الباب الثالث

التحويلات التكاملية (2): تحويلات فورييه

تحويلات فورييه التكاملية Fourier Integral Transforms

يوجد ثلاث صور لهذه التحويلات:

التحويل الجيبي sin Transf.	تحويل جيب التمام cos Transf.	التحويل المركب Complex Transf.
لانهائي Infinite — محدود Finite	لانهائي Infinite — محدود Finite	

أولاً: التحويل الجيبي لفورييه :

[1] التحويل الجيبي اللانهائي:

تعريف: يعرف تحويل فورييه الجيبي اللانهائي للدالة $f(x)$ حيث $0<x<\infty$ بالتكامل:

$$f_s(n)=\int_0^{\infty}F(x)\sin nx\,dx$$

حيث n عدد صحيح موجب (Integer).

وتسمى $F(x)$ بالتحويل الجيبي العكسي للتحويل $f_s(n)$ وتعطي $F(x)$ بالتكامل الآتي:

$$F(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f_s(n)\sin nx\,dn$$

وعلى هذا: فإذا كانت: $f_s=f_s\left[F(x)\right]$ ، فإن $F(x)=f_s^{-1}\left[f_s\right]$

حيث f_s هي رمز لتحويل فورييه الجيبي، f_s^{-1} هي رمز لتحويل فورييه العكسي الجيبي.

أمثلة محلولة:

مثال(1): أوجد تحويل فورييه الجيبي للدالة: $F(x)=e^{-\lambda x}$ حيث $\lambda>0$

الحل: من التعريف

$$f_s(n)=\int_0^\infty F(x)\sin nx\;dx=\int_0^\infty e^{-\lambda x}\sin nx\;dx \qquad (1)$$

لحساب هذا التكامل: نستخدم التكامل بالتجزئ أو نستخدم العلاقة:

$$\int e^{ax}\sin bx\;dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin bx-b\cos bx]$$

بوضع $a=-\lambda,\ b=n$

$$\int e^{-\lambda x}\sin nx\,dx=\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2+n^2}[-\lambda\sin nx-n\cos nx]\ \Big|_0^\infty$$

$$=0-\frac{1}{\lambda^2+n^2}[-\lambda\sin 0-n\cos 0] \qquad \begin{vmatrix} e^{-\infty}=0\\ e^{0}=1\end{vmatrix}$$

$$=-\frac{1}{\lambda^2+n^2}[-n]=\frac{n}{\lambda^2+n^2}=f(n)$$

إذاً تحويل فورييه الجيبي اللانهائي للدالة $F(x)=e^{-\lambda x}$ هو:

$$f(n)=\frac{n}{\lambda^2+n^2}$$

وهو المطلوب.

مثال(2): أوجد تحويل فورييه الجيبي اللانهائي العكسي للدالة $f(n)=e^{-\lambda n}$

الحل : المطلوب هو $F(x)$، فمن التعريف:

$$F(x)=f_s^{-1}[f_s(n)]=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f_s(n)\sin x\;nx\;dn$$

بالتعويض عن $f_s(n)=e^{-\lambda n}$

$$\therefore\ F(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\lambda n}\sin x\;nx\;dn \qquad (1)$$

هذا التكامل أيضاً يمكن إيجاده إما بالتجزئ أو باستخدام العلاقة :

$$\int e^{ax}\sin\;bx\;dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin\;bx-b\cos\;bx]$$

بوضع $x = n$:

$$\int e^{an} \sin bx \, dx = \frac{e^{an}}{a^2+b^2}\left[a\sin bn - b\cos bn\right]$$

بوضع $a=-\lambda\,,\, b=x$:

$a=-\lambda\,,\, b=x$

$$\therefore \int e^{-\lambda n} \sin nx \, dx = \frac{e^{-\lambda n}}{\lambda^2+x^2}\left[-\lambda\sin nx - x\cos nx\right]\Big|_0^\infty$$

$$= 0-\frac{1}{\lambda^2+x^2}\left[-\lambda\sin 0 - x\cos 0\right]=\frac{x}{\lambda^2+x^2} \qquad (2)$$

بالتعويض في (1):

$$F(x)=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{\lambda^2+x^2}\right]=\frac{2x}{\pi(\lambda^2+x^2)}$$

وهو المطلوب.

<u>**مثال(3):**</u> باستخدام تحويل فورييه الجيبي العكسي واستخدام العلاقة

$$\therefore \int e^{-\lambda n} \sin nx \, dx = \frac{n}{\lambda^2+n^2} \qquad [\text{مثال}(1)]$$

أوجد العلاقة التكاملية:

$$\int_0^\infty \frac{n\sin nx}{a^2+n^2}\,dn=\frac{2}{\pi}e^{-ax}$$

<u>**الحل:**</u> من تعريف تحويل فورييه الجيبي العكسي اللانهائي:

$$F(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f_s(n)\sin nx\,dn \;\;,\;\; f_s(n)=\int_0^\infty F(x)\sin nx\,dx$$

$$\therefore F(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin nx\,dn\int_0^\infty F(x)\sin nx\,dx$$

وبأخذ $F(x)=e^{-ax}$:

$$\therefore e^{-ax}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin nx\,dn\int_0^\infty e^{-ax}\sin nx\,dx$$

ومن رأسي المسألة فإن:

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin nx\,dx=\frac{n}{a^2+n^2}$$

$$\therefore e^{-ax}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin nx\,dn\left[\frac{n}{a^2+n^2}\right]=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{n\sin nx}{a^2+n^2}dn$$

$$\therefore\ \int_0^\infty \frac{n\sin nx}{a^2+n^2}dn=\frac{2}{\pi}e^{-ax}$$

وهو المطلوب.

