquad -\infty<x<\infty,\ t>0$$

مع الشروط الابتدائية:

$$u(x,0)=f(x)$$

$$u_t\big|_{t=0}=\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x)$$

<u>الحل</u>: حل كيرتشوف للمعادلة الموجية يعطي بالعلاقة:

$$u(x,t)=\phi(x+ct)+\psi(x-ct) \qquad (1)$$

باستخدام الشروط الابتدائية:

$$\phi(x)+\psi(x)=f(x) \qquad (2)$$

$$c\phi'-c\psi'=g(x) \qquad (3)$$

$$\therefore \phi'(x)-\psi'(x)=\frac{1}{c}g(x) \qquad (4)$$

بتكامل طرفي (4):

$$\phi(x)-\psi(x)=\frac{1}{c}\int_0^x g(y)\,dy+A \qquad (5)$$

من (5) ,(2) بالجمع:

$$\phi(x)=\frac{1}{2}\left[f(x)+\frac{1}{c}\int_0^x g(y)\,dy+A\right]$$

من (5) ,(2) بالطرح:

$$\psi(x)=\frac{1}{2}\left[f(x)-\frac{1}{c}\int_0^x g(y)\,dy-A\right]$$

وحيث أن الدالتين ϕ,ψ معرفتين لجميع قيم x فإنه:

وبالتعويض عن $x \leftarrow (x+ct)$ في الدالة ϕ

$x \leftarrow (x-ct)$ في الدالة ψ

نحصل على:

$$\phi(x+ct)=\frac{1}{2}\left[\ f(x+ct)+\frac{1}{c}\int_0^{x+ct} g(y)dy+A\ \right] \tag{6}$$

$$\psi(x-ct)=\frac{1}{2}\left[\ f(x-ct)-\frac{1}{c}\int_0^{x-ct} g(y)dy-A\ \right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ f(x-ct)+\frac{1}{c}\int_{x-ct}^{0} g(y)dy-A\ \right] \tag{7}$$

بجمع (6), (7):

$$u(x,t)=\phi(x+ct)+\psi(x-ct)$$

$$=\frac{1}{2}[f(x+ct)+f(x-ct)]+\frac{1}{2c}\left[\ \int_0^{x+ct} g(y)dy+\int_{x-ct}^{0} g(y)dy\ \right]$$

$$=\frac{1}{2}[f(x+ct)+f(x-ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy \tag{8}$$

وهو الحل المطلوب.

<u>**ملحوظة**</u>: تعرف الصيغة (8) بصيغة دالمبيرت (أو كيرتشوف) لحل المعادلة الموجية وتستخدم كثيراً في حل المعادلة الموجية مع شروط ابتدائية مختلفة كما في الأمثلة الآتية.

<u>**مثال(1)**</u>: باستخدام صيغة دالمبيرت لحل المعادلة الموجية أوجد الحل للمعادلة $u_{xx}=u_{tt}$ مع الشروط الأبتدائية $u(x,0)=x^2,\ \ u_t|_{t=0}=0$

<u>**الحل**</u>: من صيغة دالمبيرت

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+ct)+f(x-ct)]+\frac{1}{2c}\left[\ \int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy\ \right]$$

حيث: $g(y)=0,\ f(x)=x^2\ ,\ c=1$

$$\therefore u=(x,t)=\frac{1}{2}\left[(x-t)^2+(x+t)^2\right]=x^2+t^2$$

مثال(2): باستخدام صيغة دالمبيرت لحل المعادلة الموجية أوجد الحل للمعادلة

$u_{tt}=k^2u_{xx}$ ، حيث $t=\frac{\pi}{2t} \leftarrow k=\frac{\pi}{2t}$

مع الشروط الابتدائية: $u(x,0)=\sin x, \quad u_t|_{t=0}=1$

الحل: من صيغة دالمبيرت

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+ct)+f(x-ct)]+\frac{1}{2c}\left[\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy\right]$$

حيث: $g(y)=1, f(x)=\sin x, c=k$

$$\therefore u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\sin(x+kt)+\sin(x-kt)\right]+\frac{1}{2k}\int_{x-kt}^{x+kt}(1)dz$$

$$=\sin x \ \cos kt+\frac{1}{2k}\left[z\right]_{x-kt}^{x+kt}=\sin x \ \cos kt+t$$

وحيث أن $t=\frac{\pi}{2k} \leftarrow kt=\frac{\pi}{2}$

$$\therefore u(x,t)=\sin x \ \cos\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2k}=\sin x\cdot(0)+\frac{\pi}{2k}=\frac{\pi}{2k}$$

الطريقة الثالثة: طريقة فصل المتغيرات:

إذا كانت $u=u(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ تمثل حلاً لمسألة القيمة الحدية

$$f(u,u_{x_1},u_{x_2},u_{x_1x_2},\ldots)$$

ففي طريقة فصل المتغيرات: نفرض أن الحل u يمكن كتابته بالصورة:

$$u=f_1(x_1)\cdot f_2(x_2)\cdots$$

وبالتعويض عن هذا الحل في المعادلة التفاضلية الجزئية (معادلة القيمة الحدية) يمكن فصل المتغيرات كما في الأمثلة الآتية:

مثال(1): باستخدام طريقة فصل المتغيرات حل المعادلة التفاضلية الآتية:

$u_x - 3u_y = 0$ مع تحقق الشرط الحدي $u = (0, y) = \frac{1}{2}e^{-2y}$

الحل: لدينا المتغيرين x, y فنفرض أن الحل يكتب بالصورة:

$$u(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y) \rightarrow u = f_1 f_2$$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = f_1' f_2 \quad , \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = f_1 f_2' \qquad \Big| \; f_1' = \frac{\partial f_1}{\partial x}, f_2' = \frac{\partial f_2}{\partial y}$$

بالتعويض في المعادلة $u_x - 3u_y = 0$ نحصل على:

$$\therefore f_1' f_2 - 3 f_1 f_2' = 0$$

$$\therefore f_1' f_2 = 3 f_1 f_2'$$

وبفصل المتغيرات:

$$\frac{f_1'}{3f_1} = \frac{f_2'}{f_2}$$

وحيث أن الطرف الأيسر دالة في x فقط والطرف الأيمن دالة في y فقط فإن كل طرف يجب أن يساوي نفس الثابت وليكن k مثلاً (نظرية في المعادلات التفاضلية).

$$\therefore \frac{f_1'}{3f_1} = k \qquad \therefore \frac{f_1'}{f_1} = 3k$$

وبالتكامل بالنسبة إلى x

$$\ell n\, f_1 = 3kx + const. = 3kx + \ell n\, A$$

حيث A ثابت.

$$\therefore \ell n \frac{f_1}{A} = 3kx$$

$$\therefore \frac{f_1}{A} = e^{3kx} \quad \rightarrow \quad \mathrm{f_1 = Ae^{3kx}}$$

أيضاً فإن:

$$\frac{f_2'}{f_2} = k$$

وبالتكامل بالنسبة إلى y:

$$\ell n\, f_2 = ky + const. = ky + \ell n\, B$$

حيث B ثابت.

$$\ell n\frac{f_2}{B}=ky \ , \quad \frac{f_2}{B}=e^{ky}$$ | $\ell na=b, \ a=e^b$

$$\therefore \quad f_2=Be^{ky}$$

ويصبح الحل بالصورة:

$$u(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)=(Ae^{3kx})(Be^{ky})=ABe^{3kx+ky}=Ce^{k(3x+y)}$$

$$\therefore \quad u(x,y)=C\,e^{k(3x+y)} \qquad (1)$$

في هذا الحل يوجد ثابتان C,k ولإيجادهما نستخدم الشروط الحدية في المسألة.

الشرط المعطى:

$$u(0,y)=\frac{1}{2}e^{-2y} \qquad (2)$$

بمقارنة $(1), (2)$:

$$c=\frac{1}{2}, \ k=-2$$

وهو المطلوب

$$u=(x,y)=\frac{1}{2}e^{-2(3x+y)}$$

مثال(2): باستخدام طريقة فصل المتغيرات حل المعادلة التفاضلية الآتية: $u_t=u_{xx}$

مع تحقق الشروط الحدية الآتية:

$(i)\ \ u(0,t)=u(\pi,t)=0$

$(ii)\ u(x,0)=4\sin 3x$

الحل: نفرض الحل على الصورة:

$$u=(x,t)=f(x)\cdot g(t) \ \rightarrow u=fg$$

$$u_x=\frac{\partial u}{\partial x}=f'g \ \rightarrow \ u_{xx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''g$$

$$u_t=\frac{\partial u}{\partial t}=fg'$$ | $f'=\frac{\partial f}{\partial x}, \ f''=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \ g'=\frac{\partial g}{\partial t}$

بفصل المتغيرات:

$$fg' = f''g \rightarrow \frac{f''}{f} = \frac{g'}{g}$$

وحيث أن الطرف الأيسر دالة في x فقط والأيمن دالة في t فقط فكل من الطرفين يجب أن يساوي نفس الثابت (وليكن k).

