الباب الثاني:

التحويلات التكاملية (١): تحويلات لابلاس

Integral Transformations (١) : Laplace's Transforms

تعريف التحويل التكاملي:

إذا كان هناك دالة $k(\alpha,x)$ في المتغيرين α,x، حيث α بارامتر لا يعتمد على x، فإن التكامل المتقارب (Convergent) أي الذي له وجود:

$$\int_{0}^{\infty} k(\alpha,x)F(x)dx$$

يسمى بالتحويل التكاملي للدالة $F(x)$، وتعرف $k(\alpha,x)$ بنواة أو قلب التحويل (kernel).

وتوجد عدة أنواع من التحويلات التكاملية هي:

(١) تحويل لابلاس: وصورته $\int_{0}^{\infty} F(x)e^{-xt}dx$ حيث t بارمتر (حقيقي أو مركب).

(٢) تحويل فورييه: تحويل جيبي $\int_{0}^{\infty} F(x)\sin nxdx$ حيث n عدد صحيح موجب.

تحويل جيب التمام $\int_{0}^{\infty} F(x)\cos nxdx$ حيث n عدد صحيح موجب.

تحويل مركب $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{inx}dx$ حيث n عدد صحيح موجب.

وسنقوم بدراسة تحويلات لابلاس في هذا الباب ونؤجل دراسة تحويلات فورييه إلى الباب التالي مع ملاحظة أن بعض المراجع تطلق على تلك التحويلات اسم محولات (Transforms).

<u>دراسة تفصيلية لتحويلات لابلاس:</u>

<u>تعريف</u>: يعرف تحويل (أو محول لابلاس) للدالة $F(t)$ (Laplace transform)

المعرفة لسائر قيم t الموجبة بالعلاقة الآتية:

$$L\{F(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)dt \qquad (1)$$

حيث s بارمتر (حقيقي أو مركب)، $s > 0$

ويكون تحويل لابلاس موجوداً إذا كان التكامل في (١) متقارباً (موجوداً أو أن لـــه قيمة محدودة) .

<u>إيجاد تحويلات لابلاس للدوال البسيطة:</u>

<u>مثال(١):</u> أوجد تحويل لابلاس للدالة $F(t) = a$ ، حيث a ثابت

<u>الحل:</u> نستخدم التعريف:

$$L[a] = \int_0^\infty e^{-st}(a)dt = a\int_0^\infty e^{-st}dt = a[\frac{e^{-st}}{-s}]\Big|_0^\infty$$

$$= -\frac{a}{s}[e^{-\infty} - e^0] = -\frac{a}{s}[0-1] = \frac{a}{s} \qquad \Big| e^0 = 1, e^\infty = \infty, e^{-\infty} = 0$$

$$\therefore \quad L[a] = \frac{a}{s},\ s > 0$$

<u>حالة خاصة</u>: عندما $a = 1$:

$$F(t) = 1 \quad \rightarrow \quad L[1] = \frac{1}{s}$$

<u>مثال(٢):</u> أوجد تحويل لابلاس للدالة $F(t) = t$

الحل: نستخدم التعريف

$$L[t]=\int_0^\infty e^{-st}(t)\,dt=\int_0^\infty t\,e^{-st}\,dt=\left[t\cdot\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty-\int_0^\infty\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]dt$$

$$=0+\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\,dt=\frac{1}{s}\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty=\frac{-1}{s^2}\left[e^{-\infty}-e^0\right]$$

$$=\frac{-1}{s^2}[0-1]=\frac{1}{s^2}\qquad,\qquad s>0$$

$$\therefore\ L[t]=\frac{1}{s^2}$$

$$\left|\ \frac{1}{0}=\infty\right.$$

التكامل بالتجزئ:

$$\int u\,dv=uv\ \Big|_a^b-\int_a^b v\,du\ ,\quad dv=e^{-st}dt\ ,\qquad v=\frac{e^{-st}}{-s}$$

مثال(٣): أوجد تحويل لابلاس للدالة: $F(t)=e^{at}$، $a>0$

الحل: من التعريف:

$$L\{F(t)\}=L\{e^{at}\}=\int_0^\infty e^{-st}(e^{at})\,dt=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}\,dt$$

$$=\left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right]_0^\infty=\frac{-1}{s-a}\left[e^{-\infty}-e^0\right]$$

$$=\frac{-1}{s-a}[0-1]=\frac{1}{s-a}$$

$$\therefore\qquad \boxed{L\{e^{-at}\}=\frac{1}{s+a}}$$

ملحوظة: تحويل لابلاس للدالة e^{-at} هو:

$$L\{e^{+at}\}=\frac{1}{s-a}$$

مثال(٤): أوجد تحويل لابلاس للدالتين:

$$(i)\quad F(t)=\sin at \quad , \quad (ii)\quad F(t)=\cos at$$

استخدم العلاقتين التكامليتين الآتيتين:

$$(1)\quad \int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}\left[\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x\right]$$

$$(2)\quad \int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}\left[\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x\right]$$

الحل:

(i) **F(t) = sin at**

من التعريف:

$$L\{F(t)\}=L\{\sin at\}=\int_0^\infty e^{-st}(\sin at)\,dt$$

ومن العلاقة الأولى (١):

$$\therefore L\{\sin at\}=\frac{e^{-st}}{s^2+a^2}\left[-s\sin at-a\cos at\right]\Big|_0^\infty \qquad \left|\begin{array}{l}\alpha=-s,\beta=a\\ dt\to dx\end{array}\right.$$

$$=0-\frac{1}{s^2+a^2}\left[-s\sin 0-a\cos 0\right]=\frac{a}{s^2+a^2}$$

$$\boxed{L\{\sin at\}=\frac{a}{s^2+a^2}}$$

(ii) **F(t) = cos at**

من التعريف:

$$L\{F(t)\}=L\{\cos at\}=\int_0^\infty e^{-st}(\cos at)\,dt$$

ومن العلاقة الثانية (٢):

$$\therefore L\{\cos at\}=\frac{e^{-st}}{s^2+a^2}\left[-s\cos at+a\sin at\right]\Big|_0^\infty$$

$$=0-\frac{1}{s^2+a^2}\left[-s\cos 0+a\sin 0\right]=\frac{s}{s^2+a^2}$$

$$L\{\cos at\}=\frac{s}{s^2+a^2}$$

<u>**طريقة أخرى لحل مثال(٤):**</u>

قبل الحل نورد الملاحظتين الآتيتين :

١) من العلاقة $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ نجد أن الجزء الحقيقي من e^{ix} هو $\cos x$:

$$\operatorname{Re}\left(e^{ix}\right)=\cos x$$

والجزء التخيلي من e^{ix} هو $\sin x$:

$$\operatorname{Im}\left(e^{ix}\right)=\sin x$$

٢) يخضع محول بلاس لما يعرف بالخاصية الخطية وهي :

$$L\{a+ib\}=L\{a\}+iL\{b\}$$

حيث $i=\sqrt{-1}=$ ثابت.

<u>**نعود لحل المثال:**</u>

$$e^{iat}=\cos at+i\sin at$$

$$\therefore L\{e^{iat}\}=L\{\cos at+i\sin at\}=L\{\cos at\}+iL\{\sin at\} \qquad (1)$$

(استخدمنا الملاحظتين ١، ٢)

ولكن: حيث أن: $L\{e^{at}\}=\frac{1}{s-a}$

$$\therefore\ L\{e^{iat}\}=\frac{1}{s-ia}=\frac{s+ia}{(s-ia)(s+ia)}=\frac{s+ia}{(s^2-i^2a^2)}$$

$$=\frac{s+ia}{s^2+a^2}=\frac{s}{s^2+a^2}+i\frac{a}{s^2+a^2} \qquad (2) \qquad \Big|\ i^2=-1$$

بمقارنة (٢),(١) نجد أن:

$$L\{\cos at\}=\frac{s}{s^2+a^2}\ ,\quad L\{\sin at\}=\frac{a}{s^2+a^2}$$

وهو المطلوب.

<u>طريقة ثالثة لحل مثال(٤):</u> لإثبات أن

$$L\{\cos at\}=\frac{s}{s^2+a^2}$$

نستخدم طريقة التكامل بالتجزئ كما يلي:

$$L[\cos at]=\int_0^\infty e^{-st}\ \cos at\ dt=\int_0^\infty \cos at\ d(\frac{e^{-st}}{-s})$$

حيث وضعنا

$$u=\cos at\quad ,\quad dv=e^{-st}\ dt=d(\frac{e^{-st}}{-s})$$

$$\therefore\ du=-a\sin at\,dt\ ,\ v=\frac{e^{-st}}{-s}$$

$$\therefore L[\cos(at)]=\left[(\cos at)\cdot\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty-\int_0^\infty(\frac{e^{-st}}{-s})(-a\sin at\,dt)$$

$$=-\frac{1}{s}[0-1]-\frac{a}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cdot\sin at\ dt$$

وبإجراء التكامل بالتجزئ مرة ثانية على الحد الثاني:

$$\therefore L[\cos(at)] = \frac{1}{s} - \frac{a}{s}\int_0^\infty (\sin at)\, d\left(\frac{e^{-st}}{-s}\right)$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{a}{s}\left[(\sin at)\left(\frac{e^{-st}}{-s}\right)\Bigg|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{-s}(a\cos at)\,dt \right]$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{a}{s}\left[(0-0) + \frac{a}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos at\,dt \right]$$

ولكن: $L[cas\, at] = \int_0^\infty e^{-st}\cos at\; dt = I$

$$\therefore I = \frac{1}{s} + \frac{a}{s}\left[\frac{a}{s} I\right] = \frac{1}{s} + \frac{a^2}{s^2} I \;\rightarrow\; I\left(1+\frac{a^2}{s^2}\right) = \frac{1}{s}$$

$$\therefore\; I\left(\frac{s^2+a^2}{s^2}\right) = \frac{1}{s} \qquad \therefore\; I\left(\frac{s^2+a^2}{s^2}\right) = 1 \quad\rightarrow\quad I = \frac{s}{s^2+a^2}$$

$$\therefore L[\cos at] = \frac{s}{s^2+a^2}$$

وبالمثل يمكن إثبات أن:

$$L[\sin at] = \frac{a}{s^2+a^2}$$

<u>مثال(٥):</u> أوجد تحويل لابلاس للدالتين الآتيتين :

$$\text{(i)}\;\; F(t) = \sinh at, \qquad \text{(ii)}\;\; F(t) = \cosh at$$

<u>الحل:</u> قبل الحل نتذكر الآتي:

$$\sinh \alpha x = \frac{1}{2}(e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}),\;\; \cosh \alpha x = \frac{1}{2}(e^{\alpha x} + e^{-\alpha x})$$

أيضاً: من المثال رقم (٣) :

$$L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}\;,\quad L\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}$$

(i) **F(t) = sinh at**

من التعريف:

$$L\{\sinh at\}=\int_0^\infty e^{-st}\sinh at\,dt=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-st}(e^{at}-e^{-at})dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-st}\cdot e^{at}dt-\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-st}\cdot e^{at}dt$$

ولكن من التعريف:

$$L\{e^{at}\}=\int_0^\infty e^{-st}\cdot e^{at}dt \quad , \quad L\{e^{-at}\}=\int_0^\infty e^{-st}\cdot e^{-at}dt$$

$$\therefore L\{\sinh at\}=\frac{1}{2}L\{e^{at}\}-\frac{1}{2}L\{e^{-at}\}=\frac{1}{2}\frac{1}{s-a}-\frac{1}{2}\frac{1}{s+a}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s+a}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{(s+a)-(s-a)}{(s-a)(s+a)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2a}{s^2-a^2}\right]=\frac{a}{s^2-a^2} \qquad \Bigg| \quad (a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

$$\therefore \quad L\{\sinh at\}=\frac{a}{s^2-a^2}$$

(ii) **F(t) = cosh at**

من التعريف:

$$L\{\cosh at\}=\int_0^\infty e^{-st}\cosh at\,dt=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-st}(e^{at}+e^{-at})dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt+\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-st}e^{-at}dt$$

ولكن:

$$L\{e^{at}\}=\int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt \quad , \quad L\{e^{-at}\}=\int_0^\infty e^{-st}e^{-at}dt$$

$$\therefore L\{\cosh at\}=\frac{1}{2}L\{e^{at}\}+\frac{1}{2}L\{e^{-at}\}=\frac{1}{2}\frac{1}{s-a}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+a}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s+a}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{(s+a)+(s-a)}{(s-a)(s+a)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2s}{s^2-a^2}\right]=\frac{s}{s^2-a^2}$$

$$\therefore \quad L\{\cosh at\}=\frac{s}{s^2-a^2}$$

مثال(٦): أوجد تحويل لابلاس للدالتين الآتيتين:

(i) $F(t)=t\sin at$, (ii) $F(t)=t\cos at$

الحل: أولاً: $F(t)=t\sin at$:

من تعريف تحويل لابلاس للدالة $L\{F(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}F(t)dt=F(s):F(t)$

$$\therefore \quad L\{t\sin at\}=\int_0^\infty e^{-st}(t\sin at)dt=\int_0^\infty t\cdot(e^{-st}\sin at)dt \qquad (1)$$

التكامل في (١) يمكن إيجاده بالتجزئ كالآتي: بوضع $u=t\ ,\ du=dt$

$dv=e^{-st}\sin at\,dt$

بإستخدام العلاقة الأولى في مثال(٤)، $du=dt$

$$v=\frac{e^{-st}}{s^2+a^2}(-s\sin at-a\cos at)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزئ نحصل على:

$$L\{t\sin at\}=uv\Big|_0^\infty-\int_0^\infty v\,du=\left[t\cdot\frac{e^{-st}}{s^2+a^2}(-s\sin at-a\cos at)\right]_0^\infty$$

$$-\int_0^\infty\frac{e^{-st}}{s^2+a^2}(-s\sin at-a\cos at)dt$$

$$=-\int_0^\infty\frac{e^{-st}}{s^2+a^2}(-s\sin at-a\cos at)dt$$

$$=\frac{s}{s^2+a^2}\int_0^\infty e^{-st}\sin at\,dt+\frac{a}{s^2+a^2}\int_0^\infty e^{-st}\cos at\,dt$$

$$=\frac{s}{s^2+a^2}L\{\sin at\}+\frac{a}{s^2+a^2}L\{\cos at\}$$

$$=\frac{s}{s^2+a^2}\left\{\frac{a}{s^2+a^2}\right\}+\frac{a}{s^2+a^2}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\}$$

$$=\frac{as}{(s^2+a^2)^2}+\frac{as}{(s^2+a^2)^2}=\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$$

$$\therefore\quad L\{t\sin at\}=\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$$