<u>في حالة $a=1$:</u>

$$\int_0^\infty \frac{n\sin nx}{1+n^2}dn=\frac{2}{\pi}e^{-x}$$

[2] <u>التحويل الجيبي المحدود</u>:

<u>تعريف</u>: يعرف هذا التحويل للدالة $F(x)$ حيث $0<x<\ell$ بالتكامل:

$$f_s(n)=\int_0^\ell F(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

حيث n عدد صحيح موجب.

<u>وفي الحالة الخاصة</u>: عندما $\ell=\pi$:

$$\therefore\ f_s(n)=\int_0^\pi F(x)\sin nx\,dx$$

ويعرف التحويل العكسي بعلاقة المجموع الآتية:

$$F(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}f_s(n)\sin nx$$

<u>مثال</u>: أوجد التحويل الجيبي المحدود لفوريية للدالة $F(x)=x$ حيث $0<x<2$

<u>الحل</u>: من التعريف:

$$f_s(n)=\int_0^\ell F(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

وعندما $F(x)=x\ ,\ \ell=2$

$$\therefore\ f_s(n)=\int_0^2 \underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx}_{dv} \qquad (1)$$

ولإيجاد التكامل في (1): نستخدم طريقة التكامل بالتجزئ:

$$\int_a^b u\ dv = uv\ \Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

فبأخذ $u=x$: $\leftarrow$ $du=dx$

وبأخذ $dv=\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$ ، فإن $\therefore\ v=-\frac{1}{n\pi/2}\cos\frac{n\pi x}{2}=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}$

$$\therefore\ \int_0^2 x\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2+\frac{2}{n\pi}\int_0^2\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\left[2\cos n\pi-0\right]+\frac{2}{n\pi}\left[\ \frac{1}{n\pi/2}\sin\frac{n\pi x}{2}\ \right]_0^2$$

$$=-\frac{4}{n\pi}\cos n\pi+\frac{4}{n^2\pi^2}\left[\sin n\pi-\sin 0\right]=-\frac{4}{n\pi}\cos n\pi$$

ولكن: $\cos n\pi=(-1)^n$ [من نظرية المتغير المركب].

$$\therefore\ \int_0^2 x\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx=-\frac{4}{n\pi}(-1)^n=\frac{4}{n\pi}(-1)(-1)^n=\frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

وهو المطلوب.

ثانياً: تحويل جيب التمام لفورييه:

[1] تحويل جيب التمام اللانهائي:

تعريف: يعرف هذا التحويل للدالة $F(x)$ حيث $0<x<\infty$ بالتكامل الآتي:

$$f_c(n)=\int_0^\infty F(x)\cos\ nx\ dx$$

الدالة $F(x)$ هي تحويل جيب التمام العكسي لفورييه وتعرف بالتكامل:

$$F(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f_c(n)\cos nx\,dx$$

أمثلة محلولة:

مثال(1): أوجد تحويل فورييه لجيب التمام للدالة: $F(x)=e^{-\lambda x}$ حيث $\lambda>0$

الحل: من التعريف

$$f_c(n)=\int_0^\infty F(x)\cos\ nx\ dx=\int_0^\infty e^{-\lambda x}\cos\ nx\ dx \qquad (1)$$

ومن العلاقة:

$$\int e^{ax}\cos\ bx\ dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos bx+b\sin bx]$$

فبوضع $a=-\lambda, b=n$

$$\therefore \int_0^\infty e^{-\lambda x}\cos nx\,dx=\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2+n^2}[-\lambda\cos nx+n\sin nx]\ \Big|_0^\infty$$

$$=-\frac{1}{\lambda^2+n^2}[-\lambda\cos 0+n\sin 0]=\frac{\lambda}{\lambda^2+n^2}$$

وهو المطلوب.

ملاحظة: يستخدم التكامل $\int_0^\infty e^{-\lambda x}\cos nx\,dx=\frac{\lambda}{\lambda^2+n^2}$ كثيراً في حل بعض المسائل في تحليل فورييه.

