الباب الرابع

متسلسلات فوريه Fourier series

تمهيد:

1- الدالة الدورية (Periodic Function):

يقال أن الدالة $f(x)$ هي دالة دورية ولها الدورة (period) T إذا كان: $f(x+T)=f(x)$ لجميع قيم x حيث T مقدار موجب $(T>0)$

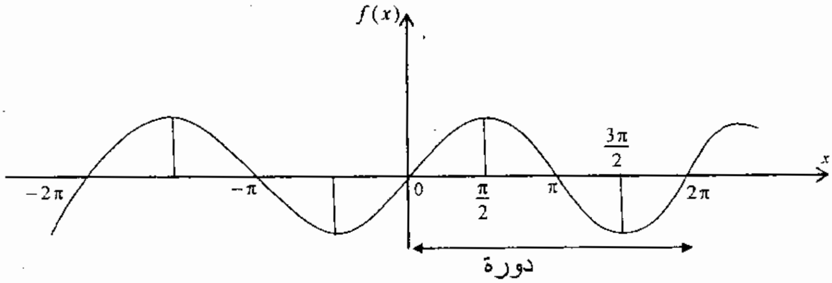
ومثال ذلك:

الدالة $f(x)=\sin x$ ودورتها $= 2\pi$

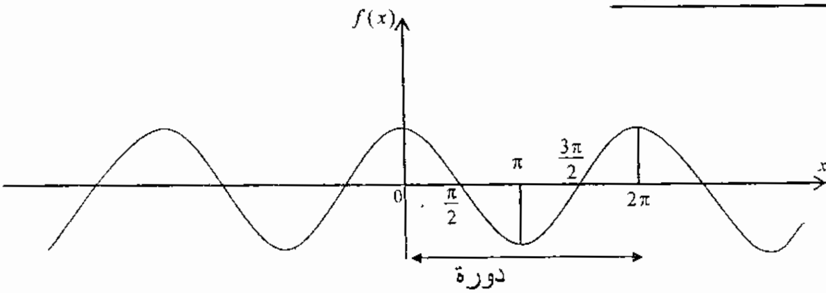
الدالة $f(x)=\cos x$ ودورتها $= 2\pi$

الدالة $f(x)=\tan x$ ودورتها $= \pi$، وهكذا

منحنى الدالة $f(x)=\sin x$



منحنى الدالة $f(x)=\cos x$



ملاحظات:

(i) إذا كانت $f(x)$ دالة دورية لها الدورة T فإن:

$$(1)\ \int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$$

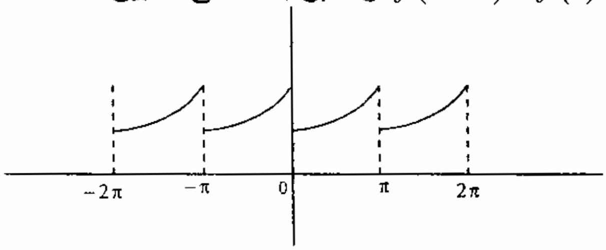
$$(2)\ \int_{-T}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{T} f(x)dx = \int_{T}^{2T} f(x)dx$$

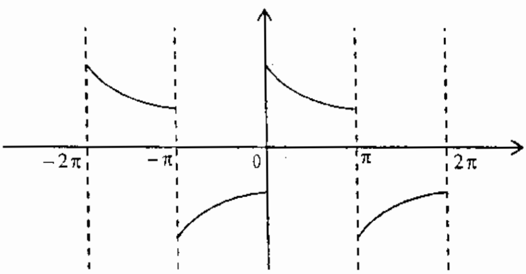
(ii) توجد أربعة أنواع من الدوال الدورية بحيث يمكن التمييز بينها بمجرد النظر إلى منحنياتها، وهذه الأنواع هي:

1) **الدالة الزوجية (even function):** هي دالة دورية لها الدورة (2π) ولها الخاصية $f(x)=f(-x)$ ومثال لها: الدالة $f(x)=\cos x$، وتتميز أيضا بالخاصية $f(\pi+x)=f(\pi-x)$.

2) **الدالة الفردية (odd function):** وهي دالة دورية لها الدورة (2π) ولها الخاصية $f(x)=-f(-x)$ ومثال لها: الدالة $f(x)=\sin x$، وتتميز أيضا بالخاصية $f(\pi+x)=-f(\pi-x)$.

3) **الدالة التوافقية الزوجية (even harmonic function):** وهي دالة دورية لها الخاصية $f(\pi+x)=f(x)$ وتتميز بالمنحنى المبين:





4) **الدالة التوافقية الفردية (odd harmonic function):** وهي دالة دورية لها الخاصية $f(\pi+x)=-f(x)$ وتتميز بالمنحنى المبين:

(iii) هناك تكاملات محدودة هامة نحتاج إليها عند دراستنا لمتسلسلات فورييـــه، ويمكن إجمالها فيما يلي:

1) **من تعريف التكامل المحدود:**

$$1)\quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(n)dn$$

$$2)\quad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$3)\quad \int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0 & (f \text{ دالة فردية}) \\ 2\displaystyle\int_0^a f(x)dx & (f \text{ دالة زوجية}) \end{cases}$$

مع ملاحظة أن حاصل ضرب دالة فردية × دالة زوجية = دالة فردية

حاصل ضرب دالة فردية × دالة فردية = دالة زوجية

حاصل ضرب دالة زوجية × دالة زوجية = دالة زوجية

2) **تكامل مربع الجيب وجيب التمام:**

$$1.\quad \int_a^b \sin^2 nx\,dx = \frac{1}{2n}\left[nx - \frac{\sin 2nx}{2}\right]_a^b$$

$$2.\quad \int_a^b \cos^2 nx\,dx = \frac{1}{2n}\left[nx + \frac{\sin 2nx}{2}\right]_a^b$$

3) **التكاملات الآتية يمكن إيجادها بطريقة التكامل بالتجزيء:**

$$1.\quad \int_a^b x\cdot\sin nx\,dx = \left[\frac{-x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right]_a^b$$

$$2.\quad \int_a^b x\cdot\cos nx\,dx = \left[\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_a^b$$

$$3.\quad \int_a^b x^2\cdot\sin nx\,dx = \left[\frac{-x^2\cos nx}{n} + \frac{2x\sin nx}{n^2} + \frac{2\cos nx}{n^3}\right]_a^b$$

4. $\int_a^b x^2 \cdot \cos nx dx = \left[\frac{x^2 \sin nx}{n} + \frac{2x \cos nx}{n^2} - \frac{2 \sin nx}{n^3} \right]_a^b$

4) تكاملات في الفترة المحدودة $-\pi \le x \le \pi$:

1. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0$, n عدد صحيح موجب

2. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi$

3. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ \pi & (n = m) \end{cases}$

4. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = 0 \quad (n, m = 1, 2, 3, \ldots)$

5) هناك تكاملان هامين نحتاج إليهما عند دراستنا لمتسلسلة فوريية هما:

1. $\int_a^b e^{\alpha x} \cos \beta x dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2} [\alpha \cos \beta x + \beta \sin \beta x] \Big|_a^b$

2. $\int_a^b e^{\alpha x} \sin \beta x dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2} [\alpha \sin \beta x - \beta \cos \beta x] \Big|_a^b$

أمثلة محلولة :

مثال (1): أثبت أن

$$\int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx=\int_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx=0$$

الحل:

$$\int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx=\frac{\sin\frac{n\pi x}{\ell}}{\frac{n\pi}{\ell}}\Big|_{-\ell}^{\ell}=\frac{\ell}{n\pi}[\sin n\pi-\sin(-n\pi)]$$

$$=\frac{\ell}{n\pi}[\sin n\pi+\sin n\pi]=\frac{2\ell}{n\pi}\sin n\pi=0$$

حيث: $\sin(-n\pi)=-\sin(n\pi)$ ، $\sin n\pi=0$

وبالمثل يمكن إثبات أن $\int_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx=0$ حيث :

$$\int_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx=\left.\frac{-\cos\frac{n\pi x}{\ell}}{\frac{n\pi}{\ell}}\right|_{-\ell}^{\ell}=\frac{-\ell}{n\pi}[\cos n\pi-\cos(-n\pi)]$$

$$=\frac{-\ell}{n\pi}[\cos n\pi-\cos n\pi]=0$$

مثال (2): أثبت التكاملات المحدودة التالية:

1. $$\int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{n\pi x}{\ell}\cos\frac{m\pi x}{\ell}dx=\int_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\sin\frac{m\pi x}{\ell}dx=\begin{cases}0 & (n\neq m)\\ \ell & (n=m)\end{cases}$$
2. $$\int_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\cos\frac{m\pi x}{\ell}dx=0$$

حيث n,m تأخذ القيم $1,2,3,\ldots$

<u>الحل:</u> باستخدام العلاقات المثلثية:

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b)+\cos(a+b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a-b)+\sin(a+b)]$$

<u>المطلوب الأول:</u>

$$\int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{n\pi}{\ell}x\cos\frac{m\pi x}{\ell}dx=\frac{1}{2}\int_{-\ell}^{\ell}\left[\cos\frac{(n-m)\pi x}{\ell}+\cos\frac{(n+m)\pi x}{\ell}\right]dx$$

حيث $n \neq m$ ، وباستخدام مثال (1):

$$\therefore \int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{n\pi x}{\ell}\cos\frac{m\pi x}{\ell}dx=\frac{1}{2}[0+0]=0 \qquad (1)$$

وفي حالة $n = m$ نحصل على :

$$\therefore \int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{m\pi x}{\ell}\cos\frac{m\pi x}{\ell}dx=\frac{1}{2}\int_{-\ell}^{\ell}\left[\cos 0+\cos\frac{2m\pi x}{\ell}\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\ell}^{\ell}[1+0]dx=\frac{1}{2}\int_{-\ell}^{\ell}dx=\frac{1}{2}[x]_{-\ell}^{\ell}=\frac{1}{2}[2\ell]=\ell \quad (2)$$

أيضا فإن:

$$\int_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\sin\frac{m\pi x}{\ell}dx=\frac{1}{2}\int_{-\ell}^{\ell}\left[\cos\frac{(n-m)\pi x}{\ell}-\cos\frac{(n+m)\pi x}{\ell}\right]dx$$

حيث $n \neq m$ ، وباستخدام مثال (1):

$$\therefore \int_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\sin\frac{m\pi x}{\ell}dx=0 \qquad (3)$$

وفي حالة $n=m$:

$$\int_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{m\pi x}{\ell}\sin\frac{m\pi x}{\ell}dx=\frac{1}{2}\int_{-\ell}^{\ell}\left[\cos 0-\cos\frac{2m\pi x}{\ell}\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\ell}^{\ell}[1-0]dx=\frac{1}{2}\int_{-\ell}^{\ell}dx=\frac{1}{2}[x]_{-\ell}^{\ell}=\frac{1}{2}[2\ell]=\ell \quad (4)$$

<u>المطلوب الثاني:</u>

$$\int_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\cos\frac{m\pi x}{\ell}dx=\frac{1}{2}\int_{-\ell}^{\ell}\left[\sin\frac{(n-m)\pi x}{\ell}+\sin\frac{(n+m)\pi x}{\ell}\right]dx$$

حيث $n\neq m$ وباستخدام مثال (1):

$$\therefore \int_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\cos\frac{m\pi x}{\ell}dx=0 \qquad (5)$$

وفي حالة $n=m$:

$$\int_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\cos\frac{m\pi x}{\ell}dx=\frac{1}{2}\int_{-\ell}^{\ell}\left[\sin 0+\sin\frac{2m\pi x}{\ell}\right]dx=\frac{1}{2}\int_{-\ell}^{\ell}[0+0]dx=0 \quad (6)$$

وهو المطلوب.