ثانياً: $F(t)=t\cos at$:

بنفس الطريقة يمكن استنتاج العلاقة (تعطي كمسألة):

$$L\{t\cos at\}=\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$$

مثال(٧): أوجد تحويل لابلاس للدالتين:

$$\text{(i)}\quad F(t)=e^{at}\sin bt,\qquad \text{(ii)}\quad F(t)=e^{at}\cos bt$$

الحل: أولاً: $F(t)=e^{at}\sin bt$:

$$L\{e^{at}\sin bt\}=\int_0^\infty e^{-st}(e^{at}\sin bt)\,dt=\int_0^\infty e^{-(s-a)}\sin bt\,dt$$

ومن المعادلة الأولى (مثال(٤)):

$$\int e^{\alpha z}\sin\beta x\,dx=\frac{e^{\alpha z}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x)$$

وبوضع : $\alpha=-(s-a)\ ,\ \beta=b$

$$\therefore L\{e^{at}\sin bt\} = \frac{e^{-(s-a)t}}{(s-a)^2+b^2}\Big[-(s-a)\ \ \sin bt - b\cos bt\Big]\Big|_0^{\infty}$$

$$= 0 - \frac{1}{(s-a)^2+b^2}\big[0-b\big] \qquad \left| \begin{array}{l} e^{-\infty}=0\ ,\ \ e^{0}=1 \\ \sin 0 = 0\ \ ,\ \cos 0 = 1 \end{array} \right.$$

$$\therefore\ \ L\{e^{at}\sin bt\} = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$$

ثانياً: $F(t) = e^{at}\cos bt$:

بنفس الطريقة وبتطبيق العلاقة الثانية (مثال(٤)):

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\ dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x)$$

نحصل على (تعطي كمسألة):

$$\therefore\ \ F\{e^{at}\cos bt\} = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$$

مثال(٨): أوجد تحويل لابلاس للدالتين:

(i) $F(t) = e^{at}\sinh bt$, (ii) $F(t) = e^{at}\cosh bt$

الحل: باستخدام العلاقتين:

$$\sinh\alpha x = \frac{1}{2}(e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}) \quad , \quad \cosh\alpha x = \frac{1}{2}(e^{\alpha x} + e^{-\alpha x})$$

وباستخدام تعريف تحويل لابلاس:

$$\text{(i)}\ \ L\{e^{at}\sinh bt\} = \int_0^{\infty} e^{-st}(e^{at}\sinh bt)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-st}\cdot e^{at}\cdot(e^{bt} - e^{-bt})\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\infty} e^{-[s-(a+b)]t}\,dt - \int_0^{\infty} e^{-[s-(a-b)]t}\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-[s-(a+b)]t}}{-[s-(a+b)]} - \frac{e^{-[s-(a-b)]t}}{-[s-(a-b)]}\right]_0^{\infty} \qquad \left| \int_0^{\infty} e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}\right|_0^{\infty}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{[s-(a+b)]}-\frac{1}{[s-(a-b)]}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{[s-(a-b)]-[s-(a+b)]}{[s-(a+b)][s-(a-b)]}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2b}{[s-(a+b)][s-(a-b)]}\right]$$

$$=\frac{b}{[(s-a)-b][s-a)+b]}=\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$$

ثانياً: $F(t)=e^{at}\cosh bt$:

$$L\{e^{at}\cosh bt\}=\int_0^\infty e^{-st}\,(e^{at}\cosh bt)\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-st}\,.e^{at}\,.(e^{bt}+e^{-bt})\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^{-[s-(a+b)]t}\,dt+e^{-[s-(a-b)]t}\,dt\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{e^{-[s-(a+b)]t}}{-[s-(a+b)]}+\frac{e^{-[s-(a-b)]t}}{-[s-(a-b)]}\right]_0^\infty$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{[s-(a+b)]}+\frac{1}{[s-(a-b)]}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{[s-(a-b)]+[s-(a+b)]}{[s-(a+b)][s-(a-b)]}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2(s-a)}{[(s-a)-b][(s-a)+b]}\right]=\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$$

وهو المطلوب

<u>الخاصية الخطية لتحويلات لابلاس:</u>

<u>تعريف المؤثر الخطي</u>: إذا كان A يشكل مؤثراً (operator)، فيقال أن هذا المؤثر هو مؤثر خطي إذا كان :

$$\boxed{A(\alpha F+\beta G)=\alpha A(F)+\beta A(G)}$$

حيث F,G دالتان اختياريتان، α,β ثابتان

والمؤثر هو : أداة رياضية تؤثر على كمية أو دالة تأتي بعدها مثل :

$$\frac{d\cdots}{dx}=D\cdots,\int\cdots dx,\ln\cdots,\sqrt{\cdots}$$

<u>نظرية</u>: تحويل لابلاس يشكل مؤثرا خطياً بمعنى أن:

$$L[\alpha F(t)+\beta G(t)]=\alpha L\{F(t)\}+\beta L\{G(t)$$

فمثلاً: $L[3\sin 2x+5\cos 3x]=3L[\sin 2x]+5L[\cos 3x]$ وهكذا.......

<u>إثبات النظرية</u>: نستخدم تعريف تحويل (أو محول) لابلاس:

$$L[\underbrace{\alpha F(t)+\beta G(t)}]=\int_0^\infty e^{-st}\,[\underbrace{\alpha F(t)+\beta G(t)}]dt$$

$$=\alpha\underbrace{\int_0^\infty e^{-st}F(t)dt}+\beta\underbrace{\int_0^\infty e^{-st}G(t)dt}=\alpha\underbrace{L\{F(t)\}}+\beta\underbrace{L\{G(t)\}}$$

وهو المطلوب

أمثلة محلولة:

مثال(١): أوجد تحويل لابلاس للدالة $F(t)=t^n$ ، ومن ثم أوجد تحويل لابلاس للدالة: $F(t)=2t^5+3t^4+4e^{2t}+6$

الحل: أولاً: إيجاد $L\{t^n\}$

من التعريف: $L\{t^n\}=\int_0^\infty e^{-st}(t^n)\,dt$

هذا التكامل يمكن إيجاده بطريقتين:

(i) باستخدام التكامل بالتجزئ

(ii) باستخدام دالة جاما $\Gamma(n)$

تعريف دالة جاما:

$$\int_0^\infty e^{-u}u^n\,du=\Gamma(n+1)=n!=n(n-1)(n-2)\cdots 1$$

حيث $n!$ هي: مضروب n (Factorial n)

فمثلاً :

$$\int_0^\infty e^{-X}X^3\,dX=\Gamma(3+1)=\Gamma(4)=3!=3x2x1=6$$

الحل باستخدام دالة جاما :

بوضع $st=u \leftarrow t=\dfrac{u}{s} \leftarrow dt=\dfrac{du}{s}$

وحدود التكامل : $t=0 \rightarrow u=0$ ، $t=\infty \rightarrow u=\infty$

$$\therefore\ L\{t^n\}=\int_0^\infty e^{-u}.\left(\frac{u}{s}\right)^n\left(\frac{du}{s}\right)=\frac{1}{s^{n+1}}\underbrace{\int_0^\infty e^{-u}u^n\,du}_{\Gamma(n+1)=n!}$$

$$\therefore\ L\{t^n\}=\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}=\frac{n!}{s^{n+1}}$$

وهو المطلوب.

ملحوظة: بوضع $n=-\frac{1}{2}$ فإن :

$$L\{t^{-\frac{1}{2}}\}=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}=\sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

وذلك حيث أن دالة جاما للعدد $(\frac{1}{2})$ هي: $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ (تحفظ).

$$\therefore \quad L\{t^n\}=\frac{n!}{S^{n+1}} \qquad ,n=0,1,2,........$$

فمثلاً : $n=0$:

$$L\{t^0\}=\frac{0!}{s^{0+1}}$$

$$L\{1\}=\frac{1}{s} \qquad \Big| \; t^0=1,\ 0!=1$$

$:n=1$

$$L\{t^1\}=\frac{1!}{s^{1+1}}$$

$$\therefore \ L\{t\}=\frac{1}{s^2} \qquad \Big| \; 1!=1$$

$:n=2$

$$L\{t^2\}=\frac{2!}{s^{2+1}}=\frac{2\times 1}{s^3}=\frac{2}{s^3}$$

$:n=3$

$$L\{t^3\}=\frac{3!}{s^{3+1}}=\frac{3\times 2\times 1}{s^4}=\frac{6}{s^4}$$

الجزء الثاني من المثال:

$$L\{F(t)\}=L\{2t^5+3t^4+4e^{2t}+4e^{2t}+6\}$$

من الخاصية الخطية :

$$L\{F(t)\}=2L\{t^5\}+3L\{t^4\}+4L\{e^{2t}\}+6L\{1\} \qquad (1)$$

ولكن :

$$L\{t^5\}=\frac{5!}{s^{5+1}}=\frac{5\times4\times3\times2\times1}{s^6}=\frac{20\times6}{s^6}=\frac{120}{s^6} \qquad (2)$$

$$L\{t^4\}=\frac{4!}{s^{4+1}}=\frac{4\times3\times2\times1}{s^5}=\frac{24}{s^5} \qquad (3)$$

$$L\{e^{2t}\}=\frac{1}{s-2} \qquad (4)$$

$$L\{1\}=\frac{1}{s} \qquad (5)$$

بالتعويض في (١):

$$L\{F(t)\}=2\times\frac{120}{s^5}+3\times\frac{24}{s^5}+\frac{4}{s-2}+6(\frac{1}{s})$$

$$=\frac{240}{s^6}+\frac{72}{s^5}+\frac{4}{s-2}+\frac{6}{s}$$

وهو المطلوب.

<u>مثال(٢):</u> أوجد تحويل (محول) لابلاس للدوال الآتية :

(i) $\sin^2(5t)$, (ii) $\cos^2(4t)$, (iii) $\sinh^2(6t)$, (iv) $\cosh^2(4t)$

<u>الحل:</u> نستخدم العلاقات الآتية (للتذكرة):

المثلثية	الزائدية
$\cos 2x=2\cos^2 x-1$ $=1-2\sin^2 x$	$\cosh 2x=2\cosh^2 x-1$ $=1+2\sinh^2 x$
$\therefore \cos^2 x=\frac{1}{2}[1+\cos 2x]$	$\therefore \cosh^2 x=\frac{1}{2}[\cosh 2x+1]$
$\sin^2 x=\frac{1}{2}[1-\cos 2x]$	$\sinh^2 x=\frac{1}{2}[\cosh 2x-1]$
$\cos^2 x+\sin^2 x=1$	$coh^2 x-\sinh^2 x=1$
$\sin 2x=2\sin x\cos x$	$\sinh 2x=2\sinh x\cosh x$

حل المثال :

(i) $L\left[\sin^2(5t)\right]=L\left[\frac{1}{2}(1-\cos 10t)\right]=\frac{1}{2}\{L[1]-L[\cos 10t]\}$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+100}\right\} \qquad \Bigg| \; L[\cos at]=\frac{s}{s^2+a^2}$$

(ii) $L\left[\cos^2(4t)\right]=L\left[\frac{1}{2}(1+\cos 8t)\right]=\frac{1}{2}\{L[1]+L[\cos 8t]\}$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+64}\right\}$$

(iii) $L\left[\sinh^2(6t)\right]=L\left[\frac{1}{2}(\cos 12t-1)\right]=\frac{1}{2}\{L[\cosh 12t]-L[1]\}$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{s}{s^2-144}-\frac{1}{s}\right] \qquad \Bigg| \; L[\cosh at]=\frac{s}{s^2-a^2}$$

(iv) $L\left[\cosh^2(4t)\right]=L\left[\frac{1}{2}(\cosh 8t+1)\right]=\frac{1}{2}\{L[\cosh 8t]+L[1]\}$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{s}{s^2-64}+\frac{1}{s}\right]$$

وهو المطلوب.

مثال(٣): (أ) أوجد تحويل لابلاس للدالة :

$$F(t)=\begin{cases} 0 & 0<t<1 \\ t & 1<t<2 \\ 5 & t<2 \end{cases}$$

(ب) أوجد تحويل لابلاس للدالة :

$$F(t)=\begin{cases} \sin 2t & 0<t<\pi \\ 0 & t>\pi \end{cases}$$

الحل الجزء (أ) :

$$L[F(t)]=\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt=\int_0^1 (0)\,dt+\int_1^2 te^{-st}\,dt+\int_2^\infty 5e^{-st}\,dt$$

$$=\int_1^2 te^{-st}\,dt+5\int_2^\infty e^{-st}\,dt$$

وباستخدام التكامل بالتجزئ

$$L[F(t)]=\left[\frac{-te^{-st}}{s}-\frac{e^{-st}}{s^2}\right]\Bigg|_1^2+5\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]\Bigg|_2^\infty$$

$$=\left[\left(\frac{-2}{s}e^{-2s}-\frac{e^{-2s}}{s^2}\right)-\left(\frac{-1}{s}e^{-s}-\frac{e^{-s}}{s^2}\right)\right]-\frac{5}{s}\left[0-e^{-2s}\right]$$

$$=e^{-s}\left[\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}\right]-e^{-2s}\left[\frac{2}{s}+\frac{1}{s^2}\right]+\frac{5}{s}e^{-2s}$$

$$=e^{-s}\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}\right)+e^{-2s}\left(\frac{3}{s}+\frac{1}{s^2}\right)$$

الجزء (ب):

$$L\left[F(t)\right]=\int_0^\pi e^{-st}\sin 2t\,dt$$

وبإجراء التكامل بالتجزئ

$$L\left[F(t)\right]=\left[\frac{e^{-st}\left(-s\sin 2t-2\cos 2t\right.}{(-s)^2+(2)^2}\right]_0^\pi$$

$$=\frac{e^{-s\pi}(0+2)-e^0(0-2)}{s^2+4}=\frac{e^{-s\pi}(2)+2}{s^2+4}=\frac{2(1+e^{-s\pi})}{s^2+4}$$

وهو المطلوب

مسائل

(١) أوجد تحويلات لابلاس للدوال الآتية :

(i) $F(t)=5\sin 2t-3\cos 2t+3e^{2t}$

(ii) $F(t)=\sinh 2t+\cos 4t+(t-1)^2$

(iii) $F(t)=e^{-3t}\left[\cos 2t+3\sin 2t\right]$

(iv) $F(t)=e^{-2t}-3e^{4t}+4\sin^2 t$

ملاحظة: عند حل الجزء (iii) نستخدم العلاقتين:

$$L\left[e^{at}\sin bt\right]=\frac{b}{(s-a)^2+b^2},\ L\left[e^{at}\cos bt\right]=\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$$