مثال(2): أوجد تحويل جيب التمام العكسي $f_c^{-1}\left[e^{-\lambda n}\right]$

الحل: من التعريف:

$$F(x)=f_c^{-1}[f_c]=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(n)\cos\ nx\ dn=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\lambda n}\cos\ nx\ dn$$

ولإيجاد هذا التكامل نستخدم العلاقة السابقة للتكامل ($\int e^{ax}\cos bx\ dx$)

$$\therefore\ F(x)=\frac{2}{\pi}\left[\frac{e^{-\lambda n}}{\lambda^2+x^2}(-\lambda\cos nx+n\sin nx)\right]\Bigg|_0^{\infty} \qquad \begin{vmatrix} a=-\lambda \\ b=x \end{vmatrix}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[0-\frac{1}{\lambda^2+x^2}(-\lambda\cos 0+x\sin 0)\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{\lambda^2+x^2}(-\lambda)\right]=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{\lambda^2+x^2}\right]$$

وهو المطلوب.

<u>مثال(3):</u> باستخدام تحويلات فورييه العكسية اللانهائية واستخدام العلاقة التكاملية:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos nx\,dx=\frac{a}{a^2+n^2} \qquad \text{(مثال(1))}$$

أثبت أن:

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos nx}{1+n^2}\,dn=\frac{\pi}{2}e^{-x}\ , \quad (x>0)$$

<u>الحل:</u> من تعريف تحويل فورييه العكسي اللانهائي:

$$F(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f_c(n)\cos nx\,dn$$

حيث:

$$f_c(n)=\int_0^{\infty} F(x)\cos nx\,dx$$

$$\therefore\ F(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos nx\,dn\int_0^{\infty} F(x)\cos nx\,dx$$

وبأخذ $F(x)=e^{-x}$:

$$e^{-x}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos nx\,dn\int_0^{\infty} e^{-x}\cos nx\,dx$$

ولكن من رأس المسألة. وبوضع $a=1$

$$\int_0^\infty e^{-x}\cos nx\,dx=\frac{1}{1+n^2}$$

$$\therefore e^{-x}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos nx\,dn\left[\frac{1}{1+n^2}\right]=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\cos nx}{1+n^2}dn$$

$$\therefore\ \int_0^\infty\frac{\cos nx}{1+n^2}dn=\frac{2}{\pi}e^{-x}$$

وهو المطلوب.

ملحوظة: يعتبر هذا التكامل من التكاملات الهامة التي تستخدم في التطبيقات الفيزيائية.

مثال(4): باستخدام نتيجة المثال رقم(3) أوجد تحويل فورييه لجيب التمام للدالة:

$$F(x)=\frac{1}{1+x^2}\quad \text{حيث}\quad 0<x<\infty$$

الحل: من تعريف تحويل فورييه النهائي لجيب التمام:

$$f_c(n)=\int_0^\infty F(x)\cos nx\,dx=\int_0^\infty\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\cos nx\,dx=\int_0^\infty\frac{\cos nx}{1+x^2}dx \qquad (1)$$

ولكن من مثال(3) [بتبديل موضعي n,x]:

$$\int_0^\infty\frac{\cos nx}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}e^{-n} \qquad (2)$$

بالتعويض من (2) في (1):

$$\therefore f_c(n)=\frac{\pi}{2}e^{-n}$$

وهو المطلوب.

مثال(5): باستخدام التكامل الآتي:

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos nx\,dx=\frac{a}{a^2+n^2}$$

أوجد تحويل فورييه لجيب التمام للدالة $F(x)=x^2e^{-ax}$ حيث $a>0$.

الحل: من التعريف

$$f_c(n)=\int_0^\infty F(x)\cos nx\,dx=\int_0^\infty x^2e^{-ax}\cos nx\,dx \qquad (1)$$

ولإيجاد التكامل في (1): نستخدم التكامل المعطي وهو:

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos nx\,dx=\frac{a}{a^2+n^2} \qquad (2)$$

ونطبق قاعدة ليبنتز المعروفة للتفاضل داخل (أو تحت) علامة التكامل، وهي:

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial a}\left[e^{-ax}\cos nx\,dx\right]=\frac{d}{da}\left[\frac{a}{a^2+n^2}\right] \qquad (3)$$

[بتفاضل طرفي (2) بالنسبة للبارامتر a، حيث التفاضل في الطرف الأيسر هو تفاضل جزئي بالنسبة للبارامتر a داخل علامة التكامل].

وبإجراء التفاضل داخل علامة التكامل في الطرف الأيسر والتفاضل الكلي في الطرف الأيمن نحصل على:

$$\int_0^\infty (-x)e^{-ax}\cos nx\,dx=\frac{(a^2+n^2)(1)-a(2a)}{(a^2+n^2)^2}$$

$$\therefore -\int_0^\infty x\,e^{-ax}\cos nx\,dx=\frac{n^2-a^2}{(a^2+n^2)^2}$$

وبتطبيق قاعدة ليبنتز مرة ثانية [بالتفاضل بالنسبة للبارامتر a]:

$$-\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial a}\left[x\,e^{-ax}\cos nx\,dx\right]=\frac{d}{da}\left[\frac{n^2-a^2}{(a^2+n^2)^2}\right]$$

$$\therefore -\int_0^\infty x\cdot(-x)\,e^{-ax}\cos nx\,dx=\frac{(a^2+n^2)^2(-2a)-(a^2+n^2)\cdot 2(a^2+n^2)\cdot 2a}{(a^2+n^2)^4}$$