$$\frac{f''}{f} = \frac{g'}{g} = k = -a^2$$

(بأخذ الثابت $= -a^2$)

$$\therefore \frac{f''}{f} = -a^2$$

$$\therefore f'' + a^2 f = 0$$

وهي معادلة تفاضلية حلها العام:

$$\boxed{f = A\cos ax + B\sin ax}$$

أيضاً فإن:

$$\frac{g'}{g} = -a^2$$

بالتكامل بالنسبة إلى t:

$$\ell ng = -a^2 t + \ell nc$$

حيث ℓnc ثابت

$$\therefore \ell n\frac{g}{c} = -a^2 t \;\; \therefore \frac{g}{c} = e^{-a^2 t} \rightarrow \quad \mathrm{g} = \mathrm{ce}^{-\mathrm{a}^2 \mathrm{t}}$$

ويصبح الحل العام بالصور:

$$u(x,t) = fg = (A\cos ax + B\sin ax)(ce^{-a^2 t})$$

$$= e^{-a^2 t}\left[A_1 \cos ax + A_2 \sin ax\right] \qquad (1)$$

حيث $A_1 = Ac \;,\;\; A_2 = Bc$

نلاحظ أن الحل (1) يشتمل على ثلاثة ثوابت A_1, A_2, a ، ولإيجادهم نطبق الشروط الحدية المعطاه في رأس المسألة:

$(i)\quad u(0,t)=0$

بوضع $x=0$ في (1):

$$0=e^{-a^2t}\left[A_1\underbrace{\cos 0}_{1}+A_2\underbrace{\sin 0}_{0}\right]=e^{-a^2t}A_1$$

$$\therefore\quad A_1=0\quad\rightarrow\quad u=(x,t)=e^{-a^2t}\left[A_2\sin ax\right]\qquad(2)$$

$(ii)\quad u(\pi,t)=0$

بوضع $x=\pi$ في (2):

$$0=e^{-a^2t}\left[A_2\sin a\pi\right]=A_2\,e^{-a^2t}\sin a\pi$$

إذاً إما $A_2\,e^{-a^2t}=0$ (وهذا غير ممكن) أو $\sin a\pi=0$ (وهذا يستلزم أن تكون a عدد صحيح)

$a=0,1,2,3,\dots$

$(iii)\ u(x,0)=4\sin 3x \qquad (3)$

فبوضع $t=0$ في (2):

$$u(x,0)=\underbrace{e^0}_{1''}\left[A_2\sin ax\right]=A_2\sin ax\qquad(4)$$

وبمقارنة (3), (4):

$A_2=4, a=3$

ويصبح الحل النهائي الذي يحقق الشروط الحدية (من المعادلة (2)):

$$u(x,t)=4e^{-9t}\sin 3x$$

وهو المطلوب.

<u>الطريقة الرابعة:</u> طريقة استخدام تحويلات لابلاس وفورييه التكاملية:

وسوف نقوم بدراستها في فقرة المعادلات التفاضلية الجزئية للفيزياء الرياضية لما تشتمل عليه من خصائص فيزيائية سوف ندرسها بالتفصيل هناك.

والآن ننتقل إلى أحد التطبيقات الهامة للمعادلات التفاضلية الجزئية واستخدامها فى المسائل الفيزيائية، وهو ما يعرف بالمعادلات التفاضلية الجزئية للفيزياء الرياضية.

المعادلات التفاضلية الجزئية للفيزياء الرياضية:

هي ثلاث معادلات لها صور خاصة، تظهر كثيراً في المسائل الفيزيائية، وهذه المعادلات هي:

[1] معادلة فوريه (فورير) أو معادلة الانتشار الحراري (Heat Diffusion):

وصورتها:

$$\boxed{\nabla^2 u - \frac{1}{k} u_t = 0} \qquad (1)$$

حيث:

$$\nabla^2 u = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

مؤثر أو معامل لابلاس (Laplacian) (في ثلاثة أبعاد)

في بعدين: $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

في بعد واحد: $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

أيضاً: $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$، k يسمى معامل الانتشار أو الانتشارية (Diffusivity).

الدالة $u = u(x, y, z, t)$ تمثل درجة حرارة الجسم عند النقطة (x, y, z) عند الزمن t، وفي بعد واحد: $u = u(x, t)$ وتؤول (1) إلى:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t} = 0}$$

[2] معادلة دالمبيرت أو المعادلة الموجية (Wave Equation):

وصورتها

$$\boxed{\Box\, u = 0} \qquad (2)$$

حيث $\square = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ يسمى مؤثر دالمبيــرت (D'Alembertian)، ∇^2 هي مؤثر لابلاس، c هي سرعة الموجة التي تصفها المعادلة.

في بعدين:

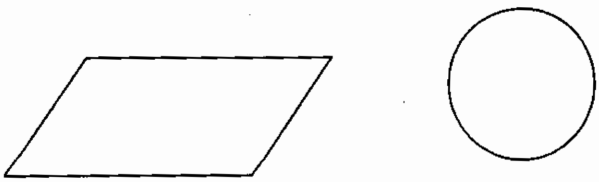
$$\square\, u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

أو بالصورة:

$$\boxed{u_{xx} + u_{yy} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0}$$

وهي معادلة دالمبيرت في بعدين، حيث $u = u(x, y, t)$

وتصف هذه المعادلة تذبذب غشاء رقيق في المستوى (في بعدين).



في بعد واحد:

$$\square\, u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = 0$$

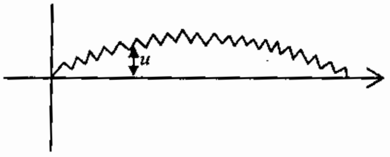
أو الصورة:

$$\boxed{u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0}$$

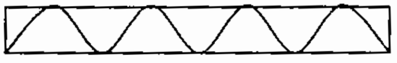
حيث: $u = u(x,t)$.

وتمثل هذه المعادلة:

(1) تذبذب خيط أو سلك مرن مشدود (Vibrating String)



(2) حركة قضيب معدني رقيق يتذبذب طولياً (Vibrating Rod)



[3] <u>معادلة لابلاس: صورتها:</u>

$$\nabla^2 u = 0 \rightarrow \boxed{\Delta u = 0}$$

حيث:

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

[في ثلاثة أبعاد]

في بعد واحد: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ وتأخذ معادلة لابلاس الصورة:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \rightarrow \boxed{u_{xx} = 0}$$

في بعدين: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ وتأخذ معادلة لابلاس الصورة:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \rightarrow \boxed{u_{xx} + u_{yy} = 0}$$

<u>ملاحظات</u>: في حالة الاستقرار الزمني (عدم التغير مع الزمن) أو الحالة المستقرة (Steady state) (لا تعتمد الزمن) فإن:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = 0} \quad \rightarrow \quad \boxed{u_t = 0}$$

وتؤول المعادلة (2) ,(1) إلى معادلة لابلاس (3):

(1) المعادلة (1): $\nabla^2 u-\frac{1}{k}u_t=0$ تؤول إلى $\boxed{\nabla^2 u=0}$

(معادلة لابلاس للإنسياب الحراري المستقر)

(2) المعادلة (2): $\nabla^2 u-\frac{1}{c^2}u_{tt}=0$ تؤول إلى $\boxed{\nabla^2 u=0}$

(معادلة لابلاس للإنتشار الموجي المستقرأو للموجات المستقرة Stationary Waves)

$u=u(x,y,z)$ حيث u تعتمد على الموضع فقط.

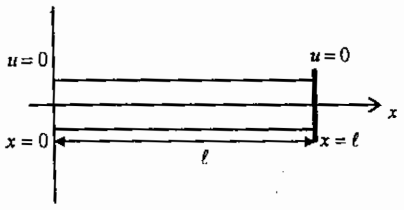
<u>أمثلة محلولة:</u>

<u>مثال(1):</u> باستخدام طريقة فصل المتغيرات، أوجد الحل العام لمعادلة الانتشار الحراري على طول قضيب معدني رقيق موضوع على محور x أي المعادلة:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}$$

حيث $u=u(x,t)$ تمثل درجة حرارة القضيب عند النقطة x والزمن t، k معامل الانتشار الحراري، وذلك مع استخدام الشرط الحدي: $u=0$، عند $x=0,\ x=\ell$ لكل قيم t أي الشرط: $u(0,t)=u(\ell,t)=0$

<u>الحل:</u>



معادلة الانتشار الحراري

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}\rightarrow u_{xx}=\frac{1}{k}u_t \qquad (1)$$

باستخدام طريقة فصل المتغيرات: نضع: $u(x,t)=X(x)\cdot T(t)$، حيث $X(x)$ دالة في x فقط، $T(t)$ دالة في t فقط.

$$u_x=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(XT)=T\frac{\partial X}{\partial x}=TX'$$

$$u_{xx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(TX')=TX''$$

$$u_t=\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(XT)=X\frac{\partial T}{\partial t}=XT'$$

بالتعويض في (1):

$$TX''=\frac{1}{k}XT'$$

بفصل المتغيرات

$$\frac{X''}{X}=\frac{1}{kT}T' \qquad (2)$$

وحيث أن الطرف الأيسر يعتمد على x والأيمن على t فقط، فإن كل طرف من (2) يساوي نفس المقدار الثابت، وبأخذ هذا الثابت $c=-a^2$، وبذلك نحصل على المعادلتين:

$$\text{(i)}\ \frac{X''}{X}=-a^2$$

$$\therefore\ X''+a^2X=0 \qquad (3)$$

الحل العام للمعالة (3):

$$X=C\cos(ax+b)$$

حيث a,b,c ثوابت اختيارية.

$$\text{(ii)}\ \frac{1}{kT}T'=-a^2$$

$$T'+ka^2T=0 \qquad (4)$$

الحل العام للمعادلة (4):

$$T=De^{-ka^2t}$$

حيث D ثابت اختياري.