(٢) أوجد تحويلات لابلاس للدوال الآتية:

(i) $\sin 2t\cos 2t$, (ii) $\sin 2t\cos 6t$

(ii) $\sin 4t\cos 2t$, (iv) $\sin 6t\cos 4t$

ملاحظة : عند حل هذه المسألة نستخدم القوانين المثلثية الآتية:

(i) $\sin x\cos x=\sin 2x$

(ii) $\sin x\ \cos y=\sin(x+y)+\sin(x-y)$

(iii) $\sin x\ \cos y=\sin(x-y)-\cos(x+y)$

(iv) $\cos x\ \cos y=\cos(x-y)+\cos(x+y)$

(٣) إذا كانت $F(t)=\sin^2 t$ فأوجد $L[F(t)]$

(٤) إذا كانت $F(t)=\begin{cases}3 & (0<t<2)\\ -1 & (2<t<4)\\ 0 & (t\geq 4)\end{cases}$ فأوجد $L[F(t)]$

(٥) أوجد تحويل لابلاس للدالتين :

(i) $F(t)=e^{\alpha t+\beta}$, (ii) $F(t)=e^{at}t^n$ [استخدم دالة جاما]

حل المسألة(٢):

(i) $\sin 2t \cos 2t = \frac{1}{2}\sin 4t$

$$\therefore L[\sin 2t \cos 2t] = \frac{1}{2}L[\sin 4t] = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{s^2+4^2}\right] = \frac{2}{s^2+16}$$

(ii) $\sin 2t \cos 6t = \frac{1}{2}[\sin 8t + \sin(-4t)] = \frac{1}{2}[\sin 8t - \sin 4t]$

$$\therefore L[\sin 2t \cos 6t] = \frac{1}{2}[L\{\sin 8t\} - L\{\sin 4t\}]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{8}{s^2+8^2} - \frac{4}{s^2+4^2}\right] = \frac{4}{s^2+64} - \frac{2}{s^2+16}$$

(iii) $\sin 4t \sin 2t = \frac{1}{2}[\cos 2t - \cos 6t]$

$$\therefore L[\sin 4t \sin 2t] = \frac{1}{2}[L\{\cos 2t\} - L\{\cos 6t\}]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{s}{s^2} - \frac{s}{s^2+6^2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{s}{s^2+4} - \frac{s}{s^2+36}.\right]$$

(iv) $\cos 6t \cos 4t = \frac{1}{2}[\cos 2t + \cos 10t]$

$$\therefore L[\cos 6t \cos 4t] = \frac{1}{2}[L\{con 2t\} + L\{con 10t\}]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{s}{s^2+4} + \frac{s}{s^2+100}\right]$$

وهو المطلوب.

حل المسألة(٣): نستخدم تعريف تحويل لابلاس :

$$L\left[F(t)\right]=\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt$$

$$\therefore L\left[\sin^2 t\right]=\int_0^\infty e^{-st}\sin^2 t\,dt=\int_0^\infty \underbrace{\sin^2 t}_{u}-\underbrace{e^{-st}\,dt}_{dv}$$

بوضع $u=\sin^2 t \;,\; dv=e^{-st}dt$

$$\therefore du=2\sin t.(\cos t)\,dt=\sin 2t\,dt\,,\quad v=\frac{e^{-st}}{-s}$$

وبإجراء التكامل بالتجزئ

$$\therefore L\left[\sin^2 t\right]=\left[\sin^2 t.\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty-\int_0^\infty\left(\frac{e^{-st}}{-s}\right)\sin 2t\,dt$$

$$=0+\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\sin 2t\,dt=\frac{1}{s}.L\left[\sin 2t\right]$$

$$=\frac{1}{s}\left[\frac{2}{s^2+2^2}\right]=\frac{2}{s(s^2+4)}$$

وهو المطلوب.

حل المسألة(٤): من تعريف تحويل لابلاس: $L\left[F(t)\right]=\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt$

$$\therefore L\left[F(t)\right]=\int_0^2 e^{-st}(3)\,dt+\int_2^4 e^{-st}(-1)\,dt+\int_4^\infty e^{-st}(0)\,dt$$

$$=3\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^2-\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_2^4+0$$

$$=-\frac{3}{5}\left[e^{-2s}-1\right]+\frac{1}{s}\left[e^{-4s}-e^{-2s}\right]$$

$$=\frac{1}{s}\left[e^{-4s}-4e^{-2s}+3\right]$$

وهو المطلوب

حل المسألة(5):

$$(i)\quad L\left[e^{\alpha t+\beta}\right]=L\left[e^{\alpha t}\cdot e^{\beta}\right]=e^{\beta}.L\left[e^{\alpha t}\right]=e^{\beta}.\left[\frac{1}{s-a}\right]=\frac{e^{\beta}}{s-a}$$

وهو المطلوب الأول

$$(ii)\ L\left[e^{at}t^{n}\right]=\int_{0}^{\infty}e^{-st}.e^{at}t^{n}\,dt=\int_{0}^{\infty}e^{-(s-a)t}t^{n}\,dt$$

وهذا التكامل يمكن إيجاده بطريقتين: بالتجزئ أو باستخدام دالة جاما، وسوف نوجده باستخدام دالة جاما ونترك إيجاده بالتجزئ كمسألة.

بوضع $dt=\frac{du}{s-a}\leftarrow t=\frac{u}{s-a}\leftarrow(s-a)t=u$

$$\therefore L\left[e^{at}t^{n}\right]=\int_{0}^{\infty}e^{-u}\left[\frac{u}{s-a}\right]^{n}\left(\frac{du}{s-a}\right)$$

$$=\frac{1}{(s-a)^{n+1}}\int_{0}^{\infty}e^{-u}u^{n}\,du$$

ومن تعريف دالة جاما:

$$\int_{0}^{\infty}e^{-u}u^{n}\,du=\Gamma\left(n+1\right)=n!$$

$$\therefore L\left[e^{at}t^{n}\right]=\frac{1}{(s-a)^{n+a}}\left[n!\right]=\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

وهو المطلوب.

تحويلات لابلاس العكسية :

تعريف: إذا كانت $F(s)$ تمثل تحويل لابلاس للدالة $F(t)$

أي أن $$L\{F(t)\} = F(s)$$

فإن $$F(t) = L^{-1}\{F(s)\}$$

وتعرف (L^{-1}) بتحويل (أو محول) لابلاس العكسي

أمثلة:

(1) إذا كان : $L[t] = \frac{1}{s^2}$

فإن : $t = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]$

(2) إذا كان : $L = \{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$

فإن: $e^{at} = L^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]$

(3) إذا كان: $L\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}$

فإن : $\cos at = L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right]$

(4) إذا كان: $L\{\text{Sinh at}\}\frac{a}{s^2+a^2}$

فإن: $\text{Sinh at} = L^{-1}\left[\frac{a}{s^2-a^2}\right]$

وهكذا .....

وفى الجدولين الآتيين نورد تحويلات لابلاس وتحويلات لابلاس العكسية للدوال البسيطة والتى سبق الحصول عليها فى الأمثلة.

" جدول بتحويلات لابلاس للدوال البسيطة "

تحويل لابلاس $L\{F(t)\} = F(s)$	الدالة $F(t)$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n
$\frac{1}{s-a}$, $\frac{1}{s+a}$	e^{at} , e^{-at}
$\frac{a}{s^2+a^2}$, $\frac{s}{s^2+a^2}$	$\sin at$, $\cos at$
$\frac{a}{s^2-a^2}$, $\frac{s}{s^2-a^2}$	$\sinh at$, $\cosh at$
$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	$t \sin at$
$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)}$	$t \cos at$
$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	$e^{at} \sin bt$
$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$	$e^{at} \cos bt$
$\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$	$e^{at} \sinh bt$
$\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$	$e^{at} \cosh bt$

جدول تحويلات لابلاس العكسية

التحويل العكسي: $L^{-1}[F(t)] = F(t)$	الدالة F(s)
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
e^{at} , e^{-at}	$\frac{1}{s-a}$, $\frac{1}{s+a}$
$\sin at$, $\cos at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$, $\frac{s}{s^2+a^2}$
$\sinh at$, $\cosh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$, $\frac{s}{s^2-a^2}$
$t \sin at$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
$t \cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
$e^{at}.\sin bt$ $e^{at}\cos bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$, $\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
$e^{at}\sinh bt$, $e^{at}\cosh bt$	$\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$, $\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$

الخاصية الخطية لتحويل لابلاس العكسي :

يعتبر محول لابلاس العكسي من المؤثرات الخطية بمعنى أن :

$$L^{-1}\{aF(s)+\beta G(s)\}=aL^{-1}\{F(s)\}+\beta L^{-1}\{G(s)\}$$

الإثبات: من الخاصية الخطية لتحويل لابلاس :

$$L\underbrace{\{aF(t)+\beta G(t)\}}=\alpha L\underbrace{\{F(t)\}}+\underbrace{\beta L\{G(t)\}}=\alpha F(s)+\beta \underbrace{G(s)}$$

ومن تعريف تحويل (محول) لابلاس العكسي:

$$\underbrace{\alpha F(t)+\beta G(t)}=L^{-1}\{\alpha F(s)+\beta G(s)\}$$

أي أن :

$$L^{-1}\{\alpha F(s)+\beta G(s)\}=\alpha \underbrace{F(t)}+\beta \underbrace{G(t)}$$

$$=\alpha \underbrace{L^{-1}\{F(s)\}}+\underbrace{\beta L^{-1}\{G(s)\}}$$

وهو المطلوب [الخاصية الخطية لتحويل لابلاس العكسي]

ملخص: إذا كان محول لابلاس للدالة $F(t)$ هو: $L\{F(t)\}=F(s)$

فإن محول لابلاس العكسي للدالة $F(s)$ هو: $L^{-1}\{F(s)\}=F(t)$

أمثلة محلولة:

مثال(١): أوجد تحويل لابلاس العكسي للدالتين :

(i) $\dfrac{5}{s+2}$, (ii) $\dfrac{2s-5}{s^2}$

الحل:

$$(i)\quad L^{-1}\left\{\frac{5}{s+2}\right\}=5L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}=5\underbrace{e^{-2t}}$$

$$\left[\text{لأن :}\quad L^{-1}\left[\frac{1}{s+a}\right]=e^{-at}\right]$$

$$(ii)\quad L^{-1}\left[\frac{2s-5}{s^2}\right]=L^{-1}\left[\frac{2s}{s^2}-\frac{5}{s^a}\right]=L^{-1}\left[\frac{2}{s}\right]-L^{-1}\left[\frac{5}{s^2}\right]$$

$$=2\underbrace{L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]}-5\underbrace{L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]}=2\underbrace{[1]}-5\underbrace{[t]}=2-5t$$

$$\left[\quad L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)=1\quad,\ L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)=t\quad :\text{لأن}\quad\right]$$

<u>مثال(٢):</u> أوجد تحويل لابلاس العكسي للدالتين :

$$(i)\quad \frac{4s-3}{s^2+4}\qquad ,\qquad (ii)\quad \frac{1}{s^2+2s}$$

<u>الحل:</u>

$$(i)\quad L^{-1}\left\{\frac{4s-3}{s^2+4}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{4s}{s^2+4}-\frac{3}{s^2+4}\right\}$$

$$=4L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}-\frac{3}{2}L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}$$

ولكن

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\}=\cos at\quad ,\quad L^{-1}\left\{\frac{a}{s^2+a^2}\right\}=\sin at$$

$$\therefore\ L^{-1}\left\{\frac{4s-3}{s^2+4}\right\}=4[\cos 2t]-\frac{3}{2}[\sin 2t]$$

$$(ii)\quad L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+2s}\right)=L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+2}\right\}$$

نستخدم الكسور الجزئية لتجزئ الكسر $\dfrac{1}{s(s+2)}$

نضع الكسر بالصورة الآتي:

$$\frac{1}{s(s+2)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+2}$$

ولايجاد A,B:

بضرب الطرفين في $s(s+2)$:

$$\therefore\ 1 = A(s+2) + Bs = (A+B)s + 2A$$

بمساواة معاملات s والمد المطلق في الطرفين:

$$0 = A + B \quad , \quad 1 = 2A$$

من هاتين العلاقتين نجد أن :

$$A = \frac{1}{2} \quad , \quad B = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \boxed{\frac{1}{s(s+2)} = \frac{1}{2s} - \frac{1}{2(s+2)}}$$

$$\therefore L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2s}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+2)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{2s} - \frac{1}{2(s+2)}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}$$

ولكن :

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1 \quad , \quad L^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = e^{-at}$$

$$\therefore L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2s}\right\} = \tfrac{1}{2}[1] - \frac{1}{2}\left[e^{-2t}\right] = \frac{1}{2}[1 - e^{-2t}]$$

وهو المطلوب.

مثال(٣): أوجد تحويل لابلاس العكسي للدالتين:

$$\text{(i)}\ \frac{1}{s^2+7s+12} \quad , \quad \text{(ii)}\ \frac{1-s}{s^2-1}$$

الحل:

$$\text{(i)}\ L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+7s+12}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{(s+3)(s+4)}\right]$$

وباستخدام الكسور الجزئية لتجزئ الكسر $\dfrac{1}{(s+3)(s+4)}$

نضع الكسر بالصورة:

$$\frac{1}{(s+3)(s+4)}=\frac{A}{s+3}+\frac{B}{s+4}$$

ولإيجاد A,B: بضرب الطرفين في $(s+3)(s+4)$:

$$\therefore 1=A(s+4)+B(s+3)=(A+B)s+(4A+3B)$$

وبمساواة معامل s والحد المطلق في الطرفين:

$$\therefore 0=A+B\ ,\ 1=4A+3B$$

ومن هاتين العلاقتين نجد أن: $A=1 \quad , \quad B=-1$

$$\therefore \frac{1}{(s+3)(s+4)}=\frac{1}{s+3}-\frac{1}{s+4}$$

$$\therefore L^{-1}\left[\frac{1}{(s+3)(s+4)}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right]-L^{-1}\left[\frac{1}{s+4}\right]=e^{-3t}-e^{-4t}$$

وهو المطلوب.

$$\text{(ii)}\ L^{-1}\left[\frac{1-s}{s^2-1}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{s^2-1}-\frac{s}{s-1}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{s^2-1}\right]-L^{-1}\left[\frac{s}{s^2-1}\right]$$

$$=\sinh t-\cosh t=\frac{1}{2}(e^{t}-e^{-t})-\frac{1}{2}(e^{t}+e^{-t})=-e^{-t}$$

حل آخر: بكتابة:

$$\frac{1-s}{s^2-1}=-\frac{(s-1)}{(s-1)(s+1)}=-\frac{1}{s+1}$$

$$L^{-1}\left[\frac{1-s}{s^2-1}\right]=-L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]=-e^{-t}$$

وهو المطلوب.