$$\therefore \int_0^\infty x^2\,e^{-ax}\cos nx\,dx=\frac{-2a(a^2+n^2)^2-4a\,(a^2+n^2)(n^2-a^2)}{(a^2+n^2)^4}$$

$$= \frac{-2a(a^2+n^2)-4a\ (n^2-a^2)}{(a^2+n^2)^3}$$

$$= \frac{-2a[a^2+n^2+2\ (n^2-a^2)]}{(a^2+n^2)^3}$$

$$= \frac{-2a(3n^2-a^2)}{(a^2+n^2)^3} = \frac{2a}{(a^2+n^2)^3}(a^2-3n^2)$$

بالتعويض في (1) نحصل على:

$$f_c(n) = \int_0^\infty x^2\, e^{-ax} \cos nx\, dx = \frac{2a}{(a^2+n^2)^3}(a^2-3n^2) \qquad (4)$$

وهو المطلوب.

حالة خاصة: عندما $a=1$: بالتعويض في (4):

$$f_c(n) = \int_0^\infty x^2\ e^{-x} \cos nx\, dx = \frac{2}{(1+n^2)^3}(1-3n^2)$$

وهو تكامل هام يستخدم أيضاً في التطبيقات الفيزيائية.

[2] تحويل جيب التمام المحدود:

يعرف هذا التحويل للدالة $F(x)$ حيث $0<x<\ell$ بالعلاقة:

$$f_c(n) = \int_0^\ell F(x) \cos\frac{n\pi x}{\ell}\, dx \qquad (1)$$

وعندما $\ell=\pi$ كحالة خاصة:

$$f_c(n) = \int_0^\pi F(x) \cos nx\, dx \qquad (2)$$

ويعرف التحويل العكسي بالعلاقة:

$$F(x) = \frac{1}{\pi} f_c(0) + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty f_c(n) \cos nx$$

حيث: $f_c(0) = \int_0^\pi F(x)\, dx$

مثال: أوجد تحويل جيب التمام المحدود لفوريييه للدالة $F(x) = x$ حيث $0 < x < \pi$.

الحل: من التعريف (المعادلة (2)):

$$f_c(n) = \int_0^\pi F(x) \cos nx \, dx = \int_0^\pi x \cos nx \, dx \qquad (1)$$

ولإيجاد التكامل في (1) نستخدم التكامل بالتجزئ كالآتي:

$$f_c(n) = \int_0^\pi x \cdot \frac{1}{n} d(\sin nx)$$

وذلك لأن:

$$\cos n x \, dx = \frac{1}{n} d(\sin nx)$$

$$[d(\sin nx) = n \cdot \cos n x \, dx]$$

$$\therefore f_c(n) = \frac{1}{n} \int_0^\pi \underset{u}{x} \, d(\underbrace{\sin n x}_{v})$$

$$u = x \qquad \therefore du = dx$$

$$dv = d(\sin nx) \qquad \therefore v = \sin nx$$

$$\therefore f_c(n) = \frac{1}{n} \left[x \cdot \sin nx \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin nx \, dx \right]$$

$$= \frac{1}{n} \left[0 - \int_0^\pi \sin nx \, dx \right] = -\frac{1}{n} \int_0^\pi \sin nx \, dx \qquad \begin{vmatrix} \sin 0 = 0 \\ \sin n\pi = 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{n} \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_0^\pi = \frac{1}{n^2} \left[\cos n\pi - \cos 0 \right]$$

ولكن: $\cos 0 = 1$ ، $\cos n\pi = (-1)^n$ [من التحليل المركب]

$$\therefore f_c(n) = \frac{1}{n^2} \left[(-1)^n - 1 \right]$$

ثالثاً: تحويل فورييه المركب (Complex Fourier Transform)

تعريف: يعرف تحويل فورييه المركب للدالة $F(x)$ حيث $-\infty < x < \infty$ بالعلاقة:

$$f(n) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{inx}\, dx \qquad (1)$$

حيث e^{inx} هي قلب أو نواة (Kernel) التحويل.

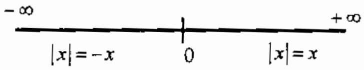
ويعرف تحويل فورييه المركب العكسي بالعلاقة:

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(n) e^{-inx}\, dn \qquad (2)$$

أمثلة محلولة:

مثال(1): أوجد تحويل فورييه المركب للدالة $F(x) = e^{-|x|}$

الحل:



معنى $|x|$ في المنطقة من $(-\infty)$ إلى $(+\infty)$:

$$|x| = -x \quad (-\infty \to 0) \qquad\qquad f(x) = \begin{cases} e^{x} & (x \ge 0) \\ e^{x} & (x < 0) \end{cases}$$
$$|x| = x \quad (0 \to \infty)$$

تسمى $|x|$ عادة بدالة المقياس.