<u>مثال (3):</u> أثبت العلاقتين التكامليتين الآتيتين:

$$I_1=\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx) \qquad (1)$$

$$I_2=\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx) \qquad (2)$$

<u>الحل:</u> لإيجاد I_1: نستخدم طريقة التكامل بالتجزيء وذلك بوضع:

$$dv=e^{ax}dx \quad , \quad u=\cos bx$$

$$v=\frac{1}{a}e^{ax} \quad , \quad du=-b\sin bx\,dx$$

$$\therefore I_1=\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}I_2 \quad (3)$$

ولإيجاد I_2: نضع:

$$dv = e^{ax}dx \quad , \quad u = \sin bx$$

$$v = \frac{1}{a}e^{ax} \ , \quad du = b\cos bx dx$$

$$\therefore I_2 = \int e^{ax} \sin bx dx = \frac{1}{a}e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax} \cos bx dx$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a}I_1 \qquad (4)$$

وبالتعويض عن I_1 من (4) في (3) نحصل على:

$$I_1 = \frac{1}{a}e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a}\left[\frac{1}{a}e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a}I_1\right]$$

$$\therefore I_1\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) = \frac{e^{ax}}{a}\left[\cos bx + \frac{b}{a}\sin bx\right]$$

$$\therefore I_1 = \frac{e^{ax}}{a\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)}\left[\cos bx + \frac{b}{a}\sin bx\right] = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}\left[a\cos bx + b\sin bx\right] \qquad (5)$$

وهي العلاقة الأولى.

وبالتعويض عن I_1 من (5) في (4) نحصل على:

$$I_2 = \frac{1}{a}e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a}\left[\frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a\cos bx + b\sin bx)\right]$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax} \sin bx - \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}\left(b\cos bx + \frac{b^2}{a}\sin bx\right)$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\left(1 - \frac{b^2}{a^2 + b^2}\right)\sin bx - \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(b\cos bx)$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\left(\frac{a^2}{a^2 + b^2}\right)\sin bx - \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(b\cos bx)$$

$$= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}\left[a\sin bx - b\cos bx\right] \qquad (6)$$

وهي العلاقة الثانية.

<u>تعريف متسلسلة فورييه:</u> تعبر متسلسلة فورييه عن الدالة الدورية المعرفة في فترة معينة إما $(-\pi,\pi)$ أو $(0,2\pi)$ ودورتها 2π، وهي عبارة عن علاقة خطية بين جيوب وجيوب تمام لمضاعفات x وصورتها:

$$f(x)=A+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos nx+b_n\sin nx\right] \tag{1}$$

حيث المعاملات A,a_n,b_n تعرف بمعاملات فورييه، وتعطى بالعلاقات الآتية، وذلك للدالة $f(x)$ المعرفة في الفترة $(-\pi,\pi)$ ذات الدورة 2π:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx \tag{2}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx \tag{3}$$

$$A=\frac{a_0}{2}\ ,\ \ a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx \tag{4}$$

وفي الحالة العامة: فإن صورة متسلسلة فورييه للدالة $f(x)$ المعرفة في الفترة $(-\ell,\ell)$ ذات الدورة 2ℓ هي:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right] \tag{5}$$

حيث معاملات فورييه هنا تأخذ الصور الآتية:

$$a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx \tag{6}$$

$$b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx \tag{7}$$

$$a_0=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)dx \tag{8}$$

ويلاحظ أن العلاقات (1)، (2)، (3)، (4) يمكن الحصول عليها من (5)، (6)، (7)، (8) بوضع $\ell=\pi$، كما أن العلاقة (8) يمكن الحصول عليها من (6) بوضع $n=0$ حيث: $\cos 0=1$.

أمثلة محلولة:

مثال (1): في متسلسلة فورييه للدالة $f(x)$ المتقاربة في الفترة $(-\ell,\ell)$ ولها الدورة 2ℓ وصورتها:

$$f(x)=A+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right]$$

أثبت أن معاملات فورييه تعطى بالعلاقات الآتية:

$$a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx$$

$$b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx$$

$$a_0=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)dx \quad , \quad A=\frac{a_0}{2}$$

الحل: حيث أن:

$$f(x)=A+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right] \tag{1}$$

فبالضرب في $\cos\frac{m\pi x}{\ell}$ والتكامل من $(-\ell)$ إلى (ℓ) نحصل على:

$$\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{m\pi x}{\ell}dx=\int_{-\ell}^{\ell}\left[A+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)\right]\cos\frac{m\pi x}{\ell}dx$$

$$=A\int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{m\pi x}{\ell}dx+\sum\left[a_n\int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{n\pi x}{\ell}\cos\frac{m\pi x}{\ell}dx+b_n\int_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\cos\frac{m\pi x}{\ell}dx\right] \tag{2}$$

ولكن:

$$\int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{m\pi x}{\ell}dx=0 \tag{3}$$

$$\int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{n\pi x}{\ell}\cos\frac{m\pi x}{\ell}dx=\begin{cases}0 & n\neq m\\ \ell & n=m\end{cases} \tag{4}$$

$$\int_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\cos\frac{m\pi x}{\ell}dx=0 \tag{5}$$

[مثال سابق]

فبالتعويض في (2):

$$\therefore \int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{m\pi x}{\ell}dx = 0 + a_m\ell + 0 = a_m\ell$$

$$\therefore a_m = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{m\pi x}{\ell}dx$$

وبوضع $m = n$ نحصل على نفس الصيغة:

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx \qquad (6)$$

وبوضع $n = 0$:

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx \qquad (7)$$

أيضاً: بضرب (1) في $\sin\frac{m\pi x}{\ell}$ والتكامل من $(-\ell)$ إلى (ℓ) نحصل على:

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{m\pi x}{\ell}dx = \int_{-\ell}^{\ell}\left[A + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l})\right]\sin\frac{m\pi x}{\ell}dx$$

$$= A\int_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{m\pi x}{\ell}dx + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}dx + b_n\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}dx\,] \qquad (8)$$

وباستخدام النتائج :

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}dx = 0 \qquad (9)$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\sin\frac{m\pi x}{\ell}dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ l & n = m \end{cases} \qquad (10)$$

[مثال سابق]

مع العلاقة (5)تؤول (8) إلى :

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{m\pi x}{\ell}dx = 0 + 0 + b_m l = b_m l$$

$$\therefore b_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx$$

وبوضع $m=n$ نحصل على نفس الصيغة :

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad (11)$$

ولإيجاد A : بتكامل (1) بالنسبة إلى x من $(-l)$ إلى (l) نحصل على :

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{-l}^{l}\left[A + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l})\right]dx$$

$$= A\int_{-l}^{l} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad (12)$$

وباستخدام (3),(9) تؤول (12) إلى :

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = A\int_{-l}^{l} dx + 0 + 0 = A\int_{-l}^{l} dx = A[x]_{-l}^{l} = A[2l] = 2lA$$

$$\therefore A = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)dx \qquad (13)$$

ومن (7) : $a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$ تصبح (13) :

$$A = \frac{a_0}{2}$$

وهو المطلوب.

مثال (2): في متسلسلة فورييه للدالة $f(x)$ المتقاربة في الفتـــرة $(-\pi \text{ و } \pi)$ ولهـــا الدورة (2π) وصورتها:

$$f(x) = A + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx + b_n\sin nx]$$

أثبت أن معاملات فورييه تعطي بالعلاقات الآتية:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \quad , \quad A = \frac{a_0}{2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx \quad , \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx$$

<u>الحل:</u> حيث أن:

$$f(x) = A + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (1)$$

فبتكامل (1) بالنسبة إلى x من $-\pi$ إلى π نحصل على:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}[A + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)]dx$$

$$= A\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx \qquad (2)$$

ولكن:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx = \int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx = 0 \qquad (3)$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = A\int_{-\pi}^{\pi} dx = A[x]_{-\pi}^{\pi} = A(2\pi)$$

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad (4)$$

<u>ولتعيين a_n</u>: بضرب طرفي (1)في $\cos nx$ والتكامل من $-\pi$ إلى π نحصل على:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[A + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right]\cos nxdx$$

$$= A\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos nxdx$$

$$= A(0) + a_n[\pi] + b_n[0] = a_n\pi$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \qquad (5)$$

<u>**ولتعيين b_n**</u>: بضرب طرفي (1)في $\sin nx$ والتكامل من $-\pi$ إلى π نحصل على:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \int_{-\pi}^{\pi}[A+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)]\sin nx dx$$

$$= A\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \sin nx dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx dx$$

$$= A(0) + a_n(0) + b_n[\pi] = b_n\pi$$

$$\therefore b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \qquad (6)$$

ومن (5) بوضع $n=0$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(0)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad (7)$$

ومن (7),(4)نجد أن:

$$A = \frac{a_0}{2} \qquad (8)$$

المعادلات (8),(7),(6),(5) هي العلاقات المطلوبة.

<u>**متسلسلة فورييه المناظرة للدالة الفردية:**</u>

<u>**نظرية:**</u> متسلسلة فورييه المناظرة للدالة الفردية تكون محتوية على حـدود الجيـب فقط، أي أن

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

<u>**الإثبات:**</u> حيث أن الدالة $f(x)$ فردية فإن: $f(-x) = -f(x)$ ويكون:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0 \qquad (1)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = 0 \qquad (2)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx \qquad (3)$$

وباستخدام مفكوك فورييه للدالة $f(x)$ في الفترة $(-\pi,\pi)$ بعد التعويض عن قيم a_0,a_n,b_n

$$\therefore f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos nx\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx+\sin nx\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx\right] \quad (4)$$

وبالتعويض من $(1),(2),(3)$ في (4) نحصل على:

$$f(x)=0+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[0+\sin nx\left(2\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nxdx\right)\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sin nx\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nxdx\right] \quad (5)$$

وبوضع:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nxdx$$

تؤول العلاقة (5) إلى:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx \quad (6)$$

أي أن مفكوك فورييه للدالة الفردية تظهر فيه حدود الجيب فقط وهو المطلوب.

<u>متسلسلة فورييه المناظرة للدالة الزوجية:</u>

<u>نظرية:</u> متسلسلة فورييه المناظرة للدالة الزوجية تكون محتوية على حدود جيب التمام فقط مع وجود ثابت، أي أن:

$$f(x)=A+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

<u>الإثبات:</u> حيث أن الدالة $f(x)$ زوجية فإن $f(-x)=f(x)$، ويكون:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=2\int_{0}^{\pi}f(x)dx \quad (1)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=0 \quad (2)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=2\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nxdx \quad (3)$$

وباستخدام مفكوك فورييه للدالة $f(x)$ في الفترة $(-\pi,\pi)$ بعد التعويض عن قيم a_0, a_n, b_n

$$\therefore f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos nx\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx+\sin nx\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx\right] \quad (4)$$

وبالتعويض من $(1),(2),(3)$ في (4) نحصل على:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)dx+\frac{2}{\pi}\sum\left[\cos nx\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\right] \qquad (5)$$

وبوضع:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx dx$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)dx \qquad ، A=\frac{a_0}{2}$$

فإن العلاقة (5) تؤول إلى :

$$f(x)=A+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx \qquad (6)$$

أي أن مفكوك فورييه للدالة الزوجية تظهر فيه حدود جيب التمام فقط مع وجــود ثابت (A). وهو المطلوب.