ملحوظة: في كثير من المسائل التي تستخدم فيها الكسور الجزئية لتجزئة كسر ما، يكون مقام الكسر من درجة أعلى من الأولى فلا يكن وضع الكسر بالصورة البسيطة الموضحة في المثال السابق والذي قبله، وسنعود لتوضيح ذلك بالتفصيل فيما بعد.

تحويلات لابلاس للمشتقات

نظرية(1): إذا كانت $f(t)$ دالة متصلة هي ومشتقتها $f'(t)$ خلال فترة محدودة $0 \le t \le T$ فإن:

$$\boxed{L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0)}$$

نظرية(2): إذا كانت $f(t)$ دالة متصلة هي ومشتقاتها $f'(t), f''(t)$ خلال الفترة المحدودة $0 \le t \le T$ فإن :

$$\boxed{L[f''(t)] = s^2 L\{f(t) - sf(0) - f'(0)}$$

إثبات النظرية(1) : من تعريف لابلاس:

$$L\{f(t) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

$$\therefore L\{f'(t)\} = \int_0^\infty \underbrace{e^{-st}}\,\underbrace{f'(t)\,dt}$$

بإجراء التكامل الجزئي:

$$u = e^{-st} \quad , \quad dv = f'(t)\,dt$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$du = -se^{-st}\,dt \qquad v = f(t)$$

$$\therefore L\{f'(t)\}=e^{-st}f(t)\Big|_0^\infty-\int_0^\infty f(t)[-se^{-st}]dt$$

$$=[0-f(0)]+s\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

$$=-f(0)+sL\{f(t)\} \qquad \left|\begin{array}{l} e^{-\infty}=0 \\ e^{0}\;\;=1\end{array}\right.$$

$$\therefore\ L\{f'(t)\}=sL\{f(t)\}-f(0)$$

وهو المطلوب أولاً.

__إثبات النظرية(٢)__: من تعريف تحويل لابلاس:

$$L\{f(t)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

$$\therefore L\{f''\}=\int_0^\infty \underbrace{e^{-st}}\,\underbrace{f''(t)dt}$$

بإجراء التكامل بالتجزئ:

$$u=e^{-st}\qquad,\qquad dv=f''(t)dt$$

$$\downarrow\qquad\qquad\qquad\downarrow$$

$$du=-se^{-st}dt\qquad,\qquad v=f'(t)$$

$$\therefore L\{f''(t)\}=e^{-st}f'(t)\Big|_0^\infty-\int_0^\infty f'(t)[-se^{-st}dt]$$

$$=[0-f'(0)]+s\int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt$$

$$=-f'(0)+sL\{f'(t)\}$$

ولكن من نظرية(١):

$$L\{f'(t)\}=sL\{f(t)\}-f(0)$$

$$\therefore L\{f''(t)\}=-f'(0)+s^2L\{f(t)\}-sf(0)$$

وهو المطلوب ثانياً.

$$\therefore L\{f''(t)\}=s^2L\{f(t)\}-sf(0)-f'(0)$$

ملحوظة(١): بوضع $L\{f(t)\} = f(s)$

فإن نظرية (١) ،(٢) تأخذان الصورة :

$$\boxed{\begin{aligned} &L\{f'(t)\}=s f(s)-f(0) \\ &L\{f''(t)\}=s^2 f(s)-s f(0)-f'(0) \end{aligned}}$$

ملحوظة(٢): إذا كانت

$$f(0)=0$$

$$\therefore L\{f'(t)\}=s f(s)$$

وبأخذ التحويل العكسي:

$$\therefore f'(t)=L^{-1}\{s f(s)\}$$

أمثلة محلولة :

مثال(١): إذا كان تحويل لابلاس للمشتقتين الأولى والثانية يعطى بالعلاقتين :

$$L\{f'(t)\}=s L\{f(t)\}-f(0)$$

$$L\{f''(t)\}=s^2 L\{f(t)\}-s f(0)-f'(0)$$

فأثبت أن تحويل لابلاس للمشتقة الثالثة للدالة $f(t)$ يعطى بالعلاقة:

$$L\{f'''(t)\}=s^3 L\{f(t)\}-s^2 f(0)-s f'(0)-f''(0)$$

الحل: من تعريف تحويل لابلاس :

$$L\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

$$\therefore L\{f'''(t)\}=\int_0^\infty e^{-st} f'''(t)\,dt$$

وبإجراء التكامل بالتجزيء:

$$u=e^{-st} \qquad , \qquad dv=f'''(t)\,dt$$

$$du=-s e^{-st}\,dt \qquad , \qquad v=f''(t)$$

$$L\{f'''(t)\}=e^{-st}\ f''\Big|_0^\infty-\int_0^\infty f''.(-se^{-st}dt)\ =[0-f''(0)]+s\int_0^\infty e^{-st}\ f''\,dt$$
$$=-f''(0)+sL\{f''\}=-f''(0)+s[s^2L\{f(t)\}-sf(0)-f'(0)]$$
$$=s^3L\{f(t)\}-s^2f(0)-sf'(0)--f''(0)$$

وهو المطلوب.

مثال (٢): إذا كانت $f(t)=te^{at}$ تحقق المعادلة :

$$f'(t)=af(t)+e^{at}$$

فباستخدام تحويل لابلاس للمشتقة $f'(t)$ ، أثبت أن تحويل لابلاس للدالة $f(t)$ يعطى بالعلاقة:

$$L\{f(t)\}=\frac{1}{(s-a)^2}$$

الحل: الدالة:

$$f(t)=te^{at} \qquad (1)$$

تحقق المعادلة :

$$f'(t)=af(t)+e^{at} \qquad (2)$$

المطلوب : إيجاد $L\{f(t)\}$ باستخدام العلاقة:

$$L\{f'(t)\}=sL\{f(t)\}-f(0) \qquad (3)$$

فمن (1) : بوضع $t=0$ فإن $f(0)=0$

وتصبح (3)

$$L\{f'(t)\}=sL\{f(t)\} \qquad (4)$$

ومن (2) :

$$L\{f'(t)\}=L\{af(t)+e^{at}\}=aL\{f(t)\}+L\{e^{at}\}$$
$$=aL\{f(t)\}+\frac{1}{(s-a)} \qquad (5)$$

بمساواة (4),(5) :
$$sL\{f(t)\}=aL\{f(t)\}+\frac{1}{s-a}$$

$$\therefore (s-a)L\{f(t)\}=\frac{1}{s-a} \qquad \therefore L\{f(t)\}=\frac{1}{(s-a)^2}$$

وهو المطلوب.

مثال(٣): إذا كانت $L\{f(t)\}=f(s)$ فإن $L^{-1}\{s\,f(s)\}=f'(t)$ بشرط أن $f(0)=0$

وكانت $f(t)=\dfrac{t\sin at}{2a}$ فأثبت أن :

$$L^{-1}[\frac{1}{(s^2+a^2)^2}=\frac{1}{2a^3}[\sin at-at\cos at]$$

الحل: حيث أن :

$$f(t)=\frac{t\sin at}{2a} \qquad (1)$$

وأن:

$$L^{-1}[\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}]=t\sin at$$

$$\therefore L^{-1}[\frac{s}{(s^2+a^2)^2}]=\frac{t\sin at}{2a} \qquad (2)$$

(من جدول تحويلات لابلاس العكسية)

ومن رأس المسألة : $L^{-1}[s\,f(s)]=f'(t)$ ، بشرط أن $f(0)=0$

فمن العلاقة (1),(2) :

$$f(0)=0$$

$$L^{-1}[s.\frac{s}{(s^2+a^2)^2}]=\frac{d}{dt}[\frac{t\sin at}{2a}]$$

$$\therefore L^{-1}[\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}]=\frac{1}{2a}[ta\cos at+\sin at]$$

$$\therefore L^{-1}\left[\frac{s^2+a^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}\right]=\frac{1}{2a}[t\,a\cos at+\sin at]$$

$$\therefore L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+a^2)}-\frac{a^2}{(s^2+a^2)^2}\right]=\frac{1}{2a}[at\cos at+\sin at]$$

$$\therefore L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+a^2)}\right]-a^2L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+a^2)^2}\right]=\frac{1}{2a}[at\cos at+\sin at]$$

$$\therefore a^2L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+a^2)^2}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+a^2)}\right]-\frac{1}{2a}[at\cos at+\sin at]$$

$$=\frac{\sin at}{a}-\frac{1}{2a}[at\cos at+\sin at]$$

$$=\frac{1}{2a}[2\sin at-at\cos at-\sin at]$$

$$=\frac{1}{2a}[\sin at-at\cos at]$$

بالقسمة على a^2:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+a^2)^2}\right]=\frac{1}{2a^3}[\sin at-at\cos at]$$

وهو المطلوب.

استخدام تحويلات لابلاس في حل المعادلات التفاضلية :

تستخدم تحويلات لابلاس في حل المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الثابتة وصورتها:

$$y''(t)+a\,y'(t)+b\,y(t)=F(t)$$

مع وجود شروط ابتدائية للحل، وذلك بإتباع الخطوات الآتية :

(i) نأخذ تحويلات لابلاس لطرفي المعادلة ونطبق الشروط الحدية .

(ii) نعوض عن قيم تحويلات لابلاس التي تظهر في المعادلة فنحصل على

$[....] = L\{y(t)\}$

(iii) نأخذ تحويل لابلاس العكسي فنحصل على: $y(t) = L^{-1}[....]$

وهو الحل المطلوب .

أمثلة محلولة:

مثال(١): حل المعادلة التفاضلية الآتية: $y''(t)+y(t)=1$

مع الشروط الابتدائية: $y(0) = 1, y'(0) = 0$

الحل: الخطوة الأولي:

بأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة :

$$L\{y''(t)\}+L\{y(t)\}=L\{1\} \qquad (1)$$

ومن النظرية (٢) [الخاصة بالمشتقة الثانية]:

$$L\{y''(t)\}=s^2L\{y(t)\}-sy(0)-y'(0) \qquad (2)$$

ومن الشروط الابتدائية :

$$y(0)=1 \quad , \quad y'(0)=0$$

بالتعويض في (2):

$$L\{y''(t)\}=s^2L\{y(t)\}-s[1]-[0]=s^2L\{y(t)\}-s \qquad (3)$$

الخطوة الثانية: بالتعويض في (1) واعتبار أن : $L\{1\}=\frac{1}{s}$

$$\therefore\ s^2L\{y(t)\}-s+L\{y(t)\}=\frac{1}{s}$$

$$\therefore (s^2+1)L\{y(t)\}=s+\frac{1}{s}$$

$$\therefore L\{y(t)\}=\frac{s+\frac{1}{s}}{s^2+1}=\frac{\frac{s^2+1}{s}}{s^2+1}=\frac{1}{s}$$

الخطوة الثالثة: نأخذ تحويل لابلاس العكسي للطرفين :

$y(t) = L^{-1}(\frac{1}{s}) = 1$ (من جدول التحويلات العكسية)

$\therefore$ الحل المطلوب هو : $y(t) = 1$.

للتحقق من هذا الحل : الحل الناتج هو : $y(t) = 1$

فيجب أن يحقق المعادلة : $y''(t) + y(t) = 1$

حيث أن : $y = 1 \to y' = 0 \to y'' = 0$

$y'' + y = 0 + 1 = 1$

$\therefore$ الحل $y(t) = 1$ يحقق المعادلة $y''(t) + y(t) = 1$

وهو المطلوب.

مثال(٢): باستخدام تحويلات لابلاس حل المعادلة التفاضلية الآتية :

$$y''(t) + y(t) = t \qquad (1)$$

تحت الشروط الابتدائية : $y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 2$

الحل: بأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعالة (1):

$$L[\{y''(t)] + L[y(t)] = L[t]$$

ولكن:

$$L\{y''(t)\} = s^2 L\{y(t)\} - s\,y(0) - y'(0)$$

$$L\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

$$\therefore s^2 L\{y(t)\} - s\,y(0) - y'(0) + L\{y(t)\} = \frac{1}{s^2}$$

$$\therefore (s^2+1) L\{y(t)\} = \frac{1}{s^2} + s\,y(0) + y'(0) = \frac{1}{s^2} + 2 = \frac{1+2s^2}{s^2}$$

$$L\{y(t)\} = \frac{1+2s^2}{s^2(s^2+1)}$$

وبأخذ التحويل العكسي :

$$y(t)=L^{-1}[\frac{1+2s^2}{s^2(s^2+1)}]=L^{-1}[\frac{(1+s^2)+s^2}{s^2(s^2+1)}]=L^{-1}[\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^2+1}]$$

وباستخدام قواعد التحويلات العكسية (في الجدول)

$$L^{-1}[\frac{1}{s^2}]=t \quad , \quad L^{-1}[\frac{1}{s^2+1}]=\sin t$$

$$\therefore\ y(t)=L^{-1}[\frac{1}{s^2}]+L^{-1}[\frac{1}{s^2+1}]=t+\sin t$$

وهو المطلوب.

<u>مثال(٣):</u> باستخدام تحويلات لابلاس اوجد الحل العام للمعادلتين :

$$(i)\ y''(t)+a^2y(t)=0 \qquad (1)$$

$$(ii) y''(t)-a^2y(t)=0 \qquad (2)$$

مع الشروط الابتدائية : $y(0)=A\ ,y'(0)=D$ وذلك بالصورة :

$$(i)\ y=A\cos at+B\sin at \qquad \Big|\ B=\frac{D}{a}$$

$$(ii)\ y=A\cosh at+B\sinh at$$

<u>الحل:</u> بأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة (1)

$$L\{y''(t)\}+a^2L\{y(t)\}=0$$

ولكن :

$$L\{y''(t)\}=s^2L\{y(t)\}-s\,y(0)-y'(0)$$

$$\therefore s^2L\{y(t)\}-s\,y(0)-y'(0)+a^2L\{y(t)\}=0$$

$$s^2L\{y(t)\}-sA-D+a^2L\{y(t)\}=0$$

$$(s^2+a^2)L\{y(t)\}=sA+D$$

$$L\{y(t)\}=\frac{sA+D}{s^2+a^2}$$

وبأخذ تحويل لابلاس العكسي :

$$\therefore y=L^{-1}[\frac{sA+D}{s^2+a^2}]=L^{-1}[\frac{sA}{s^2+a^2}]+L^{-1}[\frac{D}{s^2+a^2}]$$

$$= L^{-1}[A(\frac{s}{s^2+a^2})] + L^{-1}[\frac{D}{a}(\frac{a}{s^2+a^2})]$$

$$= L^{-1}[A(\frac{s}{s^2+a^2})] + L^{-1}[B(\frac{a}{s^2+a^2})]$$

$$= AL^{-1}[(\frac{s}{s^2+a^2})] + BL^{-1}[(\frac{a}{s^2+a^2})]$$

ولكن من الجدول :

$$L^{-1}(\frac{s}{s^2+a^2}) = \cos at \qquad , \qquad L^{-1}(\frac{a}{s^2+a^2}) = \sin at$$

$$\therefore y = A\cos at + B\sin at$$

وهو المطلوب أولاً.