ومن التعريف فإن تحويل فورييه المركب للدالة $F(x)$ هو:

$$f(n) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{inx}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{inx}\, dx = \int_{-\infty}^{0} e^{+x} \cdot e^{inx}\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x} \cdot e^{inx}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{(1+in)x}\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(1-in)x}\, dx = -\int_{0}^{-\infty} e^{(1+in)x} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(1-in)x} dx$$

$$= -\left[\frac{e^{(1+in)x}}{1+in}\right]_0^{-\infty} + \left[\frac{e^{-(1-in)x}}{-(1-in)}\right]_0^{\infty}$$

$$= -\frac{1}{1+in}\left[e^{-\infty} - e^{0}\right] - \frac{1}{1-in}\left[e^{-\infty} - e^{0}\right]$$

$$=-\frac{1}{1+in}[0-1]-\frac{1}{1-in}[0-1]=\frac{1}{1+in}+\frac{1}{1-in}$$

$$=\frac{(1-in)+(1+in)}{(1+in)\,(1-in)}=\frac{2}{(1+n^2)}$$

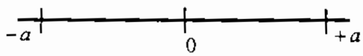
حيث $e^{-\infty}=0,\ e^{0}=1,\ e^{\infty}=\infty$ ، $(a+b)(a-b)=a^2-b^2\,, i=\sqrt{-1}\,, i^2=-1$

وهو المطلوب.

<u>مثال(2):</u> أوجد تحويل فورييه المركب للدالة

$$f(x)=\begin{cases}1-x^2 & |x|\le 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$

<u>الحل:</u> معنى أن $|x|\le a$ ، $|x|>a$ هو الفترة $-a\le x\le a$



إذاً التكامل في المسألة سوف يكون في الفترة $-1\le x\le 1$ للدالة $f(x)=1-x^2$

ومن تعريف تحويل فورييه المركب: $f(n)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{inx}\,dx$

وفي المسألة:

$$f(n)=\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,e^{inx}\,dx \qquad (1)$$

<u>ولإيجاد التكامل في (1):</u> نستخدم طريقة التكامل بالتجزئ

نضع: $1-x^2=u \leftarrow \therefore du=-2x\,dx$

ونضع: $e^{inx}dx=dv \leftarrow \therefore v=\frac{e^{inx}}{in}$

$$f(n)=\left[(1-x^2)\cdot\frac{e^{inx}}{in}\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{e^{inx}}{in}(-2x\ dx)$$

$$=[0]+\frac{2}{in}\int_{-1}^{1}x\,e^{inx}\,dx \qquad (2)$$

ولكن:

$$\int_{-1}^{1} x\, e^{inx}\, dx = \left[x \cdot \frac{e^{inx}}{in} \right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{e^{inx}}{in} dx = \frac{1}{in}\left[e^{in} - (-e^{in}) \right] - \frac{1}{in}\left[\frac{e^{inx}}{in} \right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{in}\left[e^{in} + e^{-in} \right] + \frac{1}{n^2}\left[e^{in} - e^{in} \right] \qquad (3)$$

وذلك بوضع:

$$x = u \to dx = du$$

$$e^{inx}\, dx = dv \to v = \frac{e^{inx}}{in}$$

وباستخدام معادلتي أويلر [في التحليل المركب]:

$$\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \cos x \ , \ \frac{1}{2}(e^{ix} - e^{-ix}) = i \sin x$$

فتصبح (3):

$$\int_{-1}^{1} x\, e^{inx}\, dx = \frac{2\cos n}{in} + \frac{2 i \sin n}{n^2} \qquad (4)$$

بالتعويض في (2):

$$f(n) = \frac{2}{in}\left[\frac{2\cos n}{in} + \frac{2i \sin n}{n^2} \right]$$

$$= -\frac{4\cos n}{n^2} + \frac{4 \sin n}{n^3} = \frac{4}{n^3}\left[\sin n - n\cos n \right]$$

وهو المطلوب.

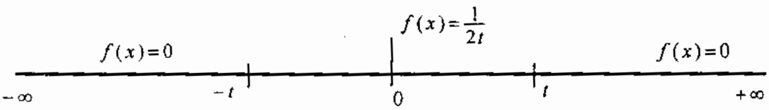
مثال(3): أوجد تحويل فورييه للدالة:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2t} & |x|\le t\\ 0 & |x|>t\end{cases}\quad ,\quad t>0$$

ثم أوجد النهاية التي يؤول إليها هذا التحويل عندما $t\to 0$.

الحل:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2t} & -t\le x\le t\\ 0 & x>t \quad or \quad x<-t\end{cases}$$



تحويل فورييه المركب للدالة $f(x)$ هو:

$$f(n)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{inx}dx=\int_{-t}^{t}(\frac{1}{2t})e^{inx}\,dx$$

$$=\frac{1}{2t}\left[\frac{e^{inx}}{in}\right]_{-t}^{t}=\frac{1}{2t}\,\frac{1}{in}\left[e^{int}-e^{-int}\right]=\frac{1}{2t}\,\frac{1}{in}\left[2i\sin nt\right]=\frac{\sin nt}{nt}$$

عندما $n=0$: فإن

$$f(n)\Big|_{n=0}=f(0)=\int_{-t}^{t}(\frac{1}{2t})\,dx=\frac{1}{2t}\left[x\right]_{-t}^{t}=\frac{1}{2t}\left[2t\right]=1$$

وهو تحويل فورييه للدالة المعطاه عندما $n=0$. ويصبح تحويل فورييه للدالة المعطاه بالصورة:

$$f(n)=\begin{cases}\dfrac{\sin nt}{nt}, & n\ne 0\\ 1\ , & n=0\end{cases}$$

عندما $t \to 0$: فإن نهاية التحويل $f(n)$ تكون:

$$\lim_{t\to 0} f(n) = \lim_{t\to 0} \frac{\sin nt}{nt} = 1$$

وهو المطلوب.