<u>أمثلة محلولة:</u>

<u>مثال (1):</u> بين أنه في حالة إذا كانت الدالة $f(x)$ هي دالـــة زوجيـــة فـــي الفتـــرة $(-\ell,\ell)$، فإن حدود الجيب تختفي في مفكوك فورييه للدالة $f(x)$.

<u>الحل:</u> الصورة العامة لمفكوك فورييه للدالة $f(x)$ في الفترة $(-\ell,\ell)$ هي:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right) \qquad (1)$$

وبوضع $(-x)$ مكان (x):

$$f(-x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}-b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right) \qquad (2)$$

حيث $\sin(-x)=-\sin x$ ، $\cos(-x)=\cos x$. وإذا كانت $f(x)$ دالة زوجية فإن: $f(x)=f(-x)$ فبمساواة (1)، (2) نحصل على:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}-b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

$$\therefore 2\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}=0$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}=0\rightarrow b_n=0$$

وهذا يعني اختفاء حدود الجيب في مفكوك فورييه للدالة الزوجية $f(x)$ ويصبح مفكوك فورييه في هذه الحالة (من (1)) بالصورة الآتية :

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}$$

مثال (2): أوجد متسلسلة جيب التمام لفورييه للدالة $f(x)$ في الفترة $0\le x\le\pi$

الحل: حيث أن مفكوك فورييه في صورة جيب التمام يمكن الحصول عليه من دالة زوجية فان:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx \qquad (1)$$

لإيجاد a_0 : بتكامل طرفي (1) من 0 إلى π نحصل على:

$$\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{a_0}{2}\int_0^{\pi}dx+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_0^{\pi}\cos nx dx \qquad ،\left(\int_0^{\pi}\cos nx dx=0\right)$$

$$=\frac{a_0}{2}[x]_0^{\pi}=\frac{a_0\pi}{2}$$

$$\therefore a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx \qquad (2)$$

لإيجاد a_n: بضرب طرفي العلاقة (1) في $\cos nx$ و التكامل من $0 \to \pi$

$$\therefore \int_0^\pi f(x)\cos nx dx = \frac{a_0}{2}\int_0^\pi \cos nx dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^\pi \cos^2 nx dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\pi \frac{a_n}{2}(1+\cos 2nx)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}\left[\int_0^\pi dx + \int_0^\pi \cos 2nx dx\right]$$

$$= \frac{a_n}{2}[x]_0^\pi = \frac{a_n \pi}{2}$$

$$\therefore a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx dx \qquad (3)$$

بالتعويض من (2)، (3) في (1) نحصل على المتسلسلة المطلوبة:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos nx \int_0^\pi f(x)\cos nx dx\right]$$

<u>مثال (3):</u> أوجد مفكوك فورييه للدالة الدورية $f(x)=|x|$ في الحالتين:

(أ) في الفترة $-\pi \le x \le \pi$ حيث الدورة= 2π.

(ب) في الفترة $-\ell \le x \le \ell$ حيث الدورة= 2ℓ.

<u>الحل</u>: <u>الجزء الأول (أ):</u> من التعريف:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & 0 \le x \le \pi \\ -x & -\pi \le x \le 0 \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^\pi = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^\pi$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos n\pi}{n^2}-\frac{1}{n^2}\right]=\frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n-1\right]=\begin{cases}0 & if \quad n\ even\\ \frac{-4}{\pi n^2} & if \quad n\ odd\end{cases}$$

وحيث أن $f(x)$ دالة زوجية ، $\sin nx$ دالة فردية، فإن:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx=0$$

ويمكن إثبات ذلك كما يلي:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)\sin nx dx+\int_{0}^{\pi}(x)\sin nx dx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\left(\frac{-x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{0}+\left(\frac{-x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right)\Bigg|_{0}^{\pi}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\left(\frac{-\pi\cos n\pi}{n}\right)+\left(\frac{-\pi\cos n\pi}{n}\right)\right]=0$$

وتصبح متسلسلة فوريه المطلوبة بالصورة:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum a_n\cos nx=\frac{\pi}{2}+\left(\frac{-4}{\pi(1)^2}\right)\cos x+\left(\frac{-4}{\pi(3^2)}\right)\cos 3x+\cdots$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots\right]$$

<u>الجزء الثاني (ب):</u> (حيث $f(x)$ دالة زوجية)

$$a_0=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)dx=\frac{2}{\ell}\int_{0}^{\ell}xdx=\frac{2}{\ell}\left[\frac{\ell^2}{2}\right]=\ell$$

وحيث أن $f(x)$ زوجية، $\cos\frac{n\pi}{\ell}x$ زوجية فإن:

$$a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}xdx=\frac{2}{\ell}\int_{0}^{\ell}x\cos\frac{n\pi}{\ell}xdx$$

$$=\frac{2}{\ell}\left[\frac{\ell x\sin\frac{n\pi}{\ell}x}{\frac{n\pi}{\ell}}+\frac{\ell^2\cos\frac{n\pi}{\ell}x}{\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}}\right]_0^{\ell}=2\left[\frac{x\sin\frac{n\pi}{\ell}x}{n\pi}+\frac{\ell\cos\frac{n\pi x}{\ell}}{n^2\pi^2}\right]_0^{\ell}$$

$$=\frac{2\ell}{n^2\pi^2}\left[\cos n\pi-1\right]=\frac{2\ell}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n-1\right]=\begin{cases}0 & ,\ n\ even\\ \dfrac{-4}{n^2\pi^2} & ,\ n\ odd\end{cases}$$

وحيث أن $f(x)$ زوجية ، $\sin\frac{n\pi}{l}x$ فردية فإن:

$$b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx=0$$

وبذلك نحصل على متسلسلة فوريية المطلوبة بالصورة :

$$\therefore f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum a_n\cos\frac{n\pi}{\ell}x=\frac{\ell}{2}+\frac{(-4\ell)}{\pi^2}\left[\frac{\cos\frac{\pi}{\ell}x}{1^2}+\frac{\cos\frac{3\pi}{\ell}x}{3^2}+\cdots\right]$$

$$=\frac{\ell}{2}-\frac{4\ell}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{2n-1}{\ell}\right)\pi x}{(2n-1)^2}$$

ملحوظة: مفكوك فوريية للدالة السابقة في الفترة $(-1,1)$ يكون بالصورة:

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)\pi x$$

مثال (4):

(أ) أوجد مفكوك فوريية للدالة $f(x)=\sin x$ وذلك في صورة متسلسلة جيب التمام حيث $0\le x\le\pi$.

(ب) أوجد مفكوك الجيب وجيب التمام لفوريية للدالة $f(x)=e^x$ في الفترة $-\ell\le x\le\ell$.

الحل: الجزء (أ): حيث أن المفكوك المطلوب في صورة جيب التمام، فإن:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx \qquad (1)$$

لإيجاد a_0:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x dx=\frac{2}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}(2)=\frac{4}{\pi} \qquad (2)$$

لإيجاد a_n:

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\sin(1+n)x+\sin(1-n)x]dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(1+n)x}{(1+n)}\Big|_0^{\pi}-\frac{\cos(1-n)x}{(1-n)}\Big|_0^{\pi}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(1+n)\pi-1}{1+n}+\frac{\cos(n-1)\pi-1}{n-1}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{-\cos n\pi-1}{1+n}+\frac{-\cos n\pi-1}{n-1}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1+\cos n\pi}{n+1}-\frac{1+\cos n\pi}{n-1}\right]=\frac{1}{\pi}\left[\frac{-2(1+\cos n\pi)}{n^2-1}\right]=\frac{-2}{\pi}\frac{(1+\cos n\pi)}{n^2-1}$$

عندما $n=1$:

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos x dx=\frac{2}{\pi}\frac{\sin^2 x}{2}\Big|_0^{\pi}=0$$

وبذلك تصبح متسلسلة فورييه بالصورة:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(1+\cos n\pi)}{n^2-1}\cos nx$$

الجزء (ب):

$$a_0=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)dx=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}e^x dx=\frac{1}{\ell}\left[e^x\right]_{-\ell}^{\ell}=\frac{1}{\ell}\left[e^{\ell}-e^{-\ell}\right]=\frac{2}{\ell}\sinh\ell$$

حيث: $\sinh\ell=\frac{1}{2}\left(e^{\ell}-e^{-\ell}\right)$

$$a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}e^x\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx=\frac{1}{\ell}\left[\frac{e^x\left(\cos\frac{n\pi}{\ell}x+\frac{n\pi}{\ell}\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right)}{1+\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}}\right]_{-\ell}^{\ell}$$

$$=\frac{\ell}{\ell^2+n^2\pi^2}\left[e^x\cos\frac{n\pi}{\ell}x\right]_{-\ell}^{\ell}=\frac{\ell}{\ell^2+n^2\pi^2}\left[e^{\ell}\cos n\pi-e^{-\ell}\cos n\pi\right]$$

$$=\frac{\ell}{\ell^2+n^2\pi^2}(-1)^n(2\sinh\ell)=\frac{2(-1)^n\ell}{\ell^2+n^2\pi^2}\sinh\ell$$

$$b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}e^x\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx=\frac{1}{\ell}\left[\frac{e^x\left(\sin\frac{n\pi}{\ell}x-\frac{n\pi}{\ell}\cos\frac{n\pi}{\ell}x\right)}{1+\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}}\right]_{-\ell}^{\ell}$$

$$=\frac{\ell\left(\frac{-n\pi}{\ell}\right)}{\ell^2+n^2\pi^2}\left[e^x\cos\frac{n\pi}{\ell}\right]_{-\ell}^{\ell}=\frac{-n\pi}{\ell^2+n^2\pi^2}\left[e^{\ell}\cos n\pi-e^{-\ell}\cos n\pi\right]$$

$$=\frac{-n\pi}{\ell^2+n^2\pi^2}(-1)^n(2\sinh\ell)=\frac{2(-1)^{n+1}\pi}{\ell^2+n^2\pi^2}\sinh\ell$$

وتصبح متسلسلة فوريه بالصورة:

$$f(x)=e^x=\frac{\sinh\ell}{\ell}+2\ell\sinh\ell\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ell^2+n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{\ell}x$$
$$+2\pi\sinh\ell\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^{n+1}}{\ell^2+n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{\ell}x$$

<u>مثال(5):</u>

(أ) أوجد متسلسلة فوريه للدالة الدورية $f(x)=x$ ذات الدورة 2π وذلك في الفترة $-\pi\le x\le\pi$

(ب) أوجد متسلسلة فوريه للدالة $f(x)=|\sin x|$ في الفترة $-\pi\le x\le\pi$

الحل: الجـزء الأول (أ): الدالة $f(x)$ هي دالة فردية في الفترة $(-\pi,\pi)$

ومتسلسلة فوريه لها تكون بالصورة:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \qquad (1)$$

حيث $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$

وذلك لأن:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xdx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi}=0$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos n\pi}{n^2}-\frac{\cos n\pi}{n^2}\right]=0$$

ولحساب المعاملات b_n:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{-x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\left[\frac{-\pi\cos n\pi}{n}\right]$$

$$=\frac{-2}{n}\cos n\pi=\frac{-2}{n}(-1)^n=\frac{2}{n}(-1)(-1)^n=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

$$\therefore f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nx=\frac{2}{1}\sin x-\frac{2}{2}\sin 2x+\frac{2}{3}\sin 3x-\dots$$

$$=2\left[\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\cdots\right]$$

وهو المطلوب.