<u>المعادلة الثانية</u> (ii) : بأخذ تحويل لابلاس للطرفين :

$$L\{y''(t)\} - a^2 L\{y(t)\} = 0$$

$$s^2 L\{y(t)\} - s\,y(0) - y'(0) - a^2 L\{y(t)\} = 0$$

$$\therefore \ s^2 L\{y(t)\} - sA - D - a^2 L\{y(t)\} = 0$$

$$\therefore \ (s^2 - a^2) L\{y(t)\} = sA + D$$

$$\therefore \qquad L\{y(t)\} = \frac{sA+D}{(s^2-a^2)}$$

وبأخذ تحويل لابلاس العكسي:

$$\therefore y = L^{-1}[\frac{sA+D}{s^2-a^2}] = L^{-1}[\frac{sA}{s^2-a^2}] + L^{-1}[\frac{D}{s^2-a^2}]$$

$$= L^{-1}[A(\frac{s}{s^2-a^2})] + L^{-1}[\frac{D}{a}(\frac{a}{s^2-a^2})]$$

$$= L^{-1}[A(\frac{s}{s^2-a^2})] + L^{-1}[B(\frac{a}{s^2-a^2})]$$

$$= AL^{-1}[(\frac{s}{s^2-a^2})] + BL^{-1}[(\frac{a}{s^2-a^2})]$$

ولكن من الجدول :

$$L^{-1}\left(\frac{s}{s^2-a^2}\right)=\cosh at \quad , \quad L^{-1}\left(\frac{a}{s^2-a^2}\right)=\sinh at$$

$$\therefore y = A\cosh at + B\sinh at$$

وهو المطلوب ثانياً.

مثال(٤): باستخدام تحويلات لابلاس اوجد الحل العام للمعادلتين :

$$(i)\ y''(t)+a^2 y(t)=\cos at \qquad (1)$$

$$(ii)\ y''(t)+a^2 y(t)=\sin at \qquad (2)$$

مع الشروط الابتدائية : $y(0)=0 \ , y'(0)=a$ وباستخدام العلاقة:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+a^2)^2}\right]=\frac{1}{2a^3}[\sin at - at\cos at]$$

[سبق استنتاجها كمثال].

الحل: المعادلة الأولى (1) :

بأخذ تحويل لابلاس للطرفين نجد أن:

$$L\{y''(t)\}+a^2L\{y(t)\}=L[\cos at]$$

$$\{s^2L\{y(t)\}-sy(0)-y'(0)\}+a^2L\{y(t)\}=L[\cos at]$$

$$\therefore s^2L\{y(t)\}-a+a^2L\{y(t)\}=\frac{s}{s^2+a^2}$$

$$\therefore (s^2+a^2)L\{y(t)\}=\frac{s}{s^2+a^2}+a$$

$$\therefore \qquad L\{y(t)\}=\frac{s}{(s^2+a^2)^2}+\frac{a}{s^2+a^2}$$

وبأخذ تحويل لابلاس العكسي :

$$y=L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+a^2)^2}+\frac{a}{s^2+a^2}\right]$$

ولكن من الجدول:

$$L^{-1}[\frac{a}{s^2+a^2}]=\sin at \ , \ L^{-1}[\frac{2s}{(s^2+a^2)^2}]=\frac{t}{a}\sin at$$

$$y=L^{-1}[\frac{s}{(s^2+a^2)^2}]+L^{-1}[\frac{a}{s^2+a^2}] \ =\frac{1}{2}\frac{t}{a}\sin at+\sin at \ =(1+\frac{t}{2a})\sin at$$

وهو المطلوب أولاً.

<u>المعادلة الثانية</u> (ii) : بأخذ تحويل لابلاس للطرفين نجد أن:

$$L\{y''(t)\}+a^2L\{y(t)\}=L[\sin at]$$

$$[s^2L\{y(t)\}-s\,y(0)-y'(0)]+a^2\,L\{y(t)\}=L[\sin at]$$

$$s^2L[y(t)]-a+a^2\,L[y(t)]=L[\sin at]$$

$$(s^2+a^2)L[y(t)]=L[\sin at]+a$$

$$\therefore(s^2+a^2)L[y(t)]=\frac{a}{s^2+a^2}+a$$

$$\therefore \qquad L[y(t)]=\frac{a}{(s^2+a^2)^2}+\frac{a}{s^2+a^2}$$

وبأخذ تحويل لابلاس العكسي:

$$y=L^{-1}[\frac{a}{(s^2+a^2)^2}+\frac{a}{s^2+a^2}] \ =aL^{-1}[\frac{1}{(s^2+a^2)^2}]+L^{-1}[\frac{a}{s^2+a^2}]$$

ولكن:

$$L^{-1}[\frac{a}{s^2+a^2}]=\sin at$$

$$L^{-1}[\frac{1}{(s^2+a^2)^2}]=\frac{1}{2a^3}[\sin at-at\cos at]$$ (من رأس المسألة)

$$\therefore y=\frac{1}{2a^2}[\sin at-at\cos at]+\sin at \ =(1+\frac{1}{2a^2})\sin at-\frac{t}{2a}\cos at$$

وهو المطلوب ثانياً.

<u>مثال(5):</u> باستخدام تحويل لابلاس للمشتقة الثالثة للدالة $y(t)$ بالصورة :

$$L\{y'''(t)\} = s^3 L\{y(t)\} - s^2 y(0) - s\,y'(0) - y''(0) \qquad (1)$$

[سبق إيجاده كمثال].

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y'''(t) + y(t) = 0 \qquad (2)$$

مع الشروط الابتدائية : $y''(0)=1$, $y'(0)=-1$, $y(0)=1$.

<u>الحل:</u> بأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة (2):

$$L[y'''(t)] + L[y(t)] = 0$$

وبالتعويض عن $L[y'''(t)]$ من (2) واستخدام الشروط الابتدائية:

$$s^3 L[y(t)] - s^2 y(0) - s\,y'(0) - y''(0) + L[y(t)] = 0$$

$$\therefore s^3 L[y(t)] - s^2 + s - 1 + L[y(t)] = 0$$

$$(s^3+1) L[y(t)] = s^2 - s + 1$$

$$\therefore \quad L[y(t)] = \frac{s^2 - s + 1}{(s^3+1)}$$

ولكن من قانون مجموع المكعبين :

$$(s^3 + a^3) = (s+a)(s^2 - sa + a^2)$$

$$(s^3+1) = (s+1)(s^2 - s + 1)$$

$$\therefore L[y] = \frac{(s^2 - s + 1)}{(s+1)(s^2 - s + 1)} = \frac{1}{(s+1)}$$

وبأخذ تحويل لابلاس العكسي :

$$\therefore y = L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)}\right] \qquad (3)$$

ولكن من الجدول :

$$\therefore L^{-1}\left[\frac{1}{(s+a)}\right] = e^{-at} \qquad \therefore L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)}\right] = e^{-t}$$

وتصبح (3) بالصورة :

$$\boxed{y = e^{-at}}$$

وهو المطلوب .

ملحوظة: عند إيجاد التحويل العكسي ، عادة ما يظهر لنا كسر حقيقي فيجب تجزئته باستخدام قواعد الكسور الجزئيةالتي نجملها فيما يلي :

(١) إذا كان مقام الكسر على صورة عوامل خطية (من الدرجة الأولى)،يكتب الكسر بالصورة :

$$\boxed{} = \frac{A_1}{a_1 x + b_1} + \frac{A_2}{a_2 x + b_2} + \ldots\ldots$$

مثل :

$$\frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+2}$$

وإذا كان في المقام عوامل خطية بعضها مكرر نتبع الآتي :

$$\frac{x+1}{x^2(x-1)} = \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x} + \frac{A_3}{x-1}$$

$$\frac{2x+3}{x(x-1)^3} = \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{(x-1)^3} + \frac{A_3}{(x-1)^2} + \frac{A_4}{(x-1)}$$

(٢) إذا احتوى المقام على عوامل تربيعيه من الدرجة الثانية (وصورتها ax^2+bx+c) ولا يمكن تحليلها ، ويكتب الكسر بالصورة :

$$\boxed{} = \frac{A_1 x + B_1}{a_1 x^2 + b_1 x + c_1} + \frac{A_2 x + B_2}{a_2 x^2 + b_2 x + c_2} + \ldots\ldots$$

مثل :

$$\frac{x^2+15}{(x-1)(x^2+2x+5)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{A_1 x + B_1}{(x^2+2x+5)}$$

وإذا كان في المقام عوامل تربيعيه بعضها مكرر فنتبع الآتي :

$$\frac{x+5}{x(x^2+x+4)^2} = \frac{A}{x} + \frac{A_1 x + B_1}{(x^2+x+4)^2} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2+x+4)}$$

(٣) بضرب طرفي العلاقة في مقام الكسر الأصلي ومساواة المعاملات في طرفي المعادلة الناتجة وحل المعادلات التي نحصل عليها يمكن إيجاد قيم الثوابت .

مثال(٦): باستخدام تحويل لابلاس، أوجد حل المعادلة التفاضلية الآتية:

$$y''(t)-y'(t)=t \qquad (1)$$

مع الشروط الابتدائية: $y(0)=2\ ,y'(0)=-3$.

الحل: بأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة (1):

$$L[y''(t)]-L[y'(t)]=L[t]$$

وبالتعويض عن $L[y''(t)],L[y'(t)]$ من النظريتين الخاصتين بهما :

$$\{s^2L[y(t)]-sy(0)-y'(0)\}-\{s\ \ L[y(t)]-y(0)\}=\frac{1}{s^2}$$

$$\therefore\{s^2L[y(t)]-2s+3\}-\{s\ \ L[y(t)]-2\}=\frac{1}{s^2}$$

$$\therefore(s^2-s)L[y(t)]-2s+5=\frac{1}{s^2}$$

$$(s^2-s)L[y(t)]=\frac{1}{s^2}+2s-5=\frac{1+2s^3-5s^2}{s^2}$$

$$\therefore\qquad L[y(t)]=\frac{1+2s^3-5s^2}{s^2(s^2-s)}=\frac{2s^3-5s^2+1}{s^3(s-1)}$$

وبأخذ تحويل لابلاس العكسي :

$$y=L^{-1}[\frac{2s^3-5s^2+1}{s^3(s-1)}] \qquad (2)$$

ولإيجاد هذا التحويل العكسي يجب تجزئة الكسر وذلك باستخدام قواعد الكسور الجزئية :

$$\frac{2s^3-5s^2+1}{s^3(s-1)}=\frac{A}{s^3}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s}+\frac{D}{(s-1)}$$

بضرب الطرفين في مقام الطرف الأيسر :

$$\therefore 2s^3 - 5s^2 + 1 = A(s-1) + Bs(s-1) + Cs^2(s-1) + D\ s^3$$

$$= (C+D)\ s^3 + (B-C)\ s^2 + (A-B)\,s - A$$

بمقارنة المعاملات في الطرفين :

الحد المطلق: $1 = -A \rightarrow A = -1$

معاملات s: $0 = A - B \rightarrow B = A = -1$

معاملات s^2 : $-5 = B - C \rightarrow C = B + 5 = -1 + 5 = 4$

معاملات s^3: $2 = C + D \rightarrow D = 2 - C = 2 - 4 = -2$

ويصبح الكسر بالصورة :

$$\frac{2s^3 - 5s^2 + 1}{s^3(s-1)} = -\frac{1}{s^3} - \frac{1}{s^2} + \frac{4}{s} - \frac{2}{(s-1)}$$

$$\therefore L^{-1}[\frac{2s^3 - 5s^2 + 1}{s^3(s-1)}] = -L^{-1}[\frac{1}{s^3}] - L^{-1}[\frac{1}{s^2}] + 4L^{-1}[\frac{1}{s}] - 2L^{-1}[\frac{1}{(s-1)}]$$

$$= -\frac{t^2}{2!} - t + 4(1) - 2(e^t) = 4 - \frac{1}{2}t^2 - t - 2\,e^t$$

$$\therefore \quad y(t) = 4 - \frac{1}{2}t^2 - t - 2\,e^t$$

وهو المطلوب.

مثال (٧): باستخدام تحويل لابلاس ، أوجد حل المعادلة التفاضلية الآتية:

$$y''(t) - 3y'(t) + 2\,y(t) = 2\,e^{-t} \qquad (1)$$

مع الشروط الابتدائية: $y'(0) = -1$, $y(0) = 2$.

الحل: بأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة (1):

$$L[y''(t)] - 3L[y'(t)] + 2L[y(t)] = 2L[e^{-t}] \qquad (1)$$

وبالتعويض عن $L[y'],\ L[y'']$ من النظريتين الخاصتين بهما:

$$\{s^2L[y(t)]-s\,y(0)-y'(0)\}-3\{s\ L[y(t)]-y(0)\}+2L[y(t)]=2L[e^{-t}]$$

وبالتعويض بالشروط الابتدائية واعتبار أن: $L[e^{-t}]=\dfrac{1}{s+1}$

$$\{s^2L[y(t)]-2s+1\}-3\{s\ L[y(t)]-2\}+2L[y(t)]=\frac{2}{s+1}$$

$$\{s^2-3s+2)\ L[y(t)]-2s+7=\frac{2}{s+1}$$

$$(s^2-3s+2)\ L[y(t)]=\frac{2}{s+1}+2s-7=\frac{2+2s(s+1)-7(s+1)}{s+1}$$

$$=\frac{2s^2-5s-5}{s+1}$$

$$L[y(t)]=\frac{2s^2-5s-5}{(s+1)(s^2-3s+2)}=\frac{2s^2-5s-5}{(s+1)(s-1)(s-2)} \qquad (2)$$

حيث أن المقدار المربع : $s^2-3s+2=(s-1)(s-2)$ هو مقدار يمكن تحليله.