ويصبح الحل العام للمعادلة (1) بالصورة:

$$u(x,t)=X\cdot T=CDe^{-ka^2t}\cos(ax+b)=Ae^{-ka^2t}\cos(ax+b) \qquad (5)$$

حيث $CD=A$.

<u>سؤال</u>: لماذا أخذنا الثابت $=(-a^2)$ ولم نأخذه $(+a^2)$.

<u>الإجابة</u>: الدالة $u(x,t)$ يجب أن تكون محدودة القيمة (finite) أي لا تصل قيمتها إلى مالا نهاية.

(1) بأخذ الثابت $= +a^2$، يظهر في الحل المعامل (e^{ka^2t}) وبزيادة الزمن فإن هذا المعامل يؤول إلى مالا نهاية، وهو مرفوض فيزيائياً.

(2) بأخذ الثابت $= -a^2$، يظهر في الحل المعامل e^{-ka^2t} وبزيادة الزمن فإن هذا المعامل تقل قيمته حتى يصل إلى الصفر عندما $t=\infty$، وهذا يؤدي إلى محدودية $u(x,t)$ وهو المقبول فيزيائياً.

مع ملاحظة أن

$$e^{\infty}=\infty\,,\qquad e^{-\infty}=0$$

<u>الجزء الثاني من المسألة</u>: تطبيق الشرط الحدي:

عند الطرف $x=0$: $\quad (i)\ \ u(0,t)=0$

عند الطرف $x=\ell$: $\quad (ii)\ \ u(\ell,t)=0$

بتطبيق الشرط (i) على (5): [بوضع $x=0$]:

$$u(0,t)=0=Ae^{-ka^2t}\cos b$$

وهذا يعني أن: $\cos b=0 \quad \leftarrow \quad b=\dfrac{\pi}{2}$

بتطبيق الشرط (ii) على (5) [بوضع $x=\ell$]:

$$u(\ell,t)=0=Ae^{-ka^2t}\cos(a\ell+b)$$

وهذا يعني أن:

$$\cos(a\ell+b)=0$$

$$\therefore \underbrace{\cos a\ell\ \cos b}_{0} - \sin a\ell \sin b = 0$$

$$\cos b = 0$$

$$b = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \sin a\ell \underbrace{\sin b}_{\sin\frac{\pi}{2}=1} = 0$$

$$\therefore \sin a\ell = 0$$

وهذا يعني أن:

$$a\ell = \pi, 2\pi, 3\pi, \cdots$$

$$\therefore a = \frac{\pi}{\ell}, \frac{2\pi}{\ell}, \frac{3\pi}{\ell}, \cdots$$

وتسمى قيم a تلك بالقيم الذاتية (Eigen values).

بأخذ القيمة: $a = \frac{\pi}{\ell}$: المعادلة (5) (الحل العام) تصبح:

$$u(x,t) = Ae^{-a^2kt}\cos(ax+b) = Ae^{-a^2kt}\cos\left(\frac{\pi}{\ell}x + \frac{\pi}{2}\right)$$

ولكن:

$$\cos\left(\frac{\pi}{\ell}x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{\ell}x\ \cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{\ell}x\ \sin\frac{\pi}{2} = -\sin\frac{\pi}{\ell}x = -\sin ax$$

ويصبح الحل بالصورة:

$$u(x,t) = -Ae^{-a^2kt}\sin ax = B\ e^{-a^2kt}\sin ax$$

<u>مثال(2):</u> أوجد الحل لمسألة القيمة الحدية الآتية التي تمثل مسألة انتشار حراري على طول قضيب معدني طوله 3 وحدات تحت الشروط الحدية المعطاه، وذلك بطريقة فصل المتغيرات.

<u>المسألة:</u>

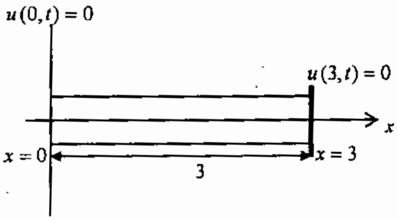
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} \quad \rightarrow \quad u_{xx} = \frac{1}{2}u_t \qquad (1)$$

$u = u(x,t)$ | حيث $t > 0,\ 0 < x < 3$

الشروط الحدية:

$$(i)\ \ u(0,t)=0\ ,\ \ u(3,t)=0$$

$$(ii)\ \ u(x,0)=5\sin 2\pi x-3\sin 4\pi x+2\sin 6\pi x$$



<u>الحل</u>: من الشروط الحدية (i): فإن درجة الحرارة u عند طرفي القضيب تساوي صفراً.

الشرط (ii):

معناه أن درجة الحرارة $t=0$ (درجة الحرارة الابتدائية) تعطي بالعلاقة:

$$u=(x,0)=f(x)=5\sin 2\pi x-3\sin 4\pi x+2\sin 6\pi x$$

<u>خطوات الحل:</u>

(1) نستخدم طريقة فصل المتغيرات كالتالي: نفرض الحل بالصورة:

$$u(x,t)=X(x)\cdot T(t)$$

$$u_x=\frac{\partial u}{\partial x}=X'T,\quad u_{xx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=X''T\ ,u_t=\frac{\partial u}{\partial t}=XT'$$

بالتعويض في (1):

$$XT'=2X''T$$

بفصل المتغيرات:

$$\frac{X''}{X}=\frac{T'}{2T}$$

وحيث أن الطرف الأيسر يعتمد على x فقط والأيمن على t فقط فكل طرف منهما يجب أن يساوي مقداراً ثابتاً وليكن $-a^2=k$، وبذلك نحصل على المعادلتين:

$$(\text{i})\ \frac{X''}{X}=-a^2\rightarrow\ \boxed{X''+a^2X=0}$$

الحل العام لهذه المعادلة: $A=A_1\cos ax+A_2\sin ax$

(ii) $\frac{T'}{2T} = -a^2 \rightarrow \quad \boxed{T' + 2a^2 T = 0}$

الحل العام لهذه المعادلة:

$$T = A_3 e^{-2a^2 t}$$

ويصبح الحل الكامل:

$$u(x,t) = X \cdot T = (A_1 \cos ax + A_2 \sin ax)(A_3 e^{-2a^2 t})$$

$$= e^{-2a^2 t}(A \cos ax + B \sin ax) \qquad (2)$$

حيث: $A = A_1 A_3 \ , \ B = A_2 \ A_3$ ، مع ملاحظة أن:

أي معادلة تفاضلية بالصورة: $X'' + a^2 X = 0$ حلها العام:

$$x = A_1 \cos ax + A_2 \sin ax$$

أي معادلة تفاضلية بالصورة: $X' + aX = 0$ حلها العام:

$$X = Ae^{-ax}$$

[2] <u>نستخدم الشروط الحدية المعطاه لإيجاد الثوابت A, B, a كالتالي</u> :

(1) <u>من الشرط $u(0,t) = 0$</u> : بالتعويض في (2) ووضع $x = 0$:

$$0 = e^{-2a^2 t}(A \cos 0 + B \sin 0) = e^{-2a^2 t}(A)$$

$$\therefore \quad A = 0$$

وتصبح (2):

$$u(x,t) = Be^{-2a^2 t} \sin ax \qquad (3)$$

(2) <u>من الشرط $u(3,t) = 0$</u> : بالتعويض في (3) ووضع $x = 3$

$$0 = Be^{-2a^2 t} \sin 3a \rightarrow \sin 3a = 0$$

لكن: $\sin n\pi = 0, \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

$$\therefore 3a = n\pi \quad \rightarrow \quad a = \frac{n\pi}{3}$$

وتصبح (3):

$$u(x,t)=Be^{-2a^2t}\sin\frac{n\pi}{3}x \qquad (3)$$

(3) من الشرط:

$$u(x,0)=5\sin 2\pi x-3\sin 4\pi x+2\sin 6\pi x$$

نلاحظ الآتي: هذا الشرط يتكون من ثلاثة حدود فلتطبيق هذا الشرط على المعادلة (4) نستخدم مبدأ التراكب (Superposition) بحيث أن الحل في هذه المعادلة يكون عبارة عن مجموع ثلاثة حلول بالصورة الآتية:

$$u(x,t)=B_1 e^{-2a_1^2t}\sin a_1x+B_2e^{-2a_2^2t}\sin a_2x+B_3\ e^{-2a_3^2t}\sin a_3x \quad (5)$$

حيث $a_1=\frac{n_1\pi}{3},\ a_2=\frac{n_2\pi}{3},\ a_3=\frac{n_3\pi}{3}$

بوضع $t=0$:

$$u(x,0)=B_1\sin a_1x+B_2\sin a_2x+B_3\sin a_3x \qquad \Big|\ e^0=1$$

$$=B_1\sin\frac{n_1\pi}{3}x+B_2\sin\frac{n_2\pi}{3}x+B_3\sin\frac{n_3\pi}{3}x \qquad (6)$$

بمقارنة هذه المعادلة بالشرط المعطي:

$$B_1=5,\ 2=\frac{n_1}{3},\ B_2=-3,\ 4=\frac{n_2}{3},B_3=2,6=\frac{n_3}{3}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$n_1=6 \qquad\qquad n_2=12 \qquad\qquad n_3=18$$

ويصبح الحل النهائي المعادلة (5):

$$u(x,t)=5e^{-8\pi^2t}\sin 2\pi x-3e^{-32\pi^2t}\sin 4\pi x+2e^{-64\pi^2t}\sin 6\pi x$$

وهو الحل المطلوب.