الجزء الثاني (ب): الدالة $|\sin x|$ دالة زوجية ودورية ودورتها $= 2\pi$ وحدود التكامل من $(-\pi)$ إلى $(+\pi)$

∴ المعاملات b_n تتلاشى لأن الدالة زوجية بينما المعاملات a_n تكون موجـــودة حيث:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-\sin x)\cos nx dx + \int_{0}^{\pi}(\sin x)\cos nx dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[0 + \left(-2\frac{\cos n\pi + 1}{n^2 - 1}\right)\right] = -\frac{2}{\pi}\frac{\cos n\pi + 1}{n^2 - 1}$$

$$= \begin{cases} 0 & , \quad n \ \ odd \\ \dfrac{-4}{\pi}\left(\dfrac{1}{n^2} - 1\right) & , \quad n \ \ even \end{cases}$$

[حيث: $\cos n\pi = 1$ (في حالة n عدد زوجي)، $\cos n\pi = -1$ (في حالة n عدد فردي)]، أيضاً فإن:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-\sin x)dx + \int_{0}^{\pi}(\sin x)dx\right] = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin x dx = \frac{4}{\pi}$$

وتصبح متسلسلة فورييه بالصورة [حيث n عدد زوجي]:

$$f(x) = |\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2} - 1\right)$$

وهو المطلوب.

متسلسلة نصف المدى لفورييه (Half range Fourier series):

تعرف متسلسلة فورييه لنصف المدى في الجيب أوجيب التمام بأنها متسلسلة يكون فيها فقط حدود الجيب أو فقط حدود جيب التمام على الترتيب.

ومتسلسلة نصف المدى لدالة معطاة تكون عادة معرفة في الفترة $(0, \ell)$ وهـــي نصف الفترة $(-\ell, \ell)$ لذلك سميت نصف المدى، ويمكن إكمال تعريـــف الدالـــة بحيث تصبح فردية أو زوجية وبالتالي يمكن إيجاد متسلسلة فورييه لها.

في متسلسلة نصف المدى في الجيب يكون:

$$a_n = 0\,, \quad b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

في متسلسلة نصف المدى في جيب التمام يكون:

$$b_n = 0\,, \quad a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

مثال: أوجد مفكوك الدالة $f(x) = x$ في نصف المدى:

(i) بمتسلسلة جيب

(ii) بمتسلسلة جيب التمام

الحل:

(i) **بمتسلسلة جيب**: في متسلسلة نصف المدى في الجيب يكون:

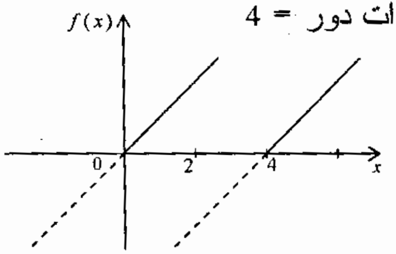
$$a_n = 0\,, \quad b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

لإيجاد ℓ: نقوم بعملية إكمال (إمتداد) فردي (odd extension)

للدالة $f(x) = x$ بحيث تصبح دالة فردية ذات دور $= 4$

وفي هذه الحالة فإن المدى: $2\ell = 4$

ويصبح نصف المدى: $\ell = 2$



لحساب المعاملات b_n:

$$\therefore b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx = \int_0^{2} x\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

وباجراء التكامل بالتجزئ:

$$u = x\,, \quad dv = \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$du = dx\,, \quad v = \frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}$$

$$\therefore b_n = (x)\left(\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\Bigg|_0^2 - \int_0^2\left(\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$

$$= \frac{-4}{n\pi}\cos n\pi + \frac{2}{n\pi}\left[\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$= \frac{-4}{n\pi}\cos n\pi + 0 = \frac{-4}{n\pi}\cos n\pi\,, \quad n \neq 0$$

في حالة $n=1$:

$$b_1 = \frac{-4}{\pi}[-1] = \frac{4}{\pi}$$

متسلسلة فورييه للدالة $f(x)$ في هذه الحالة تكون بالصورة :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{2} + b_n\sin\frac{n\pi x}{2}\right), \quad a_n = 0$$

$$\therefore f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-4}{n\pi}\right)\cos n\pi\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}$$

$$= \frac{-4}{\pi}\cos\pi\cdot\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{4}{2\pi}\cos 2\pi\cdot\sin\pi x - \frac{4}{3\pi}\cos 3\pi\cdot\sin\frac{3\pi x}{2} - \cdots$$

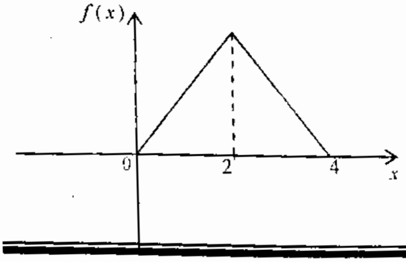
$$= \frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{4}{2\pi}\sin\pi x + \frac{4}{3\pi}\sin\frac{3\pi x}{2} - \cdots$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2}\sin\pi x + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} - \cdots\right]$$

(i) بمتسلسلة جيب التمام: في متسلسلة نصف المدى في جيب التمام، يكون:

$$b_n = 0\,, \quad a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

لايجاد ℓ : نقوم بعملية إكمال (امتداد) زوجي (Even Extension) للدالة $f(x)=x$ بحيث تصبح دالة زوجية ذات دور $= 4$ وفي هذه الحالة فإن المدى $2\ell = 4$ ويصبح نصف المدى $\ell = 2$



لحساب المعاملات a_n:

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx = \int_0^2 x\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}dx \qquad (*)$$

وبإجراء التكامل بالتجزئ:

$$u = x\,, \quad dv = \cos\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$du = dx\,, \quad v = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}$$

$$a_n = (x)\left(\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right)\Bigg|_0^2 - \int_0^2\left(\frac{2}{n\pi}\right)\sin\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$= 0 - \frac{2}{n\pi}\left[\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 = \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1), \quad n \neq 0$$

في حالة $n = 0$: من $(*)$ فإن:

$$a_0 = \int_0^2 x dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2 = \frac{4}{2} = 2$$

وتصبح متسلسلة فورييه للدالة $f(x)$ بالصورة:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{2} + b_n\sin\frac{n\pi x}{2}\right), \quad b_n = 0$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{2} \;= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2\pi^2}\right)(\cos n\pi - 1)\cos\frac{n\pi x}{2}$$

$$= 1 - \frac{8}{\pi^2}\left[\cos\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{2} + \cdots\right]$$

وهو المطلوب.

التمثيل المركب (complex representation) لمتسلسلة فورييه:

سوف نثبت هنا أن متسلسلة فورييه العادية وصورتها:

$$f(x) = A + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \qquad (1)$$

وذلك في الفترة $(-\pi,\pi)$، حيث:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx\,,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx$$

يمكن كتابتها في صورة مركبة كالآتي:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{inx} \tag{2}$$

والتي تسمى بمتسلسلة فورييه المركبة للدالة $f(x)$ (Complex Fourier Series) حيث المعاملات C_n تعطي بالعلاقة:

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx \tag{3}$$

وتسمى معاملات فورييه المركبة.

<u>**الإثبات:**</u> باستخدام معادلة أويلر: $e^{it}=\cos t+i\sin t$ ومرافقتها:

$$e^{-it}=\cos t-i\sin t$$

<u>**بأخذ**</u> $t=nx$:

$$e^{inx}=\cos nx+i\sin nx \tag{4}$$

$$e^{-inx}=\cos nx-i\sin nx \tag{5}$$

من(4)، (5) بالجمع نحصل على:

$$\cos nx=\frac{1}{2}\left(e^{inx}+e^{-inx}\right) \tag{6}$$

وبالطرح:

$$\sin nx=\frac{1}{2i}\left(e^{inx}-e^{inx}\right) \tag{7}$$

وباعتبار العلاقة (1)، وحيث أن $\frac{1}{i}=-i$:

$$\therefore a_n\cos nx+b_n\sin nx=\frac{1}{2}a_n\left(e^{inx}+e^{-inx}\right)+\frac{1}{2i}b_n\left(e^{inx}-e^{-inx}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(a_n-ib_n)e^{inx}+\frac{1}{2}(a_n+ib_n)e^{-inx}$$

$$=C_n e^{inx}+K_n e^{-inx}$$

حيث: $C_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n),\quad K_n=\frac{1}{2}(a_n+ib_n)$

ملحوظة: المعاملات K_n هي مرافقات المعاملات C_n وتكتب عادة: $K_n=C_{-n}$

$$\therefore a_n\cos nx+b_n\sin nx=C_n e^{inx}+C_{-n}e^{-inx} \qquad (8)$$

المعاملات a_n, b_n:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left[e^{inx}+e^{-inx}\right]dx$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{2i\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left[e^{inx}-e^{-inx}\right]dx$$

المعاملات C_n, C_{-n}:

$$C_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left[e^{inx}+e^{-inx}-e^{inx}+e^{-inx}\right]dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}\,dx \qquad (I)$$

$$C_{-n}=\frac{1}{2}(a_n+ib_n)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left[e^{inx}+e^{-inx}+e^{inx}-e^{-inx}\right]dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{inx}\,dx \qquad (II)$$

وباعتبار أن $A=C_0$ فإن العلاقة (1) تصبح:

$$f(x)=A+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n e^{inx}+C_{-n}e^{-inx}\right)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{inx}$$

حيث $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$

النتيجة: متسلسلة فوريييه العادية يمكن كتابتها في الصورة المركبة:

$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$ حيث $n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$ ، وحيث:

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

ملحوظة: في حالة الدالة $f(x)$ ذات الدور 2ℓ ، أي في الفترة $(-\ell,\ell)$ فإن متسلسلة فوريية المركبة تكون:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\frac{in\pi x}{\ell}}$$

حيث:

$$C_n=\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)e^{\frac{-in\pi x}{\ell}}dx$$

حالة خاصة: في حالة الدالة الدورية ذات الدور $T=\frac{2\pi}{w}$ فإن: $\ell=\frac{2\pi}{w} \leftarrow \ell=\frac{\pi}{w}$

$$\therefore f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\pi x\left(\frac{w}{\pi}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inxw}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{iwt}=f(t)$$

حيث: $t=nx$ ، والدالة $f(x)$ معرفة في الفترة $(-\infty,\infty)$ ، $f(t+T)=f(t)$ [دالة دورية].