وبأخذ التحويل العكسي للعلاقة (2) :

$$\therefore y=L^{-1}\left[\frac{2s^2-5s-5}{(s+1)(s-1)(s-2)}\right] \qquad (3)$$

ولحساب هذا التحويل نجزئ الكسر باستخدام الكسور الجزئية كالآتي:

$$\therefore \frac{2s^2-5s-5}{(s+1)(s-1)(s-2)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s-1}+\frac{C}{s-2}$$

بضرب الطرفين في مقام الطرف الأيسر :

$$2s^2-5s-5=A(s-1)(s-2)+B(s+1)(s-2)+C(s+1)(s-1)$$

$$=s^2\ (A+B+C)+s(-3A-B)+(2A-2B-C)$$

وبمقارنة المعاملات والاختصار نجد أن :

$$A=\frac{1}{3} \quad , \quad B=4 \quad , \quad C=-\frac{7}{3}$$

$$\therefore \frac{2s^2-5s-5}{(s+1)(s-1)(s-2)}=\frac{1}{3(s+1)}+\frac{4}{s-1}-\frac{7}{3(s-2)}$$

$$\therefore y=\frac{1}{3}L^{-1}[\frac{1}{s+1}]+4L^{-1}[\frac{1}{s-1}]-\frac{7}{3}L^{-1}[\frac{1}{s-2}]$$

$$=\frac{1}{3}e^{-t}+4e^{t}-\frac{7}{3}e^{2t}$$

$$=\frac{1}{3}[e^{-t}+12e^{t}-7e^{2t}]$$

وهو المطلوب.

مسائل

باستخدام تحويلات لابلاس ،أوجد حل المعادلات التفاضلية الآتية مع اعتبار الشروط الابتدائية المعطاة :

$(i)\, y''(t)+y(t)=0, y(0)=1, y'(0)=0$

$(ii)\, y''(t)+2y'(t)+5y(t)=0, y(0)=y'(0)=1$

$(iii)\, y''(t)+2y'(t)+2y(t)=4, y(0)=y'(0)=0$

$(iv)\, y''(t)+3y'(t)+2y(t)=0, y(0)=3, y'(0)=0$

$(v)\, y''(t)-3y'(t)+2y(t)=4t-6, y(0)=1, y'(0)=3$

خواص تحويلات لابلاس وتحويلات لابلاس العكسية

الخاصية (1): الخاصية الانتقالية أو خاصية الإزاحة الأولى:

First translation property:

إذا كان a عدد حقيقي وكان

$$L[F(t)] = F(s)$$

فإن :

$$(i)\ L[e^{at} F(t)] = F(s-a)$$

$$(ii)\ L[e^{-at} F(t)] = F(s+a)$$

الإثبات: حيث أن :

$$L[F(t)] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)dt$$

$$\therefore L[e^{at} F(t)] = \int_0^\infty e^{-st}[e^{at} F(t)]dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} F(t)dt = F(s-a)$$

وبالمثل يمكن إثبات (ii) أو يمكن الحصول عليها من (i) بأخذ $-a$ بدلاً من a .

بالنسبة للتحويل العكسي : إذا كان التحويل العكسي للدالة $F(s)$ هو :

$$L^{-1}[F(s)] = F(t)$$

فإن :

$$L^{-1}[F(s-a)] = e^{at} F(t)$$

الإثبات :من الخاصية (i) : إذا كانت

$$F(s) = L[F(t)]$$

فإن:

$$F(s-a) = L[e^{at} F(t)]$$

وبأخذ التحويل العكسي للطرفين فإن :

$$L^{-1}[F(s-a)] = e^{at} F(t)$$

وهو المطلوب.

أمثلة محلولة:

مثال(1): أوجد تحويل لابلاس للدوال الآتية :

$(i)\ e^{3t}\sin 4t\ ,\quad (ii)\ e^{-2t}\sin 3t,\quad (iii)\ t^2 e^{-2t}$

الحل: بتطبيق الخاصية الانتقالية نحصل على:

(i) حيث أن :

$$L[\sin 4t]=\frac{4}{s^2+16}\rightarrow F(s)=\frac{4}{s^2+16}$$

وبأخذ $a=3$:

$$F(s-a)=F(s-3)=\frac{4}{(s-3)^2+16}$$

$$\therefore L[e^{3t}\sin 4t]=F(s-3)=\frac{4}{(s-3)^2+16}$$

(ii) حيث أن

$$L[\sin 3t]=\frac{3}{s^2+9}\rightarrow F(s)=\frac{3}{s^2+9}$$

وبأخذ $a=-2$:

$$F(s-a)=F(s+2)=\frac{3}{(s+2)^2+9}$$

$$\therefore L[e^{-2t}\sin 3t]=F(s+2)=\frac{3}{(s+2)^2+9}$$

(iii) حيث أن

$$L[t^2]=\frac{2!}{s^3}\rightarrow F(s)=\frac{2!}{s^3}$$

وبأخذ $a=-2$:

$$F(s-a)=F(s+2)=\frac{2}{(s+2)^3}$$

مسألة: أوجد تحويل لابلاس للدوال الآتية :

$(i)te^{-3t}$, $\quad (ii)e^{2t}\sin 3t$

$(iii)e^{2t}\sinh 3t$, $\quad (iv)\, e^{-5t}\cos 2t$

مثال(2): أوجد تحويل لابلاس العكسي للدوال الآتية:

$$(i)\frac{2s+3}{s^2-2s+5} \ , \qquad (ii)\frac{s+1}{s^2+6s+25}$$

$$(iii)\frac{3s-4}{(2s-3)^5}$$

الحل:

$$(i)\ L^{-1}[\frac{2s+3}{s^2-2s+5}]=L^{-1}[\frac{2(s-1)+5}{(s-1)^2+4}]$$

$$=2L^{-1}[\frac{s-1}{(s-1)^2+4}]+\frac{5}{2}L^{-1}[\frac{2}{(s-1)^2+4}]$$

ولكن :

$$L^{-1}[\frac{s}{s^2+4}]=\cos 2t \ , \ L^{-1}[\frac{2}{s^2+4}]=\sin 2t$$

ومن الخاصية الانتقالية فإن :

$$L^{-1}[\frac{s-1}{(s-1)^2+4}]=e^t\cos 2t \ , \quad L^{-1}[\frac{2}{(s-1)^2+4}]=e^t\sin 2t$$

$$\therefore L^{-1}[\frac{2s+3}{s^2-2s+5}]=2e^t\cos 2t+\frac{5}{2}e^t\sin 2t$$

$$=\frac{1}{2}e^t[4\cos 2t+5\sin 2t]$$

$$(ii)L^{-1}[\frac{s+1}{s^2+6s+25}]=L^{-1}[\frac{(s+3)-2}{(s+3)^2+4^2}]$$

$$=L^{-1}[\frac{s+3}{(s+3)^2+4^2}]-2L^{-1}[\frac{1}{(s+3)^2+4^2}]$$

ومن الخاصية الانتقالية فإن :

$$L^{-1}[\frac{s+3}{(s+3)^2+4^2}]=e^{-3t}\cos 4t \quad , \quad L^{-1}[\frac{1}{(s+3)^2+4^2}]=e^{-3t}\frac{\sin 4t}{4}$$

$$\therefore L^{-1}[\frac{s+1}{s^2+6s+25}]=e^{-3t}\cos 4t-2[\frac{e^{-3t}\sin 4t}{4}]=e^{-3t}[\cos 4t-\frac{1}{2}\sin 4t]$$

$$(iii)L^{-1}[\frac{3s-4}{(2s-3)^5}]=L^{-1}[\frac{3s-4}{2^5(s-\frac{3}{2})^5}$$

$$=\frac{1}{2^5}L^{-1}[\frac{3s-4}{(s-\frac{3}{2})^5}]=\frac{1}{32}L^{-1}\left[\frac{3(s-\frac{3}{2})+\frac{1}{2}}{(s-\frac{3}{2})^5}\right]$$

$$=\frac{3}{32}L^{-1}[\frac{1}{(s-\frac{3}{2})^4}]+\frac{1}{64}L^{-1}[\frac{1}{(s-\frac{3}{2})^5}]$$

ومن الخاصية الانتقالية:

$$L^{-1}[\frac{1}{(s-a)^{n+1}}]=e^{at}\frac{t^n}{n!}$$

$$L[e^{at}t^n]=\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

$$L^{-1}[\frac{1}{(s-\frac{3}{2})^4}]=e^{\frac{3}{2}t}\frac{t^3}{3!}$$

$$L^{-1}[\frac{1}{(s-\frac{3}{2})^5}]=e^{\frac{3}{2}t}\frac{t^4}{4!}$$

$$\therefore L^{-1}[\frac{3s-4}{(2s-3)^5}]=\frac{3}{32}[e^{\frac{3}{2}t}\frac{t^3}{3!}]+\frac{1}{64}[e^{\frac{3}{2}t}\frac{t^4}{4!}]$$

$$=\frac{e^{\frac{3}{2}t}t^3}{32}[\frac{3}{3!}+\frac{t}{2(4!)}]=\frac{t^3}{32}e^{\frac{3}{2}t}[\frac{1}{2}+\frac{t}{2(4!)}]=\frac{t^3e^{\frac{3}{2}t}}{64}[1+\frac{t}{4!}]$$

وهو المطلوب.

دالة الوحدة السلمية (Unit step function)

أو دالة هڤيسايد (Heaviside function):

تعرف هذه الدالة كالآتي:

$$H(t-a)=\begin{cases}0 & t<a\\ 1 & t\geq a\end{cases}$$

إيجاد تحويل لآبلاس لدالة هڤيسايد:

$$L[H(t-a)]=\int_0^{\infty}H(t-a)e^{-st}\,dt=\int_0^{a}(0)e^{-st}\,dt+\int_a^{\infty}(1)e^{-st}\,dt$$

$$=0+[\frac{e^{-st}}{-s}]\;\Big|_a^{\infty}\qquad,\quad s>0$$

ويكون التحويل العكسي بالصورة :

$$L^{-1}[\frac{e^{-as}}{s}]=H(t-a)$$

أمثلة محلولة :

مثال(1): عبر عن الدالة $f(t)$ الآتية بدلالة دالة الوحدة السلمية لهيفسايد ، ثم أوجد تحويل لابلاس لها :

$$f(t)=\begin{cases}6 & t<2\\ 4 & t>2\end{cases}\qquad (1)$$

يمكن التعبير عن الدالة (1) بالصورة الآتية :

$$f(t)=6+\begin{cases}0 & t<2\\ -2 & t>2\end{cases}$$

$$\therefore f(t)=6-2\begin{cases}0 & t<2\\ -1 & t>2\end{cases}$$

$$\therefore f(t)=6-2\,H(t-2)$$

ويكون محول لابلاس لها بالصورة :

$$L\{f(t)\}=L\{6\}-2L\{H(t-2)\}=6L\{1\}-2L\{H(t-2)\}$$

$$=\frac{6}{s}-2\frac{e^{-2s}}{s}=\frac{2}{s}[3-e^{-2s}]$$

وهو المطلوب.

<u>مثال(2):</u> عبر عن الدالة $f(t)$ الآتية بدلالة دالة الوحدة السلمية لهفيسايد ، ثم أوجد تحويل لابلاس لها

$$f(t)=\begin{cases}\sin(2t) & t<\pi\\ \sin(2t)+8 & t>\pi\end{cases} \qquad (1)$$

<u>الحل:</u> يمكن التعبير عن الدالة (1) بالصورة الآتية:

$$f(t)=\sin(2t)+\begin{cases}0 & t<\pi\\ 8 & t>\pi\end{cases}$$

$$\therefore f(t)=\sin(2t)+8\ H(t-\pi)$$

ويكون محول لابلاس لها بالصورة:

$$L\{f(t)\}=L\{\sin 2t\}+8L\{H(t-\pi)\}$$

$$=\frac{2}{s^2+4}+8\frac{e^{-\pi s}}{s}=2[\frac{1}{s^2+4}+\frac{4}{s}e^{-\pi s}]$$

وهو المطلوب.

<u>الخاصية(2):</u> الخاصية الانتقالية (أو خاصية الإزاحة)الثانية:

Second Translation Property

إذا كان $a>0$ وكانت :

$$H(t-a)=\begin{cases}0 & t\le a\\ 1 & t\ge a\end{cases}$$

هي دالة هيفيسايد وكان $L[F(t)]=F(s)$ فإن :

$$L[F(t-a)\,H(t-a)]=e^{-as}F(s)$$

الإثبات: من تعريف تحويل لابلاس:

$$L[F(t-a)H(t-a)]=\int_0^\infty e^{-st}F(t-a)H(t-a)dt$$

$$=\int_0^a e^{-st}F(t-a)H(t-a)dt+\int_a^\infty e^{-st}F(t-a)H(t-a)dt$$

$$=\int_0^a e^{-st}(0)\,dt+\int_a^\infty e^{-st}(1)F(t-a)dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-st}F(t-a)dt$$

[باستخدام خواص الدالة $H(t-a)$].

وبوضع $z=t-a$ فإن $dz=dt$, $t=z+a$

$$\therefore L[F(t-a)H(t-a)]=\int_0^\infty e^{-s(z+a)}F(z)dz=e^{-as}\int_0^\infty e^{-sz}F(z)dz$$

$$=e^{-as}\,L\{F(z)\}=e^{-as}\,F(s)$$

ملحوظة: التحويل العكسي من هذه العلاقة يمكن كتابته بالصورة:

$$L^{-1}[e^{-as}F(s)]=F(t-a)H(t-a)$$

أمثلة محلولة:

مثال(1): أوجد تحويل لآبلاس للدالة

$$F(t)=\begin{cases}1 & 0<t<\pi\\ 0 & \pi<t<2\pi\\ \sin t & t\geq 2\pi\end{cases}$$

الحل: الدالة $F(t)$ يمكن كتابتها بدلالة دالة هفيسايد كالآتي:

$$F(t)=H(t-0)-H(t-\pi)+H(t-2\pi)\sin t$$

وذلك لأن:

$$F(t)=\begin{Bmatrix} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix} 0 & t<\pi \\ 1 & t>\pi \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} 0 & t<2\pi \\ \sin t & t\geq 2\pi \end{Bmatrix}$$

$$\therefore\ F(t)=H(t)-H(t-\pi)+H(t-2\pi).\sin t$$

وبأخذ تحويل لابلاس للطرفين :

$$L\{F(t)\}=L\{H(t)\}-L\{H(t-\pi)\}+L\{H(t-2\pi).\sin t\}$$

ولكن:

$$L\{H(t-a)\}=\frac{e^{-as}}{s}\rightarrow L\{H(t)\}=\frac{e^{0}}{s}=\frac{1}{s}$$

$$L\{H(t-a)F(t-a)=e^{-as}F(s)\rightarrow L\{H(t-2\pi)\cdot\sin t\}=e^{-2\pi s}\cdot\frac{1}{s^2+1}$$

$$L\{F(t)\}=\frac{1}{s}-\frac{e^{-\pi s}}{s}+\frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}$$

وهو المطلوب.