مثال(3): باستخدام طريقة فصل المتغيرات، أوجد الحل لمسألة القيمة الحدية

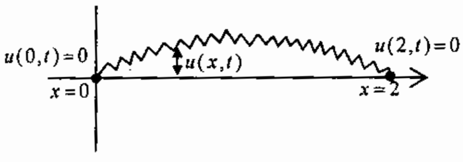
$$u_{tt}=16u_{xx}$$

حيث $t>0, 0<x<2$ والتي تمثل الذبذبات (أو الحركة الموجية) لسلك مشدود ونهاياته مثبتتان عند $x=0, x=2$ مع الشروط الحدية:

$(i)\quad u(0,t)=0, \quad u(2,t)=0$

$(ii)\quad u(x,0)=6\sin\pi x-3\sin 4\pi x$

$(iii)\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=u_t(x,0)=0$



<u>الحل</u>: هنا $u(x,t)$ تمثل الإزاحة أو المسافة الرأسية التي تحركها السلك عند تذبذبه

<u>معنى الشرط (i)</u>: أنه لا توجد أي إزاحة رأسية عند $x=0, x=2$.

<u>معنى الشرط (ii)</u>: أن معادلة الإزاحة في البداية $(t=0)$ هي:

$u(x,0)=f(x)=6\sin\pi x-3\sin 4\pi x$

<u>معنى الشرط (iii)</u>: أن سرعة السلك $(u_t=\frac{\partial u}{\partial t})$ في البداية (عند $t=0$) تساوي صفراً، أي أن السلك ترك ليتذبذب من السكون (السرعة في البداية تساوي صفراً).

<u>خطوات الحل:</u>

[1] باستخدام طريقة فصل المتغيرات: نكتب المعادلة بالصورة:

$$u_{tt}=16u_{xx} \qquad (1)$$

نضع $u(x,t)=X(x)\cdot T(t)$

$u_x=X'T \quad , \quad u_{xx}=X''T$

$u_t=XT' \quad , \quad u_{tt}=XT''$

بالتعويض في (1):

$XT''=16X''T$

بفصل المتغيرات:

$$\frac{X''}{X}=\frac{T''}{16T}$$

وحيث أن الطرف الأيسر دالة في x والأيمن دالة في t فكل طرف يجب أن يساوي نفس الثابت ← $k=-a^2$، وبذلك نحصل على المعادلتين:

(i) $\frac{X''}{X}=-a^2 \qquad \therefore X''+a^2X=0$

الحل العام لهذه المعادلة:

$$X=a_1\cos ax+b_1\sin ax$$

(ii) $\frac{T''}{16T}=-a^2 \quad \therefore T''+16a^2T=0$

الحل العام لهذه المعادلة:

$$T=a_2\cos 4at+b_2\sin 4at$$

وبذلك يكون الحل الكامل بالصورة:

$$u(x,t)=X\cdot T=(a_1\cos 4ax+b_1\sin 4ax)(a_2\cos 4at+b_2\sin 4at) \quad (2)$$

[2] <u>تطبيق الشروط الحدية لإيجاد الثوابت:</u>

من الشرط (i): $u(0,t)=0$

فبوضع $x=0$ في (2):

$$0=(a_1\cos 0+b_1\sin 0)(a_2\cos 4at+b_2\sin 4at)$$
$$=a_1(a_2\cos 4at+b_2\sin 4at)$$

$$\therefore \quad a_1=0$$

وتصبح المعادلة (2):

$$u(x,t)=(b_1\sin ax)\,(a_2\cos 4at+b_2\sin 4at) \qquad \begin{vmatrix} b_1a_2=A \\ b_1b_2=B \end{vmatrix}$$

$$=\sin ax(A\cos 4at+B\sin 4at) \qquad (3)$$

وأيضاً: حيث أن $u(2,t)$

فبوضع $x=2$ في (3):

$$0=(\sin 2a)(A\cos 4at+B\sin 4at)$$

$$\therefore\ \sin 2a=0$$

ولكن $\sin n\pi=0$ (حيث $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$)

$$\therefore 2a=n\pi \quad \rightarrow \quad a=\frac{n\pi}{2}$$

من الشرط (iii):

$$u_t(x,0)=\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0$$

فبتفاضل (3) بالنسبة إلى t تفاضلاً جزئياً:

$$u_t=\frac{\partial u}{\partial t}=\sin ax\ (-4a\,A\sin 4at+4a\,B\cos 4at)$$

بوضع $t=0$ فإن:

$$0=\sin ax\ (-4a\,A\sin 0+4a\,B\cos 0)$$
$$=\sin ax\cdot(4aB)=(4a\sin ax)\,(B)$$

$$\therefore\ \boxed{B=0}$$

وتصبح المعادلة (3):

$$u(x,t)=\sin ax\ (A\cos 4at)=A\sin ax\ \cos 4at \qquad \Big|\ a=\frac{n\pi}{2}$$

$$\therefore \quad u(x,t)=A\sin\frac{n\pi}{2}x\cos 2n\pi t \qquad (4)$$

من الشرط (ii):

$$u(x,0)=6\sin\pi x-3\sin 4\pi x \qquad (5)$$

نلاحظ أن هذا الشرط يتكون من حدين فلكي نطبقه على المعادلة (4) نستخدم مبدأ التراكب بحيث أن الحل في هذه المعادلة يكون عبارة عن مجموع حلين بالصورة الآتية:

$$u(x,t)=A_1\sin\frac{n_1\pi}{2}x\cos 2n_1\pi t+A_2\sin\frac{n_2\pi}{2}x\cos 2n_2\pi t$$

بوضع $t=0$:

$$u(x,0)=A_1\sin\frac{n_1\pi}{2}x+A_2\sin\frac{n_2\pi}{2}x \qquad (6)$$

بمقارنة (6) ,(5) نجد أن:

$$A_1=6,\ 1=\frac{n_1}{2},\quad A_2=-3\ ,\ 4=\frac{n_2}{2}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$n_1=2 \qquad\qquad n_2=8$$

وبذلك يصبح الحل النهائي المطلوب بالصورة:

$$u(x,t)=6\sin\pi x\ \cos 4\pi t-\sin 4\pi x\ \cos 16\pi t$$

وهو المطلوب.

استخدام تحويلات لابلاس لحل مسائل الإنتشار الحراي:

مثال(١): باستخدام تحويلات لابلاس ، أوجد الحل العام لمسألة القيمة الحدية الآتية التي تمثل انتشار حراري على طول قضيب طوله ٣ وحدات ، ودرجة الحرارة عند طرفيه تساوي صفراً، ودرجة حرارته الابتدائية هي $f(x)$.

المسألة: $u_t=4u_{xx}$ حيث $0<x<3$

الشروط الحدية:

$$(i)\ \ u(0,t)=0 \qquad ,\quad u(3,t)=0$$
$$(ii)\ \ u(x,0)=f(x)=10\sin 2\pi x-6\sin 4\pi x$$

الحل: يعرف تحويل لابلاس للدالة $u(t)$ بالعلاقة:

$$L[u(t)]=u(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}\,u(t)\,dt$$

ولكن هنا الدالة في متغيرين، حيث $u=u(x,t)$.

بأخذ تحويل لابلاس للمعادلة المعطاة :

$$\therefore L[u_t]=4\,L[u_{xx}]$$

$$\therefore \int_0^{\infty} e^{-st} u_t\, dt = 4\int_0^{\infty} e^{-st}\; u_{xx}\, dt \qquad (1)$$

الطرف الأيسر يمكن كتابته باستخدام نظرية (1) للمشتقات وهي:

$$L[u'(t)]=s\,L[u(t)]-u(0)$$

$$\therefore L[u'(x,t)]=s\,L[u(x,t)]-u(x,0)$$

وتصبح (1) بالصورة :

$$s\,L[u(x,t)]-u(x,0)=4\int_0^{\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,e^{-st}\,dt=4\frac{d^2}{dx^2}\int_0^{\infty} e^{-st}\;u(x,t)\;dt$$

وبأخذ:

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\;u(x,t)\;dt=L[u(x,t)]=U(x,s)=U$$

$$\therefore\; s\,U-u(x,0)=4\,\frac{d^2U}{dx^2} \qquad (2)$$

وباستخدام الشرط (ii) المعطى في رأس المسالة نحصل على:

$$4\,\frac{d^2U}{dx^2}-s\,U=-u(x,0)=-f(x)$$

$$=6\sin 4\pi x-10\sin 2\pi x \qquad (3)$$

أيضاً: بأخذ تحويلات لابلاس للشروط الحدية :

$$u(0,t)=0\rightarrow L[u(0,t)]=0\rightarrow U(o,s)=0 \qquad (4)$$

$$u(3,t)=0\rightarrow L[u(3,t)]=0\rightarrow U(3,s)=0 \qquad (5)$$

والآن : بحل المعادلة التفاضلية (3) واستخدام الشرطين (4),(5) نحصل على [تعطى كمسألة]:

$$U(x,s)=\frac{10}{s+16\pi^2}\sin 2\pi x-\frac{6}{s+64\pi^2}\sin 4\pi x$$

$$\therefore L[u(x,t)]=\frac{10}{s+16\pi^2}\sin 2\pi x-\frac{6}{s+64\pi^2}\sin 4\pi x \qquad (7)$$