أمثلة محلولة

مثال (1): أوجد متسلسلة فوريية المركبة للدالة $f(x)=e^{x}$ حيث

$-\pi<x<\pi$ ، $f(x+2\pi)=f(x)$

الحل: الدالة $f(x)$ دالة دورية ودورتها $2\pi=$ فتكون متسلسلة فوريية المركبة لهـا

هي: $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$ ، حيث معامل فوريية المركب C_n يعطى من :

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x}\cdot e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{1-in}e^{(1-in)x}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{1-in}\left[e^{(1-in)\pi} - e^{-(1-in)\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{1-in}(-1)^n\left[e^{\pi} - e^{-\pi}\right] = (-1)^n\frac{\sinh\pi}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{1-in}\right)$$

وذلك لأن: $e^{in\pi} = e^{-in\pi} = (-1)^n$ ، $e^{\pi} - e^{-\pi} = 2\sinh\pi$

بالضرب بسطا ومقاماً في $(1+in)$

$$C_n = (-1)^n\frac{1+in}{1+n^2}\frac{\sinh\pi}{\pi} \qquad (2)$$

وبذلك فإن متسلسلة فورييه المركبة للدالة $f(x) = e^x$ تكون:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$$

$$f(x) = \frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{1+in}{1+n^2}e^{inx} \qquad ; \quad (-\pi < x < \pi)$$

وهو المطلوب .

مثال(2):

(أ) استخدم الصورة المركبة لمتسلسلة فورييه للدالة

$$f(x) = \begin{cases} 3 & 0 < x < l \\ -3 & l < x < 2l \end{cases}$$

حيث الدالة $f(x)$ دالة دورية ودورتها $(2l)$.

ب) استخدم الصورة المركبة لمتسلسلة فورييه للدالة

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \le x \le 0 \\ 1 & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

الحل:

الجزء الأول: الدورة هنا $= 2l$ ، والصورة المركبة لمتسلسلة فورييه هي:

$$F(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\frac{in\pi x}{l}}$$

حيث :

$$C_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n)\ (n>0)=\frac{1}{2}(a_n+ib_n)\ \ (n<0)\quad ,\quad C_0=\frac{a_0}{2}$$

وهنا:

$$C_n=\frac{1}{2l}\left[\int_0^l 3e^{\frac{-in\pi x}{l}}dx+\int_l^{2l}(-3)e^{\frac{-in\pi x}{l}}dx\right]$$

$$=\frac{1}{2l}\left[\frac{-3l}{in\pi}\left(e^{-in\pi}-1\right)+\frac{3l}{in\pi}\left(e^{-2in\pi}-e^{-in\pi}\right)\right]$$

لقيم n الزوجية فإن : $C_n=0$ ، ولقيم n الفردية فإن:

$$C_n=\frac{-3}{2in\pi}\left[(-1)^n-1\right]+\frac{3}{2in\pi}\left[1-(-1)^n\right]=\frac{6}{in\pi}$$

وتصبح متسلسلة فورييه في الصورة المركبة [حيث n عدد فردي]:

$$F(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{6}{in\pi}e^{\frac{in\pi x}{l}}$$

ملحوظة: لإيجاد تلك المتسلسلة في الصورة الحقيقية نستخدم العلاقات الآتية:

$$a_n=c_n+c_{-n}\ ,\quad b_n=i(c_n+c_{-n})$$

وذلك حيث أن:

$$c_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n)$$

$$c_{-n}=\frac{1}{2}(a_n+ib_n)$$

$$\therefore a_n=\frac{6}{in\pi}-\frac{6}{in\pi}=0$$

$$b_n=i\left[\frac{6}{in\pi}+\frac{6}{in\pi}\right]=\frac{12}{n\pi}$$

(n فردية)

كذلك فإن:

$$\frac{1}{2}a_0 = c_0 = 0$$

وبذلك تكتب الدالة في الصورة الحقيقية:

$$f(x) = \frac{12}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sin\frac{(2n+1)\pi}{\ell}x$$

الجزء الثاني: الصورة المركبة لمتسلسلة فورييه هي:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$$

حيث:

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(0)e^{-inx}dx + \int_{0}^{\pi}e^{-inx}dx\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[0 + \left.\frac{e^{-inx}}{-in}\right|_0^{\pi}\right] = -\frac{1}{2\pi in}\left(e^{-in\pi} - 1\right) = \frac{1}{2\pi in}\left(1 - e^{-in\pi}\right) = \frac{1}{2\pi in}\left[1 - (-1)^n\right]$$

$$= \begin{cases} 0 & , n \ \ even \\ \dfrac{1}{\pi in} & , n \ \ odd \end{cases}$$

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} dx = \frac{1}{2}$$

وبذلك تأخذ متسلسلة فورييه الصورة الآتية :

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{i\pi}\left[\frac{e^{ix}}{1} + \frac{e^{3ix}}{3} + \frac{e^{5ix}}{5} + \cdots\right] + \frac{1}{i\pi}\left[\frac{e^{-ix}}{-1} + \frac{e^{-3ix}}{-3} + \frac{e^{-5ix}}{-5} + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right) + \left(\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i}\right) + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left[\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots\right]$$

وهي صورة متسلسلة فورييه المطلوبة للدالة $f(x)$.

مثال(3): خصائص الدالة الدورية $f(t)$ ذات الدورة $\frac{2\pi}{w}$:

إذا كانت الدالة الدورية $f(t)$ ودورتها $T=\frac{2\pi}{w}$، حيث $f(t+T)=f(t)$ تعطى بالعلاقة $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{iwt}$

(i) عرف القيمة المتوسطة للدالة $f(t)$، واثبت أنها تعطي بالعلاقة: $\overline{f(t)}=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$

(ii) عرف القيمة الفعلية للدالة $f(t)$ على الدورة T، واثبت أنها تعطى بالعلاقة: $f_{eff}^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|C_n|^2$

(iii) عرف متوسط حاصل ضرب الدالتين:

$$f_2(t)=\sum d_m e^{iw_m t} \quad , \quad f_1(t)=\sum C_n e^{iw_n t}$$

اللذان لهما نفس الدورة، وأثبت انه يعطى بالعلاقة: $\overline{f_1 f_2}=\sum C_n d_{-n}$

الحل:

(i) القيمة المتوسطة (Average value) لدالة: حيث أن:

$$f(t)=\sum C_n e^{iwt} \tag{1}$$

فبتكامل هذه العلاقة بالنسبة إلى t من 0 إلى T

$$\therefore \int_0^T f(t)dt=\int_0^T\left(\sum C_n e^{iwt}\right)dt=\sum C_n\int_0^T e^{iwt}dt$$

$$=\sum C_n\left[\frac{e^{iwt}}{iw}\right]_0^{\frac{2\pi}{w}}=\sum C_n\frac{1}{iw}\left[e^{i(2\pi)}-1\right]=0$$

حيث $w\neq 0$، $t\neq 0$، $T=\frac{2\pi}{w}$، $e^0=1$، $e^{2\pi i}=1$

حالة خاصة: عندما $t=0$ ، $n=0$ $\leftarrow$ $f(t)=\sum C_n = C_0$ (من (1)) وبذلك نحصل على :

$$\therefore \int_0^T f(t)dt = \int_0^T C_0 dt = C_0 \int_0^T dt = C_0 [t]_0^T = C_0 T$$

$$\therefore C_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \overline{f(t)}$$

حيث $\overline{f(t)}$ تعرف بالقيمة المتوسطة للدالة $f(t)$ وتعطى بالعلاقة:

$$\therefore \overline{f(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

(ii) القيمة الفعلية (Effective value) لدالة f : تعرف القيمة الفعلية للدالة f على دورة T بالعلاقة الآتية:

$$f_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T [f(t)]^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{iw_n t}\right]\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{iw_m t}\right] dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \sum_n \sum_m C_n C_m e^{i(w_n + w_m)t} dt = \frac{1}{T}\left[\sum_n \sum_m C_n C_m \int_0^T e^{i(w_n+w_m)t} dt\right]$$

$$= \frac{1}{T}\sum_n \sum_m C_n C_m \int_0^T e^{iwt} dt$$

حيث: $w = w_n + w_m$

ولكن:

$$\int_0^{\frac{2\pi}{w}} e^{iwt} dt \to = \begin{cases} 0 & (w \neq 0) \\ \frac{2\pi}{w} = T & (w = 0) \end{cases}$$

وهذا يعني أن التكامل يتلاشى عندما $w \neq 0$ ويكون له قيمة عندما $w = 0$ أي عندما $w_n + w_m = 0$ ، أي عندما $w_m = -w_n$ (حيث $m = -n$) وقيمته في تلك الحالة $= T$

$$\therefore f_{eff}^2 = \frac{1}{T}\sum_{n}\sum_{m=-n} C_n C_{-n} T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n C_{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$$

المعامل C_{-n} يسمى بالمعامل المرافق لــ C_n

(iii) متوسط حاصل ضرب الدالتين f_1, f_2 (Average of product):

يعرف بالعلاقة الآتية:

$$\overline{f_1 f_2} = \frac{1}{T}\int_0^T f_1(t) f_2(t) dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{iw_n t}\right]\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m e^{iw_m t}\right] dt = \frac{1}{T}\sum_{n}\sum_{m} C_n d_m \int_0^T e^{i(w_n + w_m)t} dt$$

ولكن:

$$\int_0^T e^{i(w_n + w_m)t} dt = \begin{cases} 0 & (w_n + w_m \neq 0) \\ T & (w_n + w_m = 0 \rightarrow w_m = -w_n \rightarrow m = -n) \end{cases}$$

$$\therefore \overline{f_1 f_2} = \frac{1}{T}\sum_{n}\sum_{-n} C_n d_{-n} \cdot T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n d_{-n}$$

وهو المطلوب.

أمثلة عامة على متسلسلات فورييه

مثال (1):

(أ) أوجد متسلسلة فورييه للدالة:

$$f(x)=\begin{cases}0 & -\pi<x<0\\ \pi & 0<x<\pi\end{cases}$$

(ب) أوجد متسلسلة فورييه للدالة الدورية:

$$f(x)=\begin{cases}-\pi & -\pi<x<0\\ x & 0<x<\pi\end{cases}$$

ومن ذلك أثبت أن: $\frac{\pi^2}{8}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots$

الحل: الجزء الأول (أ):

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos nx+b_n\sin nx\right]$$

حيث:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(0)dx+\int_{0}^{\pi}(\pi)dx\right]=\frac{1}{\pi}\left(\pi^2\right)=\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx=\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\pi\sin nx dx=\frac{1}{n}(1-\cos nx)=\frac{1}{n}\left[1-(-1)^n\right]$$

حيث $\cos nx=(-1)^n$

$$\therefore f(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}(1-\cos nx)\right]\sin nx=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\sin nx-2\sin 2nx\right]$$

الجزء الثاني (ب):

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos nx+b_n\sin nx\right]$$

حيث:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-\pi)dx + \int_{0}^{\pi}(x)dx\right] = -\frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-\pi)\cos nx dx + \int_{0}^{\pi}(x)\cos nx dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}(\cos n\pi - 1)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi n^2}[\cos n\pi - 1] = \begin{cases} 0 & , n \ even \\ \dfrac{-2}{\pi n^2} & , n \ odd \end{cases}$$

[حيث أن: $\cos n\pi = 1$ (في حالة n زوجي)،

$\cos n\pi = -1$ (في حالة n فردي)]

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-\pi)\sin nx dx + \int_{0}^{\pi}(x)\sin nx dx\right]$$

$$= \frac{1}{n}[1 - 2\cos n\pi] = \begin{cases} \dfrac{-1}{n} & , n \ even \\ \dfrac{3}{n} & , n \ odd \end{cases}$$

وتصبح متسلسلة فورييه بالصورة [حيث n عدد فردي] :

$$\therefore f(x) = \frac{-\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{-2}{\pi n^2}\cos nx + \frac{3}{n}\sin nx\right]$$

$$= \frac{-\pi}{4} + \left[\frac{-2}{\pi}\cos x - \frac{2}{\pi}\frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{2}{\pi}\frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots + 3\sin x + \frac{3\sin 3x}{3} + \cdots\right]$$

وبوضع $x = 0$ في تلـك المتسلسلة واعتبار أن $\cos 0 = 1$; $\sin 0 = 0$ نحصل على:

$$f(0) = -\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right]$$

بالضرب في $\frac{\pi}{2}$:

$$\therefore \frac{-\pi^2}{4}=\frac{-\pi^2}{8}-\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right]$$

$$\therefore \left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right]=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{8}$$

وهو المطلوب .