<u>مثال(2):</u> أوجد تحويل لابلاس العكسي للدالتين:

$$(i)\ \frac{e^{-4s}}{s^6}\ ,\quad (ii)\ \frac{e^{-5s}}{\sqrt{s-6}}$$

<u>الحل</u>: <u>أولاً:</u> حيث أن $L^{-1}[\frac{1}{s^6}]=\frac{t^5}{5!}$ ، وحسب خاصية الإزاحة الثانية :

$$L^{-1}[\frac{e^{-4s}}{s^6}]=\frac{(t-4)^5}{5!}H(t-4)$$

$$\therefore\ L^{-1}[\frac{e^{-4s}}{s^6}]=\begin{cases} 0 & t<9 \\ \dfrac{(t-4)^5}{5!} & t\geq 4 \end{cases}$$

وهو المطلوب أولاً.

ثانياً: حيث أن:

$$L^{-1}[\frac{1}{\sqrt{s-6}}]=e^{6t}L^{-1}[\frac{1}{\sqrt{s}}]=e^{6t}\,\frac{t^{\frac{-1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}=e^{6t}\,\frac{t^{\frac{-1}{2}}}{\sqrt{\pi}}$$

وذلك حيث : $L^{-1}[s^{-\frac{1}{2}}]=\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}$ ومن خواص دالة $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.

وحسب خاصية الإزاحة الثانية :

$$L^{-1}[\frac{e^{-5s}}{\sqrt{s-6}}]=\frac{1}{\sqrt{\pi}}H(t-5)e^{6(t-5)}(t-5)^{\frac{-1}{2}}$$

$$=\begin{cases}0 & t<5\\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{6(t-5)}(t-5)^{\frac{-1}{2}} & t\geq 5\end{cases}$$

وهو المطلوب ثانياً.

<u>مثال(3):</u>

أ) أوجد تحويل لابلاس للدالة $F(t)$ حيث:

$$F(t)=\begin{cases}\cos(t-\frac{2\pi}{3}) \quad , & t>\frac{2\pi}{3}\\ 0 \quad , & t<\frac{2\pi}{3}\end{cases}$$

ب) أوجد تحويل لابلاس العكسي للدالة:

$$\left[\frac{se^{\frac{-2}{3}\pi s}}{s^2+9}\right]$$

الحل: الجزء (أ): من تعريف تحويل لابلاس :

$$L[F(t)]=\int_0^{\infty}e^{-st}F(t)\,dt=\int_0^{\frac{2}{3}\pi}e^{-st}(0)\,dt+\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\infty}e^{-st}\cos(t-\frac{2\pi}{3})\,dt$$

$$=\int_0^{\infty}e^{-s(u+\frac{2\pi}{3})}\cos u\,du \qquad \Big| \; u=t-\frac{2\pi}{3}$$

وذلك باستخدام المتغير $u=t-\frac{2\pi}{3}$.

ومن خاصية الانتقال الثانية نحصل على:

$$L[F(t)]=e^{-\frac{2\pi s}{3}}L[\cos u]=e^{-\frac{2\pi s}{3}}(\frac{s}{s^2+1})$$

وهو المطلوب .

الجزء (ب): لإيجاد التحويل العكسي $L^{-1}[\frac{se^{\frac{-2\pi s}{3}}}{s^2+9}]$

حيث أن: $L^{-1}[\frac{s}{s^2+9}]=\cos 3t$

فمن خاصية الانتقال الثانية نحصل على:

$$L^{-1}[\frac{s}{s^2+9}e^{\frac{-2\pi s}{3}}]=\begin{cases}\cos 3(t-\frac{2\pi}{3}), & t>\frac{2\pi}{3}\\ 0, & t<\frac{2\pi}{3}\end{cases}$$

$$=\cos(t-\frac{2\pi}{3})\begin{cases}1, & t>\frac{2\pi}{3}\\ 0, & t<\frac{2\pi}{3}\end{cases}$$

$$=\cos 3(t-\frac{2\pi}{3}).H(t-\frac{2\pi}{3})$$

وهو المطلوب.

<u>للتذكرة</u>: نظرية (أو خاصية) الانتقال الثانية تنص على أن:

$$L[F(t)\,H(t-a)] = e^{-as}\,F(s)$$

وعكس النظرية ينص على أن:

$$L^{-1}[e^{-as}F(s)] = F(t-a).H(t-a)$$

<u>مثال (4):</u> أوجد الحل للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$y''(t) + 2\,y(t) = F(t) \qquad (1)$$

حيث:

$$F(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < \pi \\ 0 & \pi < t < 2\pi \\ \sin t & t > 2\pi \end{cases}$$

تحت الشروط الحدية $y(0)=0 \ , \ y'(0)=0$

<u>الحل:</u> نكتب الدالة $F(t)$ على صورة دالة هفيسايد كالتالي :

$$F(t) = H_0(t) - H(t-\pi) + H(t-2\pi)\sin t \qquad (2)$$

وبأخذ تحويل لابلاس للمعادلة (1) المعطاة واستخدام تعريف دالة هيفيسايد :

$$L[y''] + 2L[y] = L[F(t)]$$

$$\therefore \{s^2 y(s) - s\,y(0) - y'(0)\} + 2\,y(s)$$

$$= L\{H_0(t)\} - L\{H(t-\pi)\} + L\{H(t-2\pi)\sin t\}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{e^{-\pi s}}{s} + \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}$$

وباستخدام الشروط الحدية والاختصار نحصل على:

$$y(s) = \frac{1}{s(s^2+2)} - \frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+2)} + \frac{e^{-2\pi s}}{(s^2+1)(s^2+2)} \qquad (3)$$

وبأخذ تحويل لابلاس العكسي :

$$y(t)=L^{-1}\{\frac{1}{s(s^2+2)}\}-L^{-1}\{\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+2)}\}+L^{-1}\{\frac{e^{-2\pi s}}{(s^2+1)(s^2+2)}\} \quad (4)$$

وحيث أن $L^{-1}[\frac{1}{s^2+1}]=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t$.

$$L^{-1}[\frac{1}{s(s^2+2)}]=\frac{1}{2}[t-\cos\sqrt{2}t] \quad (5)$$

(يمكن حسابه بسهولة)

وبتطبيق خاصية الإزاحة الثانية نحصل على:

$$L^{-1}\{\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+2)}\}=\frac{1}{2}H(t-\pi)[t-\cos\sqrt{2}(t-\pi)] \quad (6)$$

أيضاً :حيث أن :

$$L^{-1}\{\frac{1}{(s^2+1)(s^2+2)}\}=L^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\}-L^{-1}\{\frac{1}{s^2+2}\}$$
$$=\sin t-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t$$

وبتطبيق خاصية الإزاحة الثانية نحصل على :

$$L^{-1}[\frac{e^{-2\pi s}}{(s^2+1)(s^2+2)}]=H(t-2\pi)[\sin(t-2\pi)-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}(t-2\pi)] \quad (7)$$

وبالتعويض من (7),(6),(5) في (4) نحصل على:

$$y(t)=\frac{1}{2}[t-\cos\sqrt{2}t]-\frac{1}{2}H(t-\pi)[1-\cos\sqrt{2}(t-\pi)]$$
$$+H(t-2\pi)[\sin(t-2\pi)-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}(t-2\pi)]$$

وهو المطلوب.

خاصية(3): خاصية تغيير المقياس Change of scale property

إذا كانت $L[F(t)]=F(s)$ فإن:

$$L[F(at)]=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$$

البرهان: من تعريف تحويل لابلاس:

$$L[F(at)]=\int_0^\infty e^{-st}F(at)\,dt$$

وبوضع $at=u$ فإن: $t=\frac{u}{a}\rightarrow dt=\frac{1}{a}du$

$$\therefore L[F(u)]=\int_0^\infty e^{-\frac{su}{a}}F(u)\frac{1}{a}du=\frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-(\frac{s}{a})u}F(u)du=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$$

وهو المطلوب.

وبالنسبة للتحويل العكسي :

إذا كانت $L^{-1}[F(s)]=F(t)$ فإن:

$$L^{-1}[F(as]=\frac{1}{a}F(\frac{t}{a}),\qquad a>0$$

البرهان: حيث أن $F(s)=\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt$ فإن:

$$F(as)=\int_0^\infty e^{-ast}F(t)\,dt$$

وذلك بوضع as بدلاً من s وبأخذ $at=u$ فإن: $t=\frac{u}{a}\rightarrow dt=\frac{1}{a}du$

$$\therefore F(as)=\int_0^\infty e^{-us}F(\frac{u}{a})\frac{du}{a}=\frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-us}F(\frac{u}{a})du=\frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-st}F(\frac{t}{u})dt$$

وذلك بوضع t بدلاً من u

$$\therefore F(as)=\frac{1}{a}L[F(\frac{t}{a})]=L[\frac{1}{a}F(\frac{t}{a})]$$

وبأخذ التحويل العكسي فإن:

$$L^{-1}[F(as)]=\frac{1}{a}F(\frac{t}{a})$$

وهو المطلوب .

<u>**مثال:**</u>

(أ) أوجد تحويل لابلاس للدالة $F(t)=\cos 5t$

(ب) إذا كان $L^{-1}[\frac{e^{\frac{-1}{s}}}{\sqrt{s}}]=(\frac{1}{\sqrt{\pi t}})\cos 2\sqrt{t}$ ، فأوجد $L^{-1}[\frac{e^{-\frac{a}{s}}}{s^{\frac{1}{2}}}]$ ، حيث $a>0$

(ج) إذا كان $L[\frac{\sin t}{t}]=\tan^{-1}(\frac{1}{s})$ فأوجد $L[\frac{\sin at}{t}]$

<u>**الحل**</u>: <u>الجزء(أ)</u>: حيث أن $L[\cos at]=\frac{s}{s^2+1}$

فمن الخاصية (3) نجد أن :

$$L[\cos 5t]=\frac{1}{5}\frac{\frac{s}{5}}{(\frac{s}{5})^2+1}=\frac{s}{s^2+25}$$

(حيث $a=5$).

<u>الجزء(ب)</u>: حيث أن

$$L^{-1}[\frac{e^{\frac{-1}{s}}}{\sqrt{s}}]=\frac{\cos 2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi t}}$$

فمن الخاصية(3) نجد أن :

$$L^{-1}[\frac{e^{\frac{-1}{ks}}}{\sqrt{ks}}]=\frac{1}{k}\frac{\cos 2\sqrt{t/k}}{\sqrt{\frac{\pi t}{k}}}$$

(حيث $a=\frac{1}{k}$)

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{k}} L^{-1}[\frac{e^{\frac{-1}{ks}}}{\sqrt{s}}]=\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\cos 2\sqrt{t/k}}{\sqrt{\pi t}}$$

وبوضع $k=\frac{1}{a}$ نحصل على :

$$L^{-1}[\frac{e^{\frac{-a}{s}}}{\sqrt{s}}]=\frac{\cos 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi t}}$$

وهو المطلوب.

<u>الجزء(ج):</u> من الخاصية (3) (خاصية تغيير المقياس):

$$L[F(at)]=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$$

وحيث أن $L[\frac{\sin at}{t}]=\tan^{-1}(\frac{1}{s})$

$$\therefore L[\frac{\sin at}{at}]=\frac{1}{a}\tan^{-1}[\frac{1}{\frac{s}{a}}]=\frac{1}{a}L\{\frac{\sin at}{t}\}$$

وهذا يعني أن :

$$L[\frac{\sin at}{t}]=\tan^{-1}[\frac{1}{\frac{s}{a}}]=\tan^{-1}(\frac{a}{s})$$

وهو المطلوب.

<u>الخاصية (4): خاصية الاشتقاق Derivation Property</u>

إذا كانت $L[F(t)]=F(s)$

فإن:

$$L[t^n F(t)]=(-1)^n F^{(n)}(s)=(-1)^n\frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

البرهان: نأخذ الحالة $n=1$:

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt$$

فبالتفاضل بالنسبة إلى s واستخدام قاعدة ليبنتز للتفاضل تحت علامة التكامل:

$$\frac{dF}{ds}=\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}[e^{-st}F(t)]dt$$

$$\therefore F'(s)=-\int_0^\infty e^{-st}t\,F(t)dt=-L[t\,F(t)]$$

$$\therefore L[t\,F(t)]=-F'(s)=-F^{(1)}(s)=(-1)\frac{dF(s)}{ds}$$

وبالتفاضل مرة ثانية نحصل على:

$$L[t^2F(t)]=(-1)^2\frac{d^2F(s)}{ds^2}=(-1)^2F^{(2)}(s)$$

وبالتفاضل للمرة الثالثة نحصل على:

$$L[t^3\,F(t)]=(-1)^3\frac{d^3F(s)}{ds^3}=(-1)^3F^{(3)}(s)$$

وهكذا...... وبوجه عام فبالتفاضل (n) من المرات نحصل على:

$$L[t^n\,F(t)]=(-1)^n\frac{d^nF(s)}{ds^n}=(-1)^nF^{(n)}(s)$$

وهو المطلوب.