وبأخذ تحويل لابلاس العكسي لهذه العلاقة نحصل على:

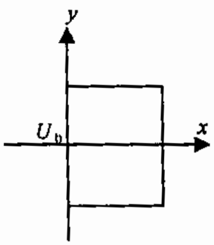
$$u(x,t)=10L^{-1}[\frac{1}{s+16\pi^2}]\sin 2\pi x-6L^{-1}[\frac{1}{s+64\pi^2}]\sin 4\pi x$$

$$=10e^{-16\pi^2 t}(\sin 2\pi x)-6e^{-64\pi^2 t}(\sin 4\pi x)$$

وذلك لأن : $L^{-1}[\frac{1}{s+a}]=e^{-at}$

$$\therefore u(x,t)=10e^{-16\pi^2 t}(\sin 2\pi x)-6e^{-64\pi^2 t}(\sin 4\pi x) \qquad (8)$$

وهو الحل المطلوب للمعادلة المعطاة مع الشروط الحدية المذكورة.



مثال(2): إذا تعرض الوجه $x=0$ من جسم لدرجة حرارة ثابتة $U_0>0$ وكانت حرارة الجسم في البداية صفر، المطلوب إيجاد درجة الحرارة $U(x,t)$ عند أي نقطة $x>0$ في الجسم وعند أي زمن $t>0$ وذلك بإستخدام تحويلات لابلاس.

الحل: معادلة الإنتشار الحراري في بعد واحد هي:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\frac{1}{k}\frac{\partial U}{\partial t} \quad , \quad x>0\,,\,t>0 \qquad \_\_\_(1)$$

الشروط الحدية:

(i) $U=(x,0)=0$, (ii) $U(0,t)=U_0$

وحيث أن U محدودة، فإن: $|U(x,t)|<M$

بفرض أن: $L\{U(x,t)\}=u(x,s)$، فإن: $L^{-1}\{u(x,s)\}=U(x,t)$

أيضاً فإن:
$$L\{\frac{\partial U}{\partial t}\}=sL\{U\}-U(x,0)=su$$
$$L\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\}=\frac{d^2}{dx^2}[L(U)]=\frac{d^2 u}{dx^2}$$

بأخذ تحويل لابلاس للمعادلة (1):

$$\frac{d^2 u}{dx^2}=\frac{1}{k}su \rightarrow \frac{d^2 u}{dx^2}-\frac{s}{k}u=0 \qquad \_\_\_(2)$$

ومن الشروط الحدية:

$$u(0,s)=L\{U(0,t)\}=U_0\, L\{1\}=\frac{U_0}{s} \qquad \_\_\_(3)$$

حل المعادلة (2) هو:

$$u(x,s)=c_1 e^{x\sqrt{s/k}}+c_2 e^{-x\sqrt{s/k}} \qquad \_\_\_(4)$$

ولكي تكون u محدودة عندما $x\to\infty$ فيجب إختيار $c_1=0$ وإلا فإن الحـــرارة ستكون لا نهائية عندما $x\to\infty$، وتؤول المعادلة (4) إلى: $u(x,s)=c_2 e^{-x\sqrt{s/k}}$

ولكن من (3): $u(x,s)=\frac{U_0}{s}$ عندما $x=0$، فإن: $c_2=\frac{U_0}{s}$

وبذلك يصبح حل المعادلة (2) بالصورة: $u(x,s)=\frac{U_0}{s}e^{-x\sqrt{s/k}}$

وبأخذ تحويل لابلاس العكسي نجد أن:

$$U(x,t)-U_0 L^{-1}\left\{\frac{1}{s}e^{-x\sqrt{s/k}}\right\}=U_0\, erf\, c(\frac{x}{2\sqrt{kt}})$$

حيث $erf\, c(y)$ تمثل دالة الخطأ المكملة (Complement error Function)

$$erf\, c(y)=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^y e^{-x^2}dx,\quad erf\, c(\frac{x}{2\sqrt{kt}})=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} e^{-x^2}dx$$

$$\therefore U(x,t)=U_0[1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} e^{-x^2}dx]$$

وهو المطلوب.

مسائل عامة

1) أثبت أن $u(x,y)=xF(2x+y)$ هو الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية $xu_x-2xu_y=u$ حيث F دالة اختيارية، ثم أوجد الحل الخاص الذي يحقق الشرط: $u(1,y)=y^2$.

2) باستخدام طريقة فصل المتغيرات، أوجد الحل العام لمسألة القيمة الحدية: $u_x=4u_y$ مع تحقق الشرط $u(0,y)=8e^{-3y}$.

3) باستخدام طريقة فصل المتغيرات حل معادلة الانتشار الحراري الآتية: $u_t=a^2u_{xx}$ مع الشروط الحدية:

$(i)\ \ u(0,t)=u(\ell,t)=0$

$(ii)\ \ u(x,0)=3\sin\frac{\pi x}{\ell}$

4) بيّن أن $u(x,y)=4e^{-3x}\cos 3y$ تكون حلاً لمعادلة لابلاس $u_{xx}+u_{yy}=0$ مع تحقق الشرطان الحديان:

$(i)\ \ u(x,0)=4e^{-3x}\quad ,\ (ii)\ \ u(x,\frac{\pi}{2})=0$

5) حل مسألة القيمة الحدية الآتية التي تمثل الذبذبات الحادثة في سلك نهايتاه مثبتتان عند $x=0\ ,\ x=5$: $u_{tt}=4u_{xx}$ مع الشروط الحدية:

$(i)\ \ u(0,t)=u(5,t)=0\quad ,\quad (ii)\ u_t(x,0)=0$

$(iii)\ \ u(x,0)=3\sin 2\pi x-2\sin 5\pi x$

$$u_t(x,0)=\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}$$

6) أوجد الحل لمسألة القيمة الحدية $u_t=2u_{xx}$ (معادلة انتشار حراري) حيث:

$$u(0,t)=0\ \ ,\ \ u(2,t)=0$$
$$u(x,0)=10\sin 3\pi x+4\sin 2\pi x-2\sin 4\pi x$$

<u>حل المسألة رقم (6):</u> باستخدام طريقة فصل المتغيرات نضع الحل بالصورة:

$$u(x,t)=X(x)T(t)=XT \qquad (1)$$

وبالتعويض في المعادلة $u_t=2u_{xx}$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(XT)=2\frac{\partial^2 (XT)}{\partial x^2}$$

$$XT'=2X''T$$

وبالقسمة على $2XT$:

$$\therefore \frac{T'}{2T}=\frac{X''}{X}=const.=k$$

وبذلك نحصل على المعادلتين التفاضليتين:

$$T'-2kT=0 \qquad (2)$$

$$X''-kX=0 \qquad (3)$$

الحل العام لهاتين المعادلتين يأتي بأخذ $k<0 \leftarrow k=-\lambda^2$

$$\therefore T'+2\lambda^2 T=0 \qquad (4)$$

$$X''+\lambda^2 X=0 \qquad (5)$$

حل المعادلة (4): هو $T=Ce^{-2\lambda^2 t}$

وحل المعادلة(5):

$$X=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x$$

وبذلك يكون الحل هو [من (1)]:

$$u(x,t)=Ce^{-2\lambda^2 t}\left[A\cos\lambda x+B\sin\lambda x\right] \qquad (6)$$

وبتطبيق الشروط المعطاه:

من الشرط الأول:

$$u(0,t)=CAe^{-2\lambda^2 t}=0$$

وحيث أن $e^{-2\lambda^2 t}\neq 0$ فإن $CA=0$ ولكن $C\neq 0$ $\leftarrow$ $\boxed{A=0}$

$$\therefore u(x,t)=CBe^{-2\lambda^2 t}\sin\lambda x=De^{-2\lambda^2 t}\sin\lambda x \quad \Big| \quad D=CB \qquad (7)$$

من الشرط الثاني: باستخدام (7):

$$u(2,t)=De^{-2\lambda^2 t}\sin 2\lambda=0$$

ومنها $\sin 2\lambda=0 \leftarrow 2\lambda=n\pi \leftarrow \lambda=\frac{n\pi}{2}$

وتأخذ (7) الصورة:

$$u(x,t)=De^{-\frac{n^2\pi^2}{2}t}\sin\frac{n\pi}{2}x \tag{8}$$

ومن الشرط الثالث: وباستخدام قاعدة التركيب يمكن كتابة (8) بالصورة:

$$u(x,t)=D_1 e^{-\frac{n_1^2\pi^2}{2}t}\sin\frac{n_1\pi}{2}x+D_2 e^{-\frac{n_2^2\pi^2}{2}t}\sin\frac{n_2\pi}{2}x$$

$$+D_3 e^{-\frac{n_3^2\pi^2}{2}t}\sin\frac{n_3\pi}{2}x \tag{9}$$

ومن الشرط الثالث أيضاً:

$$u(x,0)=10\sin\frac{3\pi x}{2}+4\sin 2\pi x-2\sin 4\pi x \tag{10}$$

فبأخذ $t=0$ تصبح (9):

$$u(x,0)=D_1\sin\frac{n_1\pi}{2}x+D_2\sin\frac{n_2\pi}{2}x+D_3\sin\frac{n_3\pi}{2}x \tag{11}$$

بمقارنة (10), (11) نجد أن:

$$\left.\begin{array}{lll} D_1=10 , & D_2=4 , & D_3=-2 \\ n_1=6 , & n_2=4 , & n_3=8 \end{array}\right\} \tag{12}$$

وبذلك يصبح الحل النهائي بالصورة [بالتعويض عن القيم من (12) في (9)]:

$$u(x,t)=10e^{-18\pi^2 t}\sin 3\pi x+4e^{-8\pi^2 t}\sin 2\pi x-2e^{-32\pi^2 t}\sin 4\pi x$$

وهو المطلوب.