ملحوظة: من قوانين النهايات [في حساب التفاضل]

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$$

مثال(4):

(أ) أثبت أن تحويل فورربيه المركب للدالة:

$$f(n) = \frac{2\sin na}{n} \text{ وهو } F(x) = \begin{cases} 1 & |x| \le a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

(ب) باستخدام تحويل فورييه العكسي المركب للدالة $f(n)$، أثبت أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n}[\sin na \cos nx]\, dn = \begin{cases} \pi & (|x| \le a) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases}$$

(ج) استخدم النتيجة في (ب) لإثبات التكامل:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

ملحوظة: هذا المثال يوضح استخدام تحويلات فورييه لإيجاد التكاملات.

الحل: **الجزء(أ):** تحويل فورييه المركب للدالة $F(x)$ هو:

$$f(n) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{inx}\, dx$$

وحيث أن $F(x) = 1$ في الفترة $-a \le x \le a$

$$\therefore\ f(n) = \int_{-a}^{a} (1) e^{inx}\, dx = \int_{-a}^{a} e^{inx}\, dx = \left[\frac{e^{inx}}{in}\right]_{-a}^{a} = \frac{1}{in}\left[e^{ina} - e^{-ina}\right]$$

ولكن من معادلتي أويلر $i\sin x = \frac{1}{2}\left[e^{ix} - e^{-ix}\right] \leftarrow$ $\therefore e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin x$

$$\therefore f(n)=\frac{1}{in}[2i\sin na]=\frac{2\sin na}{n}$$

وهو المطلوب أولاً.

<u>الجزء(ب):</u> تحويل فورييه العكسي المركب للدالة $f(n)=\dfrac{2\sin na}{n}$ هو [من التعريف]

$$F(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(n)\,e^{-inx}\,dn=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{2\sin na}{n}\right]e^{-inx}\,dn \qquad (1)$$

ومن معادلتي أويلر فإن:

$$e^{-inx}=\cos nx-i\sin nx$$

$$\therefore F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\sin na}{n}\right][\cos nx-i\sin nx]dn$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{n}\sin na\ \cos nx\,dn-\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin na\ \sin nx}{n}dn$$

ولكن: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin na\ \sin nx}{n}dn=0$ [لأنه تكامل دالة فردية من $-\infty$ إلى $+\infty$]

$$\therefore F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{n}\sin na\ \cos nx\,dn$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{n}\sin na\ \cos nx\,dn=\pi\ F(x)$$

ولكن:

$$F(x)=\begin{cases}1 & |x|\le a\\ 0 & |x|>a\end{cases}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{n}\sin na\ \cos nx\ dn=\begin{cases}\pi & |x|\le a\\ 0 & |x|>a\end{cases}$$

وهو المطلوب ثانياً.

الجزء(ج): بأخذ $x=0,\ a=1$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\ dn=\pi$$

ولكن $(\sin n)$ دالة زوجية حيث: $\int_{-\infty}^{\infty}(\text{دالة زوجية}) = 2\int_{0}^{\infty}(\text{للدالة})$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin n}{n}\ dn=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin n}{n}\ dn=\pi$$

$$\therefore \int_{0}^{\infty}\frac{\sin n}{n}\ dn=\frac{\pi}{2}$$

وبأخذ $n=x$:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\ dx=\frac{\pi}{2}$$

وهو المطلوب ثالثاً.

متطابقة بارســيڤال لتحويلات فورييه Parseval's Identity

تنص متطابقة بارســيڤال لتحويلات فورييه على الآتي:

إذا كان $f(n)$ هو تحويل فورييه للدالة $F(x)$ حيث:

$$f(n)=\int_{-\infty}^{\infty}F(x)e^{inx}\,dx\ ,\quad F(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(n)e^{-inx}\,dn$$

فإن:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}|F(x)|^2\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(n)|^2\,dn}$$

مثال: إذا كان تحويل فورييه للدالة $F(x)$ ، حيث:

$$F(x)=\begin{cases}1 & |x|\le a\\ 0 & |x|>a\end{cases}$$

يعطي بالعلاقة: $n\neq 0\ ,\ f(n)=\dfrac{2\sin na}{n}$ [سبق أثباتها].