مثال (2):

(أ) أوجد متسلسلة فورييه للدالة $f(x)$ في المدى $(-5,5)$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases}0 & -5<x<0\\ 3 & 0<x<5\end{cases}$$

(ب) أوجد متسلسلة فورييه للدالة $f(x)$ في المدى $(-2,2)$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases}0 & -2<x<0\\ 1 & 0<x<2\end{cases}$$

الحل:الجزء (أ): متسلسلة فورييه هي:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}]$$

الدورة هنا $=10$ أي أن $2\ell=10$ وبذلك فإن $\ell=5$ ويكون التكامل من (-5) إلى (5)

$$\therefore a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx=\frac{1}{5}\int_{-5}^{5}f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx$$

$$=\frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0}(0)\cos\frac{n\pi x}{5}dx+\int_{0}^{5}(3)\cos\frac{n\pi x}{5}dx\right]$$

$$=\frac{3}{5}\int_{0}^{5}\cos\frac{n\pi x}{5}dx=\frac{3}{5}\left[\frac{5}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5}\right]_0^5=0$$

$$a_0=\frac{3}{5}\int_0^5 dx=\frac{3}{5}[x]_0^5=3$$

$$b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-5}^{5}f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx=\frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0}(0)\sin\frac{n\pi x}{5}dx+\int_{0}^{5}(3)\sin\frac{n\pi x}{5}dx\right]$$

$$=\frac{3}{5}\int_{0}^{5}\sin\frac{n\pi x}{5}dx=\frac{3}{5}\left[\frac{-5}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{5}\right]_0^5=\frac{3}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

وتصبح متسلسلة فورييه بالصورة:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{5}=\frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5}$$

وإذا كانت $\cos n\pi=1$ (في حالة n زوجي)، $\cos=n\pi=-1$ (في حالة n فردي) فإن

$$b_n=\frac{3}{n\pi}\begin{cases}0 & , \quad n\ \ even\\ 2 & , \quad n\ \ odd\end{cases}\qquad \rightarrow b_n=\frac{6}{n\pi}\quad (\text{n فردي})$$

فتصبح متسلسلة فورييه بالصورة الآتية [حيث n عدد فردي]:

$$f(x)=\frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5}$$

<u>الجزء (ب)</u>:متسلسلة فورييه هي:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{2}+b_n\sin\frac{n\pi x}{2}\right]$$

حيث :الدورة هنا $2\ell=4$ أي أن $\ell=2$

$$\therefore a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0}(0)dx+\int_{0}^{2}(1)dx\right]=\frac{1}{2}[2]=1$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0}(0)\cos\frac{n\pi x}{2}dx + \int_{0}^{2}(1)\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0 + \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^2\right] = \frac{1}{n\pi}\left[\sin n\pi - \sin 0\right] = 0$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0}(0)\sin\frac{n\pi x}{2}dx + \int_{0}^{2}(1)\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0 + \left(\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^2\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{-2}{n\pi}(\cos n\pi - 1)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)\right] = \frac{1}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

$$= \begin{cases} 0 & , n \text{ even} \\ \dfrac{2}{n\pi} & , n \text{ odd} \end{cases}$$

وتصبح صورة متسلسلة فورييه للدالة المعطاة [حيث n عدد فردي] :

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{1} + \frac{\sin\frac{3\pi x}{2}}{3} + \cdots\right] = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left[\sin\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} + \cdots\right]$$

وهو المطلوب.

<u>**مثال (3):**</u> اكتب الدالة $f(x) = x^2$ في صورة متسلسلة فورييه في الفترة $(-\pi \le x \le \pi)$، ومن ذلك أثبت أن:

$$\text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad , \quad \text{(ii)} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad , \quad \text{(iii)} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

الحل: الدالة $f(x)=x^2$ هي دالة دورية ودورتها 2π= وهي دالة زوجية وعلى ذلك فإن b_n تتلاشى $(b_n=0)$ وبذلك تكون متسلسلة فوريية بالصورة:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

حيث:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x^2dx=\frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x^2\cos nx dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2\sin nx}{n}+\frac{2x\cos nx}{n^2}-\frac{2\sin nx}{n^3}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{2\pi\cos n\pi}{n^2}\right]=\frac{4}{n^2}\cos n\pi=\frac{4}{n^2}(-1)^n$$

$$=\begin{cases}\dfrac{4}{n^2} & , \quad n \quad even\\[2ex] -\dfrac{4}{n^2} & , \quad n \quad odd\end{cases}$$

$$\therefore f(x)=x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos nx$$

$$=\frac{\pi^2}{3}-4\left[\frac{1}{1^2}\cos x-\frac{1}{2^2}\cos 2x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\cdots\right]$$

وهي صورة متسلسلة فوريية المطلوبة.

وبوضع $x=0$:

$$0=\frac{\pi^2}{3}-4\left[\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots\right]$$

$$\therefore\frac{\pi^2}{12}=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \qquad (1)$$

أيضا بوضع $x=\pi$:

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left[\frac{-1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} - \cdots\right]$$

$$\therefore \pi^2 - \frac{\pi^2}{3} = 4\left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right] = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$\therefore \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \qquad (2)$$

من (1)، (2) بالجمع:

$$\frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{6} = \frac{2}{1^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \cdots$$

$$\frac{\pi^2}{24} + \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} \qquad (3)$$

وهو المطلوب.

<u>مثال (4):</u>

(أ) أوجد متسلسلة فورييه للدالة:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le \pi \\ \pi & \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$$

(ب) أوجد متسلسلة الجيب ومتسلسلة جيب التمام لفورييه للدالة:

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ \pi - x & , \quad \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$$

<u>الحل: الجزء (أ):</u> الدالة المعطاة لها الدورة 2π، ومن تعريف متسلسلة فورييه:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n}^{\infty}\left[a_n \cos nx + b_n \sin nx\right]$$

حيث:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} x dx + \int_{\pi}^{2\pi} \pi dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} + \pi x\Big|_{\pi}^{2\pi}\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{2} + \left(2\pi^2 - \pi^2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{2} + \pi^2\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{3\pi^2}{2}\right] = \frac{3\pi}{2} \rightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{3\pi}{4}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} x\cos nx dx + \int_{\pi}^{2\pi} \pi\cos nx dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(n\pi)-1}{n^2} + 0\right] = \frac{\cos(n\pi)-1}{n^2\pi}$$

وهنا استخدمنا قيم التكاملين:

$$\int_0^{\pi} x\cos nx dx = \frac{\cos(n\pi)-1}{n^2}$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \cos nx dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} x\sin nx dx + \int_{\pi}^{2\pi} \pi\sin nx dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\pi}{n}\cos(n\pi) + \frac{\pi}{n}(\cos n\pi - 1)\right] = \frac{-1}{n}$$

وهنا استخدمنا قيم التكاملين:

$$\int_0^{\pi} x\sin nx dx = \frac{-\pi\cos n\pi}{n}, \quad \int_{\pi}^{2\pi} \sin nx dx = \frac{\cos(n\pi)-1}{n}$$

$$\therefore f(x) = \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\cos(n\pi)-1}{n^2}\cos nx - \frac{1}{n}\sin nx\right]$$

وهي متسلسلة فورييه للدالة $f(x)$. وهو المطلوب.

الجزء (ب):

1) متسلسلة الجيب تعطى بالعلاقة:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx\cdot\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

وهنا:

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin nx dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)\sin nx dx$$

$$=\left[-x\frac{\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[-(\pi-x)\frac{\cos nx}{n}-\frac{\sin nx}{n^2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{2}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$\therefore f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx\left[\frac{2}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right]$$

$$=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2}=\frac{4}{\pi}\left[\sin x-\frac{\sin 3x}{3^2}+\frac{\sin 5x}{5^2}+\cdots\right]$$

وهي صورة متسلسلة الجيب لفورييه للدالة $f(x)$

2) متسلسلة جيب التمام تعطى بالعلاقة:

$$\therefore f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx\right]\cos nx$$

وهنا:

$$\int_0^{\pi} f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)dx=\frac{\pi^2}{4}$$

$$\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos nx dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x)\cos nx dx$$

$$= \left[\frac{x\sin nx}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2}\left[\sin nx\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \left[\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{n^2}\left[1 + \cos n\pi - 2\cos\frac{n\pi}{2}\right]$$

وتصبح متسلسلة جيب التمام للدالة $f(x)$ بالصورة:

$$\therefore f(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{4}\right] - \frac{2}{\pi}\sum \frac{1}{n^2}\left[1 + \cos n\pi - 2\cos\frac{n\pi}{2}\right]\cos nx$$

وهو المطلوب.

مثال (5):

(أ) أوجد متسلسلة فورييه للدالة الآتية ذات الدورة (2π) في الفترة $(-\pi,\pi)$:

$$f(x) = \begin{cases} -a & , \quad (-\pi < x < 0) \\ a & , \quad (0 < x < \pi) \end{cases}$$

ومن ذلك أثبت أن: $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$

(ب) أوجد متسلسلتي الجيب وجيب التمام لفورييه للدالة:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad (0 < x < \frac{1}{2}) \\ 0 & , \quad (\frac{1}{2} < x < 1) \end{cases}$$

الحل:

أ) **الجزء الأول (أ):** متسلسلة فورييه للدالة $f(x)$ هي:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos nx + b_n \sin nx\right]$$

حيث:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-a)dx + \int_{0}^{\pi}(a)dx\right] = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-a)\cos nx dx + \int_{0}^{\pi}(a)\cos nx dx\right] = 0$$

وهذا واضح لأن الدالة المعطاة هي دالة فردية فيجب أن تختفي المعـــاملات a_n

وبذلك تصبح متسلسلة فورييه بالصورة:

(متسلسلة جيبية) $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

ولحساب المعاملات b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-a)\sin nx dx + \int_{0}^{\pi}(a)\sin nx dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{2a}{n}(1-\cos n\pi)\right]$$

ولكن: $\cos n\pi = 1$ (في حالة n زوجية)، $\cos n\pi = -1$ (في حالة n فردية)

$$\therefore b_n = \begin{cases} 0 & , \; n \; even \\ \dfrac{4a}{n\pi} & , \; n \; odd \end{cases}$$

وتصبح متسلسلة فورييه بالصورة:

$$\therefore f(x) = \frac{4a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\sin nx = \frac{4a}{\pi}\left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right]$$

حيث n عدد فردي

وبوضع $x = \frac{\pi}{2}$ في هذه العلاقة واعتبار أن $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$

$$\therefore a = \frac{4a}{\pi}\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right]$$

ومنها:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

وهو المطلوب.