استخدام تحويلات فورييه لحل المعادلات التفاضلية الجزئية ذات القيم الحدية:

تمهيد:

تحويلات فورييه للمشتقات: إذا كان لدينا دالة في المتغيرين x,t أي $F=F(x,t)$ وهي محدودة، ومشتقها بالنسبة إلى x هي $(\frac{\partial F}{\partial x})$ فيكون لدينا حالتان:

(1) **تحويل فورييه الجيبي للمشتقة** $(\frac{\partial F}{\partial x})$ هو:

$$f_s(\frac{\partial F}{\partial x})=\int_0^\infty(\frac{\partial F}{\partial x})\sin nx\,dx$$

وبإجراء التكامل بالتجزئ في الطرف الأيمن:

$$\therefore f_s(\frac{\partial F}{\partial x})=\left[F\cdot\sin nx\right]_0^\infty-n\int_0^\infty F\cdot\cos nx\,dx$$

$$=0-n\,f_c(n,t)=-n\,f_c(n,t) \qquad (1)$$

حيث: $F(x,t)|_{x\to\infty}=0$ (الدالة F محدودة)

$$\therefore f_c(n,t)=\int_0^\infty F(x,t)\cos nx\,dx$$

(2) **تحويل فورييه لجيب التمام للمشتقة** $(\frac{\partial F}{\partial x})$ هو:

$$f_c(\frac{\partial F}{\partial x})=\int_0^\infty(\frac{\partial F}{\partial x})\cos nx\,dx$$

وبإجراء التكامل بالتجزئ في الطرف الأيمن:

$$f_c(\frac{\partial F}{\partial x})=\left[F\cdot\cos nx\right]_0^\infty+n\int_0^\infty F\cdot\sin nx\,dx$$

$$=-F(0,t)+n\,f_c(n,t)=n\,f_s(n,t)-F(0,t) \qquad (2)$$

حيث: $F(x,t)\big|_{x\to\infty}=0$ ، $f_s(n,t)=\int_0^\infty F\cdot \sin nx\,dx$

وإذا كانت $F(0,t)=0$: فإن (2) تصبح:

$$f_c(\frac{\partial F}{\partial x})=n\,f_s(n,t)$$

أمثلة محلولة:

مثال(1): إذا كانت u دالة في (x,t) أي $u=u(x,t)$ فأوجد تحويل فورييه الجيبي وجيب التمام المحدود للمشتقة الثانية $\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}$ تحت الشرط $0<x<\ell$ ، $t>0$.

الحل: **أولاً**: من تعريف تحويل فورييه الجيبي المحدود:

$$f_s(\frac{\partial u}{\partial x})=\int_0^\ell(\frac{\partial u}{\partial x})\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

وبإجراء التكامل بالتجزئ:

$$f_s(\frac{\partial u}{\partial x})=\left[u\cdot\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right]_0^\ell-\frac{n\pi}{\ell}\int_0^\ell u\cdot\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$=0-\frac{n\pi}{\ell}f_c(n,t)=-\frac{n\pi}{\ell}f_c(u) \qquad (1)$$

حيث

$$f_c(u)=f_c(n,t)=\int_0^\infty u(x,t)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

ثانياً: من تعريف تحويل فورييه المحدود لجيب التمام:

$$f_c(\frac{\partial u}{\partial x})=\int_0^\ell(\frac{\partial u}{\partial x})\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$=\left[u\cdot\cos\frac{n\pi x}{\ell}\right]_0^\ell+\frac{n\pi}{\ell}\int_0^\ell u\cdot\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$=u(\ell,t)\cos n\pi-u(0,t)+\frac{n\pi}{\ell}f_s(u) \qquad (2)$$

حيث:

$$f_s(u)=f_s(n,t)=\int_0^\ell u(x,t)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

وباستبدال u بالمشتقة $\frac{\partial u}{\partial x}$ في (1) واستخدام (2) نحصل على:

$$\therefore f_s(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) = -\frac{n\pi}{\ell} f_s(\frac{\partial u}{\partial x})$$

$$= -\frac{n\pi}{\ell}\left[u(\ell,t)\cos n\pi - u(0,t) + \frac{n\pi}{\ell} f_s(u)\right]$$

$$= -\frac{n\pi}{\ell} u(\ell,t)\cos n\pi + \frac{n\pi}{\ell} u(0,t) - \frac{n^2\pi^2}{\ell^2} f_s(u) \qquad (3)$$

أيضاً: باستخدام u بالمشتقة $\frac{\partial u}{\partial x}$ في (2) واستخدام (1) نحصل على

$$\therefore f_s(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) = \frac{\partial u(\ell,t)}{\partial x}\cos n\pi - \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \frac{n\pi}{\ell} f_s(\frac{\partial u}{\partial x})$$

$$= \frac{\partial u(\ell,t)}{\partial x}\cos n\pi - \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} - \frac{n^2\pi^2}{\ell^2} f_s(u)$$

وذلك لأن:

$$f_s(\frac{\partial u}{\partial x}) = -\frac{n\pi}{\ell} f_s(u) \qquad \text{((من (1}$$

مثال(2): أوجد تحويل فورييه الجيبي وجيب التمام للمشتقة الثانية للدالة $F = F(x,t)$، حيث $0 < x < \infty\ ,\ t > 0$.

الحل: **أولاً**: تحويل فورييه الجيبي: من التعريف

$$f_s(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}) = \int_0^\infty (\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}) \sin nx\, dx$$

وبكتابة $F' = \frac{\partial F}{\partial x}$ وبإجراء التكامل بالتجزئ نحصل على:

$$f_s(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}) = \int_0^\infty \frac{\partial F'}{\partial x} \sin nx\, dx = \left[F' \cdot \sin nx\right]_0^\infty - n\int_0^\infty F' \cos nx\, dx$$

$$= 0 - n\left[f_c(F')\right] = -n f_c(F')$$

وذلك بشرط أن $F'(x,t)\big|_{x=\infty} = 0$.

وحيث: $f_c(F')=\int_0^\infty F'\cos nx\ dx$ ، أي أن:

$$f_c\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)=n f_s(n,t)-F(0,t)$$

$$\therefore f_s\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)=-n\left[n f_s(n,t)-F(0,t)\right]$$

$$=-n^2 f_s(n,t)+nF(0,t) \qquad (1)$$

<u>ملحوظة</u>: إذا كانت $F(0,t)=0$ ، فإن: $f_s\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)=-n^2 f_s(n,t)$

<u>ثانياً</u>: <u>تحويل فورييه لجيب التمام</u>: من التعريف:

$$f_c\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)=\int_0^\infty\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)\cos nx\ dx=\int_0^\infty\frac{\partial F'}{\partial x}\cos nx\ dx \qquad \left| F'=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right.$$

$$=\left[F'\cdot\cos nx\right]_0^\infty+n\int_0^\infty F'\cdot\sin nx\ dx$$

$$=-F'(x,t)\big|_{x=0}+n\left[(-n f_c(n,t)\right]$$

وذلك بفرض أن $F'(x,t)\big|_{x=\infty}=0\ ,\ F(x,t)\big|_{x=\infty}=0$

$$\therefore f_c\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)=-n^2 f_c(n,t)-\frac{\partial F}{\partial x}\bigg|_{x=0} \qquad (2)$$

وهو المطلوب.

<u>ملحوظة من المثال رقم (2)</u>:

(1) يستخدم تحويل فورييه للجيب للمشتقة الثانية (المعادلة (1)) إذا كان معلوماً لدينا المقدار $F(0,t)$ أي قيمة الدالة $F(x,t)$ عند نقطة الأصل $x=0$.

(2) يستخدم تحويل فورييه لجيب التمام للمشتقة الثانية (المعادلة (2)) إذا كان معلوماً لدينا المشتقة الأولى للدالة أي $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x=0}$ عند نقطة الأصل $x=0$.

(3) تستخدم المعادلتين $(1),(2)$ في مثال (2) السابقة في حل مسائل القيم الحديــة (أي في حل المعادلات التفاضلية الجزئية مع وجود شروط حدية)، ويتضح ذلك من الأمثلة الآتية.