فاستخدم متطابقة بارســيڤال لإثبات أن:

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}$$

الحل: من متطابقة بارســيڤال:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(n)|^2 dn \qquad (2)$$

وبالتعويض عن:

$$F(x)=\begin{cases}1 & |x|\le a\\ 0 & |x|>a\end{cases}$$

أي أن $F(x)=1$ في المنطقة $-a\le x\le a$، وعن $f(n)=\dfrac{2\sin na}{n}$

$$\therefore \int_{-a}^{a}(1)^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4\sin^2 na}{n^2}dn$$

$$\therefore [x]_{-a}^{a} = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\int_0^\infty \frac{4\sin^2 na}{n^2}dn$$

$$\therefore 2a = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin^2 na}{n^2}dn$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{\sin^2 na}{n^2}dn = \frac{\pi a}{2} \qquad (2)$$

وبوضع $x=na \leftarrow n=\dfrac{x}{a} \leftarrow dn=\dfrac{dx}{a}$، $n^2=\dfrac{x^2}{a^2}$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2/a^2}\frac{dx}{a}=\frac{\pi a}{2} \rightarrow \int_0^\infty a^2\,\frac{\sin^2 x}{x^2}\frac{dx}{a}=\frac{\pi a}{2}$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}$$

وهو المطلوب.

إيجاد بعض التكاملات باستخدام تحويلات فوريية:

مثال: أوجد تحويلات فوريية للجيب وجيب التمام للدالة $F(x)=e^{-ax}$ ومن ذلك أوجد قيمة التكاملين:

$$\int_0^\infty \frac{\cos nx}{a^2+n^2}\,dn \quad , \qquad \int_0^\infty \frac{n\sin nx}{a^2+n^2}\,dn$$

الحل: تحويل فوريية لجيب التمام للدالة e^{-ax}:

$$\mathrm{I}_1=\int_0^\infty e^{-ax}\cos nx\,dx \tag{1}$$

تحويل فوريية للجيب للدالة e^{-ax}:

$$\mathrm{I}_2=\int_0^\infty e^{-ax}\sin nx\,dx \tag{2}$$

بإجراء التكامل بالتجزئ للعلاقة (1) نحصل على:

$$\mathrm{I}_1=\left[-\frac{1}{a}e^{-ax}\cos nx\right]_0^\infty-\frac{n}{a}\int_0^\infty e^{-ax}\sin nx\,dx=[\frac{1}{a}]-\frac{n}{a}[\mathrm{I}_2]=\frac{1}{a}-\frac{n}{a}\mathrm{I}_2 \tag{3}$$

وبالمثل بعد إجراء التكامل بالتجزئ للعلاقة (2) نحصل على:

$$\mathrm{I}_2=\frac{n}{a}I_1 \tag{4}$$

من (4) ,(3) نجد أن:

$$\mathrm{I}_1=\frac{1}{a}-\frac{n}{a}[\frac{n}{a}\mathrm{I}_1]=\frac{1}{a}-\frac{n^2}{a^2}\mathrm{I}_1\to \mathrm{I}_1(1+\frac{n^2}{a^2})=\frac{1}{a}$$

$$\therefore\ \mathrm{I}_1\left(\frac{a^2+n^2}{a^2}\right)=\frac{1}{a}\ \to\ \mathrm{I}_1=\frac{a}{a^2+n^2} \tag{5}$$

وبالتعويض في (4):

$$\mathrm{I}_2=\frac{n}{a}\left[\frac{a}{a^2+n^2}\right]=\frac{n}{a^2+n^2} \tag{6}$$

وبإعتبار الدالة $F(x)=e^{-ax}$ حيث تحويل فوريية الجيبي لها هو:

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin nx\,dx = \mathrm{I}_2 = \frac{n}{a^2+n^2} \tag{7}$$

وتحويل فورييه لجيب التمام لها هو:

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos nx\,dx = \mathrm{I}_1 = \frac{a}{a^2+n^2} \tag{8}$$

ويكون تحويل فورييه العكسي للعلاقتين (8) ,(7) هو:

$$e^{-ax} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{n}{a^2+n^2}\sin nx\,dx$$

$$e^{-ax} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{a}{a^2+n^2}\cos nx\,dx$$

وهذا يؤدي إلى التكاملين:

$$\int_0^\infty \frac{n\sin nx}{a^2+n^2}\,dn = \frac{\pi}{2}e^{-ax}$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos nx}{a^2+n^2}\,dn = \frac{\pi}{2a}e^{-ax}$$

(وقد سبق إيجاد هذين التكاملين في أمثلة سابقة).

خاصية الالتفاف أو الطي (Convolution) لتحويلات فورييه:

[1] تعريف الالتفاف: إذا كان لدينا الدالتين $F_1(x), F_2(x)$ القابلتين للتكامل في الفترة $(-\infty < x < +\infty)$ وكان تحويل فورييه لهما هو: $F_1(s), F_2(s)$.