ب) الجزء (ب):

أولاً: متسلسلة الجيب: إذا كانت الدالة $f(x)$ دورية في الفترة $(-1,1)$ بحيث أن دورتها= 2 وتصبح الدالة فردية وبذلك فإن المعاملات $a_n = 0 \;, a_0 = 0$، والمعاملات b_n تعطى بالعلاقة الآتية:

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{\ell}\int_{0}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx$$

وفي حالتنا فإن $\ell = 1$:

$$\therefore b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)dx = 2\left[\int_0^{\frac{1}{2}}(1)\sin(n\pi x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1}(0)\sin n\pi x dx\right]$$

$$= 2\int_0^{\frac{1}{2}}\sin(n\pi x)dx = \frac{-2}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{-2}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right)$$

بمعنى أن:

$$b_1 = \frac{2}{\pi},\quad b_2 = \frac{2\cdot 2}{2\pi} = \frac{2}{\pi},\quad b_3 = \frac{2}{3\pi},\ \ldots$$

$$\therefore f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x = \frac{2}{\pi}\left[\sin\pi x + \frac{2\sin 2\pi x}{2} + \frac{\sin 3\pi x}{3} + \cdots\right]$$

ثانياً: متسلسلة جيب التمام: إذا كانت الدالة $f(x)$ زوجيه ودورتها = 2 فإن $b_n = 0$، وتعطى a_0, a_n بالعلاقتين:

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx$$

وفي حالتنا فإن $\ell = 1$:

$$\therefore a_n = 2\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\cos n\pi x dx = 2\left[\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$a_0 = 2\int_0^1 f(x)dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}}[1]dx = 2[x]_0^{\frac{1}{2}} = 2\left[\frac{1}{2}\right] = 1$$

وتصبح متسلسلة فورييه لجيب التمام بالصورة:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\right]\cos n\pi x$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left[\cos\pi x - \frac{\cos 3\pi x}{3} + \frac{\cos 5\pi x}{5} - \cdots\right]$$

وهو المطلوب.

مثال (6): أوجد متسلسلة فورييه لمفكوك الدالة $f(x) = x\sin x$ في الفترة $-\pi < x < \pi$، ومن ثم أثبت أن: $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} - \cdots$

الحل: الدالة $f(x) = x\sin x$ هي دالة زوجية في x، وقد أثبتنا أنه في الفترة $-\pi < x < \pi$ وعندما تكون الدالة $f(x)$ زوجية فان متسلسلة فورييه تأخذ الشكل:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

وعندما $f(x) = x\sin x$ فإن:

$$\therefore f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin x dx + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx\int_0^{\pi} x\sin x\cos nx dx \qquad (1)$$

ولكن باستخدام التكامل بالتجزئ فإن:

$$\int_0^{\pi} x\sin x dx = \int_0^{\pi} x\cdot[-d(\cos x) = \left[-x\cdot\cos x\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x dx$$

$$= [-\pi\cos\pi] + [\sin x]_0^{\pi} = \pi \qquad (2)$$

أيضاً فإن:

$$\int_0^{\pi} x\sin x\cos nx\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\left[\sin(1+n)x+\sin(1-n)x\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\left[\sin(1+n)x-\sin(n-1)x\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\cdot\left[-\frac{1}{1+n}d\cos(1+n)x+\frac{1}{n-1}d\cos(n-1)x\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left[-\pi\frac{\cos(n+1)\pi}{1+n}\right]+\left[\frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^2}\right]_0^{\pi}+\left[\pi\frac{\cos(n-1)\pi}{n-1}\right]-\left[\frac{\sin(n-1)x}{(n-1)^2}\right]_0^{\pi}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{-\pi\frac{\cos(n+1)\pi}{1+n}+\pi\frac{\cos(n-1)\pi}{n-1}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\pi\frac{\cos n\pi\cos\pi-\sin n\pi\sin\pi}{n+1}+\pi\frac{\cos n\pi\cos\pi+\sin n\pi\sin\pi}{n-1}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\pi\frac{\cos n\pi}{n+1}-\pi\frac{\cos n\pi}{n-1}\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left\{\frac{(n-1)\cos n\pi-(n+1)\cos n\pi}{(n^2-1)}\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left\{\frac{-2\cos n\pi}{(n^2-1)}\right\}=-\pi\frac{\cos n\pi}{n^2-1}\quad,\qquad n\neq 1 \tag{3}$$

عندما $n=1$:

$$\int_0^{\pi} x\sin x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\sin 2x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)d(\cos 2x)=-\frac{1}{4}\int_0^{\pi} x\cdot d(\cos 2x)$$

$$= -\frac{1}{4}\left[x.\cos 2x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos 2x dx \right]$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\pi.\cos 2\pi - \left[\frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\pi} \right] = -\frac{\pi}{4} \qquad (4)$$

بالتعويض من (2)، (3) ، (4) في (1) نحصل على:

$$f(x) = x\sin x = 1 + \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\pi}{4}\cos x - \pi\sum_{n=2} \frac{\cos n\pi}{n^2 - 1}\cos nx \right]$$

$$= 1 - 2\left[\frac{\cos x}{4} + \sum_{n=2} \frac{\cos n\pi}{n^2 - 1}\cos nx \right]$$

$$= 1 - 2\left[\frac{\cos x}{4} + \frac{\cos 2x}{1.3} + \frac{\cos 3x}{2.4} + \frac{\cos 4x}{3.5} + \cdots \right]$$

وبوضع $x = \frac{\pi}{2}$ في هذه العلاقة نحصل على:

$$\frac{\pi}{2} = 1 - 2\left[0 - \frac{1}{1.3} + 0 + \frac{1}{3.5} \right] = 1 - 2\left[-\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} - \frac{1}{5.7} \right]$$

وبالقسمة على 2 نحصل على:

$$\therefore \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.3} - \cdots$$

وهو المطلوب.

مثال (7): أوجد متسلسلة الجيب وجيب التمام لفوريية، والتي تمثل الدالة $f(x) = \dfrac{\pi e^x}{2\sinh \pi}$ في الفترة $-\pi < x < \pi$.

الحل: نكتب متسلسلة فورييه للجيب وجيب التمام في صورتها العامة:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (1)$$

حيث:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\,, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx\,,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

<u>ولإيجاد المعاملات</u> a_0, a_n, b_n:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi e^x}{2\sinh\pi}dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2\sinh\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x dx$$

$$= \frac{1}{2\sinh\pi}\left[e^x\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\sinh\pi}\left[e^{\pi} - e^{-\pi}\right] = \frac{1}{2\sinh\pi}\left[2\sinh\pi\right] = 1 \quad (2)$$

أيضاً فإن:

$$a_n = \frac{1}{2\sinh\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx dx$$

ولكن:

$$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\cos bx + b\sin bx\right)$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{2\sinh\pi}\left[\frac{e^x}{1+n^2}\left(\cos nx + n\sin nx\right)\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\sinh\pi}\left[\frac{e^{\pi}}{1+n^2}\cos n\pi - \frac{e^{-\pi}}{1+n^2}\cos(-n\pi)\right]$$

$$= \frac{1}{2\sinh\pi}\left[\frac{\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)\cos n\pi}{1+n^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sinh\pi}\left[\frac{2\sinh\pi\cdot\cos n\pi}{1+n^2}\right] = \frac{\cos n\pi}{1+n^2} = \frac{(-1)^n}{1+n^2} \qquad (3)$$

وبالمثل فإن:

$$b_n = \frac{1}{2\sinh\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx dx$$

ولكن:

$$\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\sin bx - b\cos bx\right)$$

$$\therefore b_n=\frac{1}{2\sinh\pi}\left[\frac{e^x}{1+n^2}(\sin nx-n\cos nx)\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2\sinh\pi}\left[\frac{1}{1+n^2}\left\{e^{\pi}(-n\cos n\pi)-e^{-\pi}(-n\cos(-n\pi))\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2\sinh\pi}\left[\frac{1}{1+n^2}(-n)(-1)^n\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2\sinh\pi}\left[\frac{1}{1+n^2}(-n)(-1)^n\cdot 2\sinh\pi\right]=-(-1)^n\frac{n}{1+n^2}\qquad(4)$$

وبالتعويض عن قيم a_0, a_n, b_n في (1) نحصل على:

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos nx-n\sin nx)$$

$$=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{1+n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^{n+1}}{1+n^2}\sin nx$$

وهي متسلسلة الجيب وجيب التمام لفوريه للدالة المعطاه.

ويمكن كتابتها بالصورة:

$$f(x)=\frac{1}{2}+\left[-\frac{\cos x}{1+1^2}+\frac{\cos 2x}{1+2^2}-\frac{\cos 3x}{1+3^2}+\cdots\right]+\left[\frac{\sin x}{1+1^2}-\frac{2\sin 2x}{1+2^2}+\frac{3\sin 3x}{1+3^2}+\cdots\right]$$

وهو المطلوب.

مسائل على متسلسلة فوريه

1) (أ) أوجد متسلسلة فوريه للدالة $f(x)=1-x$ في الفترة $-1 \le x \le 1$.

(ب) أكتب الدالة $f(x)=x^2$ في الفترة $0<x<a$، وذلك:

(i) بمتسلسلة جيب التمام لفوريه.

(ii) بمتسلسلة الجيب لفوريه.

2) (أ) أوجد متسلسلة فوريه للدالة:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (-\pi<x<) \\ \pi-x & (0<x<\pi) \end{cases}$$

(ب) أوجد متسلسلة فوريه المعرفه على الفترة $-2 \le x \le 2$ حيث

$$f(x)=\begin{cases} 2 & -2<x\le 0 \\ x & 0<x<2 \end{cases}$$

3) أوجد متسلسلة فوريه لجيب وجيب تمام مضاعفات x والتي تمثل الدالة: $f(x)=x+x^2$ في الفترة $-1 \le x \le 1$.

4) أوجد متسلسلة فوريه للدالة $f(x)$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases} \cos x & (0\le x\le \pi) \\ -\cos x & (-\pi\le x\le 0) \end{cases}$$

5) أوجد متسلسلة الجيب وجيب التمام لفوريه للدالة $f(x)$ في الفترة $-\pi \le x \le \pi$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (-\pi<x\le 0) \\ \dfrac{\pi x}{4} & (0<x<\pi) \end{cases}$$

6) (أ) أوجد متسلسلة الجيب لفوريه التي تمثل الدالة $f(x)=x$ في الفترة $(0,\pi)$

(ب) أوجد متسلسلة جيب التمام لفوريه التي تمثل الدالة $f(x)=x$ في الفترة $(0,\pi)$

ومن ثم أثبت المتسلسلة: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$

7) أوجد متسلسلة فورييه للدالة $f(x)$ ذات الدورة (4) حيث:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -2 < x < -1 \\ k & -1 \le x \le 1 \\ 0 & 1 < x < 2 \end{cases}$$

حلول المسائل

المسألة (1) : (أ)

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right]$$

وحيث أن الدالة دورية في الفترة $(-1,1)$ فإن $2\ell=2 \leftarrow \ell=1$

$$a_0=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)dx=\int_{-1}^{1}(1-x)dx=2$$

$$a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx=\int_{-1}^{1}(1-x)\cos n\pi x dx=0$$

$$b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx=\int_{-1}^{1}(1-x)\sin n\pi x dx=\frac{2}{n\pi}\cos n\pi\, x$$

$$\therefore f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\cos n\pi x\sin n\pi x=1+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin 2n\pi x$$

1) (ب):

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right]$$

حيث: $f(x)=x^2$ في الفترة $0<x<a$.