<u>مثال(1):</u> باستخدام تحويلات فورييه أوجد حلاً لمعادلة الانتشار الحراري:

(1) $u_{xx}=\frac{1}{k}u_t$ تحت الشروط الحدية:

$$(i)\ \ u(0,t)=u_0=const \tag{2}$$

$$(ii)\ u(x,0)=0 \tag{3}$$

حيث $u=u(x,t)$ هي درجة الحرارة عند أي نقطة x في أي زمن t.

<u>الحل:</u> حيث أن $u(0,t)$ معطاه في رأس المسألة كشرط فمن الأفــضل اســتخدام تحويل فورييه الجيبي للمعادلة المعطاه (أنظر الملاحظة بعد مثال(2) الــسابق). فنحصل على:

$$f_s(u_{xx})=\frac{1}{k}f_s(u_t)$$

$$\therefore \int_0^\infty u_{xx}\sin nx\,dx=\frac{1}{k}\int_0^\infty u_t\sin nx\,dx$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin nx\,dx=\frac{1}{k}\int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial t}\sin nx\,dx=\frac{1}{k}\frac{d}{dt}\int_0^\infty u\sin nx\,dx \tag{4}$$

وبالتعويض عن:

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin nx\,dx=f_s\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=-n^2 f_s(n,t)+n\,u(0,t)$$

$$\int_0^\infty u\sin nx\,dx=f_s(n,t)+f_s(u)$$

$$\therefore -n^2 f_s(n,t)+n\,u(0,t)=\frac{1}{k}\frac{d}{dt}f_s(n,t)$$

$$\therefore \frac{d}{dt}f_s(n,t)+kn^2 f_s(n,t)=knu(0,t)=knu_0=A \tag{5}$$

حيث استخدمنا الشرط(2): $u(0,t)=u_0=const$

ولحل المعادلة (5): حيث أن:

$$\frac{d}{dt}f_s(n,t)=-kn^2 f_s(n,t)+A$$

فبوضع $f_s=yz$

$$\therefore \frac{d}{dt}(yz)=-kn^2 yz+A$$

$$\therefore yz'+zy'=-kn^2 yz+A$$

$$\therefore yz'=A-z(y'+kn^2 y) \tag{6}$$

وباعتبار أن: $y'+kn^2 y=0$، فإن :

$$y'=-kn^2 y$$

$$\therefore \frac{y'}{y}=-kn^2 \rightarrow \ell n y=-kn^2 t \rightarrow y=e^{-kn^2 t} \tag{7}$$

وبالتعويض في (6):

$$e^{-kn^2 t}z'=A=knu_0$$

$$\therefore e^{-kn^2 t}\frac{dz}{dt}=knu_0 \rightarrow dz=\frac{1}{n}\int e^{kn^2 t}kn^2 u_0\, dt$$

$$\therefore z=\frac{1}{n}u_0 e^{kn^2 t}+B$$

حيث B ثابت التكامل، وبالضرب في $e^{-kn^2 t}$ فإن :

$$z\cdot e^{-kn^2 t}=\frac{u_0}{n}+Be^{-kn^2 t}$$

ولكن $f_s(n,t)=ze^{-kn^2 t}$، [حيث وضعنا $f_s=yz$، $y=e^{-kn^2 t}$]

$$\therefore f_s=\frac{u_0}{n}+Be^{-kn^2 t} \tag{8}$$

نطبق الشرط الثاني (المعادلة (3)): $u(x,0)=0$

$$f_s(n,0)=\int_0^\infty u(x,0)\sin nx\, dx=0$$

فبوضع $t=0$ في (8):

$$\therefore 0=\frac{u_0}{n}+Be^0=\frac{u_0}{n}+B \qquad \therefore B=-\frac{u_0}{n}$$

وبالتعويض في (8):

$$f_s=\frac{u_0}{n}-\frac{u_0}{n}e^{-kn^2t}=\frac{u_0}{n}\left[1-e^{-kn^2t}\right]$$

ولإيجاد $u(x,t)$ [الحل المطلوب للمعادلة (1)]: نستخدم التحويل العكسي:

$$u(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty u(n,t)\sin nx\, dn=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{u_0}{n}(1-e^{-kn^2t})\sin nx\, dn$$

$$=\frac{2u_0}{\pi}\int_0^\infty (1-e^{-kn^2t})\frac{\sin nx}{n}\, dn$$

ولكن: $\int_0^\infty \frac{\sin nx}{n}\, dn=\frac{\pi}{2}$

$$\therefore u(x,t)=\frac{2u_0}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\int_0^\infty (1-e^{-kn^2t})\ dn\right]=u_0\left[1-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty (1-e^{-kn^2t})\ dn\right]$$

وهو المطلوب.

مثال(2): باستخدام تحويلات فورييه حل المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1)$$

حيث $u=u(x,t)$ دالة محدودة، $x>0\,,t>0$ وذلك تحت الشروط الحدية:

$(i)\ \ u(0,t)=0$

$$(ii)\ u(x,0)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & x\geq 1\end{cases}$$

الحل: بأخذ تحويل فورييه الجيبي لكلا طرفي المعادلة (1):

$$\therefore \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial t}\sin nx\, dx=\int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin nx\, dx \qquad (2)$$

وبكتابة $\int_0^\infty u(x,t)\sin nx\,dx = u(n,t) = f_s(n,t)$

$$\therefore \frac{df_s}{dt} = \int_0^\infty \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\sin nx\,dx = \int_0^\infty \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\sin nx\,dx \qquad \text{(من (2))}$$

وبإجراء التكامل بالتجزئ نحصل على:

$$\frac{df_s}{dt} = \left[\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\sin nx\right]_0^\infty - n\underbrace{\int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos nx\,dx}_{f_c\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}$$

$$= 0 - n f_c\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -n\{n f_s(n,t) - u(0,t)\}$$

وذلك بفرض أن $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\infty} = 0$ واعتبار أن:

$$\int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial x}\cos nx\,dx = n f_s(n,t) - u(0,t)$$

$$\therefore \frac{df_s}{dt} = nu(0,t) - n^2 f_s(n,t) \tag{3}$$

والآن حيث أن: $f_s(n,t) = \int_0^\infty u(x,t)\sin nx\,dx$ ، فبوضع $t=0$

وتطبيق الشرط (ii):

$$\therefore f_s(n,0) = \int_0^\infty u(x,0)\sin nx\,dx$$

$$= \int_0^1 (1)\sin nx\,dx = \left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^1 = \frac{1-\cos n}{n} \tag{4}$$

وباستخدام الشرط (i) في العلاقة (3) نحصل على:

$$\frac{df_s}{dt} = -n^2 f_s \qquad \therefore \frac{df_s}{f_s} = -n^2\,dt$$

وبالتكامل فإن:

$$\ell n\, f_s = -n^2 t + \ell n A \qquad \therefore f_s = A e^{-n^2 t}$$

وفي البداية: عندما $t=0$ فإن [من (4)]:

$$f_s(n,0) = \frac{1-\cos n}{n}$$

$$\therefore \frac{1-\cos n}{n} = A e^0 = A \to A = \frac{1-\cos n}{n}$$

$$\therefore f_s(n,t) = \frac{1-\cos n}{n} e^{-n^2 t} = u(n,t) \tag{5}$$

ولإيجاد $u(x,t)$: نستخدم التحويل الجيبي العكسي لفورييه:

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty u(n,t)\sin nx\, dn$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{1-\cos n}{n}\right) e^{-n^2 t}\cdot \sin nx\, dn$$

وهو المطلوب.

مثال(3): باستخدام تحويلات فورييه المحدودة، أوجد الحل للمعادلة التفاضلية الجزئية:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{حيث} \quad 0 < x < \pi \text{،} \; t > 0 \tag{1}$$

وذلك تحت الشروط:

$(i)\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0$

$(ii)\ u(x,0) = 2x$

ما هو التفسير الفيزيائي لهذه المسألة.

الحل: بتطبيق تحويل فورييه الجيبي المحدود على كلا طرفي المعادلة (1) نحصل على:

$$\int_0^\pi \frac{\partial u}{\partial t}\sin nx\, dx = \int_0^\pi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin nx\, dx \tag{2}$$

وبكتابة $f_s = u(n,t) = \int_0^\pi u(x,t)\sin nx\, dx$ ، فإن:

$$\frac{df_s}{dt} = \int_0^\pi \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\sin nx\, dx = \int_0^\pi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin nx\, dx \qquad \text{(من (2))}$$

وبإجراء التكامل بالتجزئ واعتبار الشرط: $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$

$$\therefore \frac{df_s}{dt} = \left[\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\sin x\right]_0^\pi - n\int_0^\pi \frac{\partial u}{\partial x}\cos nx\, dx = 0 - n\int_0^\pi \frac{\partial u}{\partial x}\cos nx\, dx$$

$$= -n\left\{[u(x,t)\cdot\cos nx]_0^\pi - n\int_0^\pi u(x,t)\sin nx\, dx\right\}$$

$$= -n\,[0 - nu(n,t)] = -n^2 u(n,t) = -n^2 f_s$$

وحل تلك المعادلة هو: $f_s = u(n,t) = Ae^{-n^2 t}$

حيث A ثابت التكامل.