يعرف التفاف الدالتين $F_1(x), F_2(x)$ بالعلاقة:

$$F(x) = F_1(x) * F_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(s)\ F_2(x-s)\,ds$$

لكل قيم x التي يكون فيها قيمة لهذا التكامل، ويلاحظ أن:

$$F_1(x) * F_2(x) = F_2(x) * F_1(x)$$

[2] نظرية الالتفاف لتحويل فورييه: تنص هذه النظرية على الآتي:

" تحويل فورييه لالتفاف الدالتين $F_1(x), F_2(x)$ يساوي حاصل ضرب تحويل فورييه لهما. "

رياضياً: إذا كان $F(s)$ هو تحويل فورييه لالتفاف الدالتين $F_1(x), F_2(x)$ أي للدالة $F(x)$ وكان حاصل ضرب تحويل فورييه للدالتين هو $F_1(n)\cdot F_2(n)$، فإن:

$$\boxed{F(s) = F_1(n)\cdot F_2(n)}$$

الإثبات: من تعريف تحويل فورييه المركب للدالة $F(x)$ التي هي إلتفاف الدالتين $F_1(x), F_2(x)$:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{inx}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{inx}\Big[\int_{-\infty}^{\infty} F_1(s)\ F_2(x-s)\,ds\Big]dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F_1(s)\Big[\int_{-\infty}^{\infty} F_2(x-s) e^{inx}\,dx\Big]ds$$

وبوضع $x - s = u$، فإن $x = u + s \leftarrow dx = du$

$$\therefore F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(s)\left[\int_{-\infty}^{\infty} F_2(u) e^{in(u+s)}\, du\right] ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F_1(s) e^{ins}\, dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F_2(u) e^{inu}\, du \; \Big] = F_1(n) \cdot F_2(n)$$

أي أن: تحويل فورييه لالتفاف دالتين يساوي حاصل ضرب تحويل فورييه لهما.

<u>مثال:</u> إذا كانت الدالة $F(t)$ تعرف بالعلاقة الآتية:

$$F(t) = \begin{cases} f(t) e^{-xt}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

أثبت أن تحويلة فورييه (المركبة) للدالة $F(t)$ تساوي تحويلة لابلاس للدالة $f(t)$.

<u>الحل:</u> إذا كانت تحويلة فورييه المركبة للدالة $F(t)$ هي: $F(n)$ حيث:

$$F(n) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\text{int}} F(t)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{\text{int}}(0)\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{int}(e^{-xt}) f(t)\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(x-in)t} f(t)\, dt$$

وبوضع $x - in = s$، فإن:

$$F(n) = \int_{0}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt = L[f(t)]$$

حيث $L[f(t)]$ هي تحويله لابلاس للدالة $f(t)$.

أي أن تحويلة فورييه للدالة $F(t) = f(t) e^{-xt}$ تساوي تحويلة لابلاس للدالة $f(t)$.

وهو المطلوب.

مسائل

1) باستخدام العلاقة $f_s(n)=\int_0^{\pi} F(x)\sin nx\, dx$ ، لتحويلة فورييه المحدودة للجيب، أوجد هذا التحويل للدوال الآتية:

(أ) $F(x)=e^{ax}$ ، الإجابة: $f_s=\dfrac{n}{a^2+n^2}[1+(-1)^n e^{a\pi}]$

(ب) $F(x)=\cos ax$ ، الإجابة: $f_s=\dfrac{n}{a^2+n^2}[1-(-1)^n \cos a\pi]$

2) باستخدام العلاقة $f_s(n)=\int_0^{\infty} F(x)\sin nx\, dx$ ، لتحويل فورييه اللانهائي للجيب أوجد هذا التحويل للدالة: $F(x)=x\,e^{-\frac{x^2}{2}}$.

الإجابة: $f_s=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\, n\, e^{-\frac{n^2}{2}}$

3) باستخدام العلاقة $f_c(n)=\int_0^{\pi} F(x)\cos nx\, dx$ لتحويل جيب التمام المحدود لفورييه، أوجد هذا التحويل للدوال الآتية:

(أ) $F(x)=e^{ax}$ ، الإجابة: $f_c=\dfrac{a}{a^2+n^2}[(-1)^n e^{a\pi}-1]$

(ب) $F(x)=\sin ax$ ، الإجابة: $f_c=\dfrac{n}{a^2-n^2}[(-1)^n \cos a\pi-1]$

4) باستخدام العلاقة $f_c(n)=\int_0^{\infty} F(x)\cos nx\, dx$ ، لتحويل جيب التمام اللانهائي لفورييه، أوجد هذا التحويل للدوال:

(أ) $F(x)=e^{-x}$ ، الإجابة: $f_c=\dfrac{1}{1+n^2}$

(ب) $F(x)=e^{-x^2}$ ، الإجابة: $f_c=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\, e^{-\frac{n^2}{4}}$

5) باستخدام العلاقة $f(n)=\int_{-\infty}^{\infty}F(x)e^{inx}\,dx$ ، لتحويل فورييه المركب، أوجد هذا التحويل للدوال:

(أ) $F(x)=\frac{1}{|x|}$ ، الإجابة: $f(n)=\frac{1}{|n|}$

(ب) $F(x)=e^{-iwx}$ ، حيث $a<x<b$ الإجابة:

$$f(n)=\frac{i}{n}\left[e^{ia(w+n)}-e^{ib(w+n)}\right]$$