أولاً: متسلسلة جيب التمام:

$$\therefore a_0=\frac{2}{a}\int_{0}^{a}x^2dx=\frac{2}{3}a^2$$

$$a_n=\frac{2}{a}\int_{0}^{a}x^2\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{4a^2}{n^2\pi^2}(-1)^n$$

$$\therefore f(x)=\frac{a^2}{3}+\frac{4a^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}x$$

ثانياً: متسلسلة الجيب:

$$b_n=\frac{2}{a}\int_0^a x^2\sin\frac{n\pi}{2}x\,dx=\frac{2a^2}{n\pi}(-1)^{n+1}+\frac{4a^2}{n^3\pi^3}\left[(-1)^n-1\right]$$

$$\therefore f(x)=\frac{2a^2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2}{n^3\pi^2}\left\{(-1)^n-1\right\}\right]\sin\frac{n\pi}{2}x$$

المسألة (2) : (أ)

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

حيث:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(0)dx+\int_0^{\pi}(\pi-x)dx\right]=\frac{\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\cos nx\,dx$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}\left[1-\cos n\pi\right]=\frac{1}{n^2\pi}\left[1-(-1)^n\right]$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin nx\,dx=\frac{1}{n}$$

$$\therefore f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\cos nx+\frac{1}{n}\sin nx\right]$$

2) (ب)

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi}{2}x+b_n\sin\frac{n\pi}{2}x\right]$$

حيث: $\ell=2$ [الفترة $-2<x\le 2$]

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)dx=\frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0}(2)dx+\int_0^{2}(x)dx\right]=3$$

$$a_n=\frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{2}f(x)\cos\frac{n\pi}{2}x\,dx\right]=\frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0}(2)\cos\frac{n\pi}{2}x\,dx+\int_0^{2}(x)\cos\frac{n\pi}{2}x\,dx\right]$$

$$=\frac{-2}{n^2\pi^2}\left[1-\cos n\pi\right]=\frac{-2}{n^2\pi^2}\left[1-(-1)^n\right]$$

$$b_n = \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0}(2)\sin\frac{n\pi}{2}x\,dx + \int_{0}^{2}(x)\sin\frac{n\pi}{2}x\,dx\right] = \frac{-2}{n\pi}$$

$$\therefore f(x) = \frac{3}{2} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}x + \frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}x\right]$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}x + \frac{\pi}{n}\sin\frac{n\pi}{2}x\right]$$

المسألة(3): متسلسلة فوريه للدالة $f(x) = x + x^2$ في الفترة $-\pi \le x \le \pi$ هي:

$$f(x) = x + x^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+x^2)\,dx$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx\int_{-\pi}^{\pi}(x+x^2)\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx\int_{-\pi}^{\pi}(x+x^2)\sin nx\,dx$$

ولكن:

$$\int_{-\pi}^{\pi}(x+x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^3}{3} - \frac{\pi^2}{2} - \left(\frac{-\pi^3}{3}\right) = \frac{2\pi^3}{3}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}(x+x^2)\cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}(x+x^2)\cdot\frac{1}{n}d(\sin nx)$$

$$= \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}x\,d(\sin nx) + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}x^2 d(\sin nx)$$

$$= \frac{1}{n}\left[x\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\left[\frac{-\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\left[x^2\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\,dx$$

$$= \frac{-2}{n}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\,dx = -\frac{2}{n}\left[\left\{\frac{-x\cos nx}{n}\right\}_{-\pi}^{\pi} + \left\{\frac{\sin nx}{n}\right\}_{-\pi}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{2}{n^2}\left[\pi\cos n\pi - (-\pi)\cos(-n\pi)\right] = \frac{4\pi}{n^2}\cos n\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}(x+x^2)\sin nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}(x+x^2)\left[-\frac{1}{n}d(\cos nx)\right]$$

$$= -\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}x\,d(\cos nx) - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}x^2 d(\cos nx)$$

$$= -\frac{1}{n}\left[x\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n^2}\left[\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\left[x^2\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx$$

$$= -\frac{1}{n}\left[\pi\cos n\pi - (-\pi)\cos(-n\pi)\right] = -\frac{2\pi}{n}\cos n\pi$$

وتصبح المتسلسلة:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\pi^3}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx\cos n\pi}{n^2} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx\cos n\pi}{n}$$

$$= \frac{\pi^2}{3} + 4\left[\frac{-\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 3x}{3^2} + \cdots\right] - 2\left[\frac{-\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 3x}{3} + \cdots\right]$$

$$= \frac{\pi^2}{3} - 4\left[\cos x - \frac{1}{2^2}\cos 2x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \cdots\right] + 2\left[\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots\right]$$

<u>المسألة (4) :</u> متسلسلة فورييه:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\cos nx\,dx = 0$$

وهذا واضح لأن الدالة المعطاة زوجية فتكون متسلسلة فورييه لها متسلسلة جيب:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -\cos x\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi}\cos x\sin nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{-\pi}\cos x\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi}\cos x\sin nx\,dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos x\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left[\sin(1+n)x - \sin(1-n)x\right]dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(1+n)x}{1+n} + \frac{\cos(1-n)x}{1-n}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(1+n)\pi}{1+n} + \frac{\cos(1-n)\pi}{1-n} + \frac{1}{1+n} - \frac{1}{1-n}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{2n}{\left(1+n^2\right)}\cos(1+n)\pi-\frac{2n}{1-n^2}\right]$$

$$=\frac{2n}{\pi\left(n^2-1\right)}\left[1-\cos(1+n)\pi\right]$$

$$=\frac{2n}{\pi(n^2-1)}\begin{cases}0 & , \ n \ odd\\ 2 & , \ n \ even\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & , \ n \ odd\\ \dfrac{4n}{\pi\left(n^2-1\right)} & , \ n \ even\end{cases}$$

$$\therefore f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n}^{\infty}\frac{n}{n^2-1}\sin nx=\frac{4}{\pi}[\frac{2}{1.3}\sin 2x+\frac{4}{3.5}\sin 4x+\cdots]$$

(حيث n زوجي).

المسألة (5): متسلسلة فورييه:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{\pi}f(x)dx\right]=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\pi x}{4}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_{0}^{\pi}xdx=\frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{8}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nxdx+\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nxdx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\pi x}{4}\cos nxdx=\frac{1}{4}\int_{0}^{\pi}x\cos nxdx=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{n^2}\left\{(-1)^n-1\right\}\right]$$

حيث :

$$\int_{0}^{\pi}x\cos nxdx=\frac{1}{n^2}\left[(-1)^n-1\right]$$

$$\therefore a_n=\frac{1}{4n^2}\left[(-1)^n-1\right]=\begin{cases}0 & , \ n \ even\\ -\dfrac{1}{2n^2} & , \ n \ odd\end{cases}$$

وبالمثل فإن:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi x}{4}\sin nx dx=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}x\sin nx dx$$

ولكن:

$$\int_0^{\pi}x\sin nx dx=\frac{-\pi}{n}(-1)^n$$

$$\therefore b_n=\frac{-\pi}{4n}(-1)^n$$

$$\therefore f(x)=\frac{\pi^2}{16}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n-1}{4n^2}\cos nx-\frac{(-1)^n\pi}{4n}\sin nx\right]$$

$$=\frac{\pi^2}{16}+\left[-\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2.3^2}\cos 3x-\cdots\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{\pi}{4}\sin x-\frac{\pi}{4.2}\sin 2x+\frac{\pi}{4.3}\sin 3x+\cdots\right]$$

$$=\frac{\pi^2}{16}+\left[\left(-\frac{1}{2}\cos x+\frac{\pi}{4}\sin x\right)-\frac{\pi}{4.2}\sin 2x\right.$$

$$\left.+\left(-\frac{1}{2.3^2}\cos 3x+\frac{\pi}{4.3}\sin 3x\right)+\cdots\right]$$

<u>**المسألة (6):**</u> (أ) <u>لإيجاد متسلسلة الجيب:</u> نضع $f(x)=x=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$ حيث:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{-x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\left[\frac{-\pi\cos n\pi}{n}\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{-\pi}{n}(-1)^n\right]=\frac{-2}{n}(-1)^n$$

$$\therefore x=2\left[\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\cdots\right]$$

(ب) لإيجاد متسلسلة جيب التمام: نضع $f(x)=x=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ حيث:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{2}\right]=\pi$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{1}{n^2}\left[(-1)^n-1\right]\right\}=\begin{cases}0 & ,\ n\ \ even\\ \dfrac{-4}{\pi n^2} & ,\ n\ \ odd\end{cases}$$

$$f(x)=x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\cdots\right]$$

وبوضع $x=0$ فإن:

$$0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right]$$

$$\therefore\frac{\pi}{2}=\frac{4}{\pi}\left[1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right]$$

$$\therefore\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots$$

وهو المطلوب.

المسألة (7) : الدالة المعطاة دورتها $= 4 = 2\ell \leftarrow \ell = 2$

متسلسلة فوربيه:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{a}+b_n\sin\frac{n\pi x}{a}\right]$$

حيث:

$$a_0=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}kdx=\frac{k}{2}[x]_{-1}^{1}=\frac{k}{2}[1+1]=k$$

$$a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$=\frac{k}{2}\int_{-1}^{1}\cos\frac{n\pi}{2}xdx=\frac{k}{2}\left[\frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right]_{-1}^{1}$$

$$=\frac{k}{n\pi}\left[\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)-\sin\left(\frac{-n\pi}{2}\right)\right]=\frac{k}{n\pi}\left[2\sin\frac{n\pi}{2}\right]=\frac{2k}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

حيث:

$$\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0 & (n=0,2,4,\cdots)\\ 1 & (n=1,5,9,\cdots)\\ -1 & (n=3,7,11,\cdots)\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{k}{2}\int_{-1}^{1}\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{k}{2}\left[\frac{-\cos\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right]_{-1}^{1}$$

$$=\frac{-k}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-\cos\left(-\frac{n\pi}{2}\right)\right]=\frac{-k}{n\pi}\left[\cos\frac{n\pi}{2}-\cos\frac{n\pi}{2}\right]=0$$

وهذا يعني أن الدالة المعطاة دالة زوجية.

متسلسلة فورييه تصبح بالصورة:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)=\frac{k}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2k}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi x}{2}$$

$$=\frac{k}{2}+\frac{2k}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi x}{2}$$

$$=\frac{k}{2}+\frac{2k}{\pi}\left[\cos\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5}\cos\frac{5\pi x}{2}-\frac{1}{7}\cos\frac{7\pi x}{2}+\cdots\cdots\right]$$

وهو المطلوب.