والآن: بوضع $t=0$ واستخدام الشرط $u(x,0) = 2x$

$$\therefore u(n,0) = \int_0^\pi u(x,0)\sin nx\, dx = 2\left[-x\frac{\cos nx}{n}\right]_0^\pi + \frac{2}{n}\int_0^\pi \cos nx\, dx$$

$$= -\frac{2\pi}{n}\cos n\pi + \frac{2}{n^2}[\sin nx]_0^\pi = -\frac{2\pi}{n}\cos n\pi$$

أي أنه عندما $t=0$ ، فإن

$$u(n,0) = f_s = -\frac{2\pi}{n}\cos n\pi = Ae^0 = A \to A = -\frac{2\pi}{n}\cos n\pi$$

$$\therefore u(n,t) = f_s(n,t) = -\frac{2\pi}{n}\cos n\pi e^{-n^2 t}$$

<u>ولإيجاد $u(x,t)$</u>: نستخدم علاقة تحويل فورييه الجيبي العكسي فنحصل على:

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2\pi}{n}\cos n\pi e^{-n^2 t}\right)\sin nx$$

وهو المطلوب.

التفسير الفيزيائي للمعادلـــة (1): المعادلة (1) تمثل معادلة انتشار حراري بمعامل انتشار $k=1$ والدالة $u=(x,t)$ تمثل درجة الحرارة عنـــد أي نقطـــة x فـــي اللحظة t على طول جسم صلب محدود بالنقطتين $x=0\,,x=\pi$.

أما الشروط الحدية $u(\pi,t)=0\ ,\ u(0,t)=0$ فإنها تعطي درجة الحرارة الصفرية عند الطرفين، بينما $u(x,0)=2x$ فتمثل درجة الحـــرارة الابتدائيـــة (عند $t=0$) كدالة في x.

مثال(4): باستخدام تحويلات فورييه أوجد حل معادلة الانتشار الحراري:

$$u_{xx}=\frac{1}{k}u_t \qquad (1)$$

تحت الشروط الحدية:

$$(i)\ \ u(x,0)=0 \qquad (2)$$

$$(ii)\ \ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=const.=-\sigma \qquad (3)$$

الحل: حيث أن المشتقة $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}$ عند نقطة الأصل معطاه كشرط فنستخدم تحويـــل فورييه لجيب التمام، وبأخذ تحويل فورييه لطرفي (1):

$$-n^2 f_c(n,t)-(\frac{\partial u}{\partial x})_{x=0}=\frac{1}{k}\frac{d}{dt}f_c(n,t)$$

وباستخدام الشرط (3):

$$-n^2 f_c+\sigma=\frac{1}{k}\frac{df_c}{dt}$$

$$\therefore \frac{df_c}{dt}+kn^2 f_c=k\sigma$$

وحل هذه المعادلة يعطي:

$$f_c(n,t)=\frac{\sigma}{n^2}+Ae^{-kn^2t} \qquad (4)$$

حيث A ثابت التكامل.

وباستخدام الشرط: $u(x,0)=0$، فـإن $u(n,0)=f_c(n,0)=0$، وبوضـع $t=0$ في (4):

$$\therefore 0=\frac{\sigma}{n^2}+A \;\rightarrow\; A=-\frac{\sigma}{n^2}$$

$$\therefore f_c(n,t)=u(n,t)=\frac{\sigma}{n^2}-\frac{\sigma}{n^2}e^{-kn^2t}=\frac{\sigma}{n^2}(1-e^{-kn^2t}) \qquad (5)$$

<u>ولإيجاد $u(x,t)$</u>: نستخدم التحويل العكسي لجيب التمام فنحصل على:

$$u(x,t)=\frac{2\sigma}{\pi}\int_0^\infty (1-e^{-kn^2t})\frac{\cos nx}{n}\,dn$$

<u>مثال(5):</u> باستخدام تحويل فورييه للمشتقة الثانية أوجد الحل لمعادلة لابلاس

$$F_{xx}+F_{yy}=0 \qquad (1)$$

في المنطقة $0<x<\pi$ تحت الشروط الحدية:

$(i)\; F=0$ (عند $x=0\,,\,x=\pi$)

$(ii)\; F=0$ (عند $y=0$)

$(iii)\; F=F_0=const.$ (عند $y=\pi$)

<u>الحل:</u> من الشرط الأول نجد أنه يجب استخدام تحويل فورييه الجيبي وصورته:

$$f(n)=\int_0^\pi F(x)\sin nx\,dx$$

وبتطبيق هذا التحويل على المعادلة (1):

$$\int_0^\pi F_{xx}\sin nx\,dx+\int_0^\pi F_{yy}\sin nx\,dx=0$$

وباستخدام الشرط: $f_s=0$ عند $y=0$

$$f_s=\int_0^\pi F_0\sin nx\,dx=F_0\int_0^\pi \sin nx\,dx$$ عند $y=\pi$

ومن العلاقة:

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)\sin nx\,dx=-n^2 f_s(n)$$

نحصل على:

$$-n^2 f_s+\frac{\partial^2 f_s}{\partial y^2}=0 \qquad (2)$$

حيث:

$$\frac{\partial^2 f_s}{\partial y^2}=\int_0^{\pi}\frac{\partial^2 f_s}{\partial y^2}\sin nx\,dx$$

الحل العام للمعادلة (2):

$$\frac{\partial^2 f_s}{\partial y^2}-n^2 f_s=0$$

يكتب بالصورة: $f_s=A\sinh ny$ ، ولكن $f_s=F_0\int_0^{\pi}\sin nx\,dx$ عند $y=0$ فإن:

$$f_s=F_0\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}=\begin{cases}0 & (n\ \text{زوجي})\\ -2\dfrac{F_0}{n} & (n\ \text{فردي})\end{cases}$$

وباعتبار هذين الحلين فإن:

$f_s=0$ (عندما n يكون عدد زوجي)

$f_s=\dfrac{2F_0}{n}\operatorname{cosech} n\pi \sinh ny$ (عندما n يكون عدد فردي)

حيث $A=\dfrac{1}{\cosh n\pi}=-\operatorname{cosech} n\pi$ (يعطي كمسألة).

ولإيجاد $F(x,y)$: نستخدم التحويل العكسي الجيبي بالصور:

$$F=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}f_s(n)\sin nx$$

$$\therefore F=\frac{4F_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{cosech} n\pi\sinh ny\cdot\sin nx$$

وهو المطلوب.

ملحوظة: تمثل هذه المسألة حل معادلة لابلاس في المستوى لصفيحة مستطيلة الشكل أبعدها x,y معرضة لتوزيع حراري مستقر (لا يتغير بتغير الزمن).

مسائل

(1) باستخدام تحويل فورييه أوجد الحل للمعادلة الموجية: $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$

لخيط مشدود مثبت عند طرفيه $x=0\,,x=\ell$، تحت الشروط الحدية:

$$F(x,y)=F_0(x),\ \left.\frac{\partial F}{\partial t}\right|_{t=0}=0$$

(2) باستخدام تحويل فورييه المحدود لجيب التمام أوجد الحل لمعادلـــة الانتــشار الحراري $\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ حيث k معامل الانتشار الحراري، $0<x<\pi,\ t>0$

وذلك تحت الشروط الحدية:

$(i)\ \frac{\partial u}{\partial x}=0$ (عند $x=0$ ، $t>0$)

$(ii)\ u=F(x)$ (عند $t=0$ ، $0<x<\pi$)

(3) باستخدام تحويلات فورييه لجيب التمام، أوجد الحل للمعادلة التفاضلية الجزئية

(1) $u_{xt}+\sin t=0\ ,\qquad t>0$ ، تحت الشرطين:

(2) $u(x,0)=x$

(3) $u(0,t)=0$

<u>حل المسألة رقم (3):</u> بأخذ تحويلات فورييه لجيب التمام لطرفي المعادلة (1):

$$f_c(u_{xt})+f_c(\sin t)=0$$

$$\therefore f_c(u_{xt})=-f_c(\sin t) \qquad (4)$$

ولكن:

$$f_c(u_{xt})=f_c(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t})=f_c\left[\frac{d}{dx}(\frac{\partial u}{\partial t})\right]=f_c\left\{\frac{d}{dx}[n f_s(n,x)-u(x,0)]\right\}$$

أيضاً:

$$f_c(\sin t)=\int_0^{\infty}\sin t\cos nx\,dx=\frac{1}{1+n^2}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}[n f_s(n,x)-u(x,0)]=-\frac{1}{1+n^2}\rightarrow \frac{d}{dx}[n f_s-x]=-\frac{1}{1+n^2}$$

حيث $u(x,0)=x$، وبإجراء التفاضل نجد أن:

$$n\frac{d f_s}{dx}-1=-\frac{1}{1+n^2}\rightarrow n\frac{d f_s}{dx}=1-\frac{1}{1+n^2}=\frac{n^2}{1+n^2}$$

$$\frac{d f_s}{dx}=\frac{1}{1+n^2}\rightarrow df_s=\frac{n\,dx}{1+n^2}$$

فبوضع $x=0$ نحصل على $A=0$ ← $f_s(n,x)=u(n,x)=\dfrac{nx}{1+n^2}$

<u>ولإيجاد $u=(x,t)$</u>: نأخذ التحويل العكسي فنحصل على:

$$u(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}u(n,x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{nx}{1+n^2}\sin nx\,dx$$

وهو المطلوب.