وبنفس الطريقة يمكن إثبات العكس: وهو:

إذا كانت $L^{-1}[F(s)]=F(t)$ فإن: $L^{-1}[F^{(n)}(s)]=(-1)^n t^n F(t)$

وفي الحالة الخاصة :عندما $n=1$ فإن :

$$\boxed{L^{-1}[F^{(1)}(s)]=-t\,F(t)}$$

حيث $F^{(1)}(s)=\dfrac{dF(s)}{ds}$

أمثلة محلولة:

مثال(1): أوجد تحويل لابلاس للدالة $F(t)=t^3 e^t$

الحل: حيث أن :

$$L[e^t]=F(s)=\frac{1}{s-a}$$

فبتطبيق خاصية الاشتقاق (رقم 4) نحصل على :

$$L\left[F(t)\right]=L\left[t^3 e^t\right]=(-1)^3\frac{d^3}{ds^3}\left[\frac{1}{s-a}\right]$$

$$=(-1)^3\frac{(-1)(-2)(-3)}{(s-a)^4}=\frac{6}{(s-a)^4}$$

مسألة :أوجد تحويل لابلاس للدالتين :

$(i)\ F(t)=te^{2t}$, $\qquad (ii)\ F(t)=t^2e^{3t}$

مثال(2): أوجد تحويل لابلاس للدالتين :

$(i)F(t)=t\sin 2t$, $\quad (ii)F(t)=t^2\sin 2t$

الحل: حيث أن

$$L[\sin 2t]=\frac{2}{s^2+4}$$

فبتطبيق خاصية الاشتقاق نحل على:

$$(i)\qquad L[t\sin 2t]=-\frac{d}{ds}\left(\frac{2}{s^2+4}\right)=\frac{4s}{(s^2+4)^2}$$

$$(ii)\qquad L[t^2\sin 2t]=\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{2}{s^2+4}\right)=\frac{12s^2-16}{(s^2+4)^3}$$

مسألة: أوجد تحويل لابلاس للدالتين :

$(i)\ F(t)=t^3\sin 3t$, $\qquad (ii)F(t)=t^2\cosh 4t$

مثال(3): أوجد تحويل لابلاس العكسي للدالتين :

$$(i)\ F(t)=\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\quad ,\quad (ii)\ F(t)=\ln(1+\frac{1}{s})$$

الحل:

(i) نعتبر العلاقة :

$$\frac{d}{ds}[\frac{1}{s^2+a^2}]=\frac{-2s}{(s^2+a^2)^2}$$

$$\therefore\ \frac{s}{(s^2+a^2)^2}=-\frac{1}{2}\frac{d}{ds}[\frac{1}{s^2+a^2}]$$

$$\therefore\ L^{-1}[\frac{s}{(s^2+a^2)^2}]=-\frac{1}{2}L^{-1}[\frac{d}{ds}(\frac{1}{s^2+a^2})=-\frac{1}{2}L^{-1}[F'(s)]$$

وباستخدام خاصية الاشتقاق:

$$\therefore\ L^{-1}[\frac{s}{(s^2+a^2)^2}]=-\frac{1}{2}[-tF(t)]=\frac{1}{2}t\frac{\sin at}{a}=\frac{t\sin at}{2a}$$

وذلك حيث أن:

$$L^{-1}[\frac{1}{s^2+a^2}]=\frac{\sin at}{a}=F(t)$$

(ii) نفرض أن

$$F(s)=\ln(1+\frac{1}{s})$$

وعلى ذلك فإن :

$$F'(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s}$$

وباستخدام خاصية الاشتقاق:

$$L^{-1}[F'(s)]=-tL^{-1}[\ln(1+\frac{1}{s})]$$

$$\therefore\ L^{-1}[\ln(1+\frac{1}{s})]=-\frac{1}{t}L^{-1}[\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s}]=\frac{-1}{t}[e^{-t}-1]=\frac{1-e^{-t}}{t}$$

وهو المطلوب.

الخاصية(5): خاصية تحويل (أو محول) لابلاس للتكاملات

Laplace Transform of Integrals

إذا كان $L[F(t)] = F(s)$ فإن تحويل لابلاس للتكامل $\int_0^t F(u)\,du$ يكون :

$$L[\int_0^t F(u)\,du] = \frac{1}{s}F(s)$$

البرهان: نفرض أن :

$$G(t) = \int_0^t F(u)\,du$$

$$\therefore\ G'(t) = \frac{d}{dt}[\int_0^t F(u)\,du] = F(t)$$

أيضا فإن:

$$G(0) = \int_0^0 F(u)\,du = 0$$

$$L[G'(t)] = sL[G(t)] - G(0)$$

$$\therefore\ L[F(t)] = sL[G(t)] - 0$$

$$\therefore\ L[G(t)] = \frac{1}{s}L[F(t)]$$

$$\therefore\ L[\int_0^t F(u)\,du] = \frac{1}{s}F(s)$$

وهو المطلوب.

وبالنسبة للعكس: إذا كان $L^{-1}F(s) = F(t)$ فإن $L^{-1}[\frac{1}{s}F(s)] = \int_0^t F(u)du$

نتيجة هامة: إذا كان $L[F(t)] = F(s)$ فإن:

$$L[\frac{F(t)}{t}] = \int_s^\infty F(u)du$$

وتعرف هذه النتيجة أحياناً بخاصية القسمة على t.

البرهان: لتكن $G(t)=\frac{F(t)}{t}$ فإن

$$F(t)=t\,G(t)$$

فبأخذ تحويل لابلاس:

$$\therefore\ L[F(t)]=L[tG(t)]=(-1)\frac{d}{ds}L[G(t)]$$

(باستخدام خاصية الاشتقاق)

$$\therefore -F(s)=\frac{d}{ds}L[G(t)]$$

وبتكامل الطرفين بالنسبة إلى s نحصل على:

$$-\int_{\infty}^{s}F(s)ds=L[G(t)]$$

وذلك باعتبار أن:

$$\lim_{s\to\infty}L[G(s)]\to 0$$

$$\therefore L[G(t)]=\int_{s}^{\infty}F(u)du \to L[\frac{F(t)}{t}]=\int_{s}^{\infty}F(u)du$$

وهو المطلوب.

أمثلة محلولة:

مثال(1): أوجد تحويل لابلاس للتكامل $\int_{0}^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt$.

الحل: حيث أن

$$L[\sin t]=\frac{1}{s^2+1}=F(s)$$

ومن نتيجة الخاصية (5) :

$$L[\frac{\sin t}{t}]=\int_{s}^{\infty}\frac{du}{u^2+1}$$

(حيث أن : $F(u)=\frac{1}{u^2+1}$)

$$\therefore L[\frac{\sin t}{t}] = \left[\tan^{-1} u\right]_s^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} s$$

وحيث أن : $\tan^{-1} s + \cot^{-1} s = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore L[\frac{\sin t}{t}] = \cot^{-1} s = \tan^{-1}(\frac{1}{s})$$

وعلى ذلك فمن الخاصية(5):

$$\therefore L[\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt] = \frac{1}{s} \tan^{-1} \frac{1}{s}$$

وهو المطلوب.

<u>مثال(2):</u> أوجد تحويل لابلاس للتكاملين:

$$(i) \int_0^t e^{-3u} du , \qquad (ii) \int_0^t \sin 2u du$$

<u>الحل:</u> الجزء (i): حيث أن

$$L[e^{-3t}] = \frac{1}{s+3}$$

ومن خاصية تحويل لابلاس للتكاملات:

$$L[\int_0^t F(u) du] = \frac{1}{s} F(s) = \frac{1}{s} L[F(t)]$$

فإن :

$$L[\int_0^t e^{-3u} du] = \frac{1}{s} L[e^{-3t}] = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s+3} = \frac{1}{s(s+3)}$$

الجزء (ii): حيث أن

$$L[\sin 2t] = \frac{2}{s^2+4}$$

ومن خاصية تحويل لابلاس للتكاملات:

$$L[\int_0^t \sin 2u du] = \frac{1}{s} L[\sin 2t] = \frac{1}{s} \frac{2}{s^2+4} = \frac{2}{s(s^2+4)}$$

ملحوظة: يمكن حل مثال(2) بدون استخدام خاصية تحويل لابلاس للتكاملات كالآتي:

(i) نوجد أولاً قيمة التكامل:

$$\int_0^t e^{-3u}\,du = \left.\frac{e^{-3u}}{-3}\right|_0^t = \frac{-1}{3}e^{-3u}\Big|_0^t = \frac{-1}{3}(e^{-3t}-1)$$

وبأخذ تحويل لابلاس:

$$\therefore L[\int_0^t e^{-3u}\,du] = \frac{-1}{3}L[e^{-3t}-1]$$

$$= \frac{-1}{3}[L\{e^{-3t}\}-L\{1\}] = \frac{-1}{3}[\frac{1}{s+3}-\frac{1}{s}] = \frac{-1}{3}\frac{s-(s+3)}{s(s+3)}$$

$$= \frac{1}{s(s+3)}$$

(ii) نوجد أولاً قيمة التكامل:

$$\int_0^t \sin 2u\,du = \left.\frac{-1}{2}\cos 2u\right|_0^t = -\frac{1}{2}(\cos 2t - 1)$$

وبأخذ تحويل لابلاس:

$$\therefore L[\int_0^t \sin 2u\,du = -\frac{1}{2}L[\cos 2t - 1]$$

$$= -\frac{1}{2}[L\{\cos 2t\}-L\{1\}] = -\frac{1}{2}[\frac{s}{s^2+4}-\frac{1}{s}] = -\frac{1}{2}\frac{s^2-(s^2+4)}{s(s^2+4)}$$

$$= -\frac{1}{2}[\frac{-4}{s(s^2+4)}] = \frac{2}{s(s^2+4)}$$

وهو المطلوب.

مثال(3): أوجد تحويل لابلاس العكسي للدالة $\frac{1}{s^2(s^2+1)}$ وذلك باستخدام الخاصية(5) (تحويلات لابلاس للتكامل).

الحل: حيث أن :

$$L^{-1}[\frac{1}{s^2+1}] = \sin t$$

فبتطبيق الخاصية (5) نحصل على:

$$L^{-1}[\frac{1}{s}(\frac{1}{s^2+1}) = \int_0^t \sin u du = 1-\cos t$$

وبتطبيق الخاصية (5) مرة ثانية نحصل على:

$$L^{-1}[\frac{1}{s^2}(\frac{1}{s^2+1})] = \int_0^t (1-\cos u)du = t-\sin t$$

$$\therefore L^{-1}[\frac{1}{s^2}(\frac{1}{s^2+1})] = t-\sin t$$

وهو المطلوب.

مسألة: باستخدام خاصية تحويل لابلاس للتكاملات أوجد تحويل لابلاس العكسي للدالتين:

$$(i)\ \frac{5}{(s-2)^2}\ , \qquad (ii)\ \frac{6s}{s^2-16}$$

الخاصية(6) تحويل لابلاس للدالة الدورية (Periodic Function):

إذا كانت $F(t)$ دالة دورية دورتها T حيث $T>0$ أي إذا كانت

$$F(t+T)=F(t)$$

فإن:

$$L[F(t)] = \frac{1}{1-e^{-st}}\int_0^T e^{-st}F(t)dt$$

<u>البرهان:</u> حيث أن

$$L[F(t)]=\int_0^{\infty} e^{-st}F(t)\,dt$$

$$=\int_0^{T} e^{-st}F(t)\,dt+\int_T^{2T} e^{-st}F(t)\,dt+\int_{2T}^{3T} e^{-st}F(t)\,dt+.....$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st}F(t)\,dt$$

وبأخذ $t=nT+u$ واعتبار أن: $F(nT+u)=F(u)$

$$\therefore L[F(t)]=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{T} e^{-s(nT+u)}F(u)\,du=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-snT}\int_0^{T} e^{-su}F(u)\,du$$

ولكن:

$$\sum_{n=0}^{\infty}e^{-snT}=\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-sT})^{n}=\frac{1}{1-e^{-sT}}$$

$$\therefore L[F(t)]=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^{T} e^{-su}F(u)\,du$$

وبكتابة $u=t$

$$\therefore\ L[F(t)]=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^{T} e^{-sT}F(t)\,dt$$

حيث

$$\frac{1}{1-e^{-sT}}=(1-e^{-sT})^{-1}=1+e^{-sT}+e^{-2sT}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nst}$$

وهو المطلوب.

أمثلة محلولة:

مثال(1): أوجد تحويل لابلاس للدالة الدورية التي دورتها $(2a)$ وصورتها:

$$F(t)=\begin{cases} k & 0<t<a \\ -k & a<t<2a \end{cases}$$

حيث: $F(t+2a)=F(t)$

الحل: بتطبيق الخاصية الدورية نجد أن:

$$L[F(t)]=\frac{1}{1-e^{-2sa}}[\int_0^{2a} e^{-st}F(t)dt]=\frac{1}{1-e^{-2sa}}[\int_0^{a} e^{-st}k\,dt+\int_a^{2a} e^{-st}(-k)dt]$$

$$=\frac{k}{1-e^{-2sa}}\{[\frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^a-[\frac{e^{-st}}{-s}\Big|_a^{2a}\}=\frac{k}{s(1-e^{-2sa})}[1-e^{-sa}+e^{-2sa}-e^{-sa}]$$

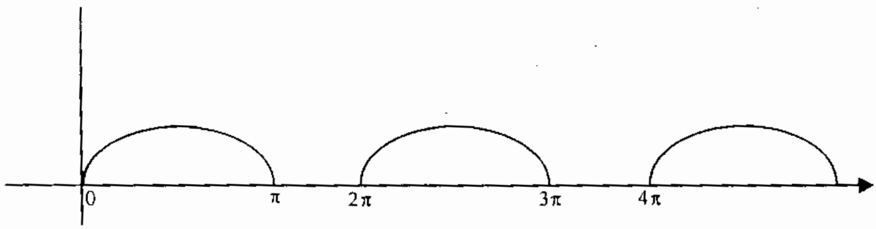
$$=\frac{k}{s(1-e^{-2sa})}[1-2e^{-sa}+e^{-2sa}]=\frac{k}{s(1-e^{-2sa})}(1-e^{-sa})^2$$

$$=\frac{k}{s}[\frac{1-e^{-sa}}{1+e^{-sa}}]=\frac{k}{s}[\frac{e^{\frac{sa}{2}}-e^{\frac{-sa}{2}}}{e^{\frac{sa}{2}}+e^{\frac{-sa}{2}}}]=\frac{k}{s}\tanh(\frac{sa}{2})$$

مثال(2): أوجد تحويل لابلاس للدالة الدورية $F(t)$ التي دورتها (2π) حيث:

$$F(t)=\begin{cases} \sin t & 0<t<\pi \\ 0 & \pi<t<2\pi \end{cases}$$

الحل: تمثل هذه الدالة ما يعرف بدالة الموجة الجيبية المقومة



ومن خاصية تحويل لابلاس للدوال الدورية:

$$L[F(t)] = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}[\int_0^{2\pi} e^{-st} F(t)dt$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}[\int_0^{\pi} e^{-st} \sin t\, dt + \int_{\pi}^{2\pi} e^{-st}(0)dt]$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}[\int_0^{\pi} e^{-st} \sin t\, dt]$$

وباستخدام العلاقة:

$$\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2}[\alpha \sin \beta x - \beta \cos \beta x]$$

حيث $\alpha = -s,\ \beta = 1,\ x = t$

$$\therefore\ L[F(t)] = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}[\frac{e^{-st}}{s^2+1}\{-s\sin t - \cos t\}]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}[\frac{e^{-st}(1)}{s^2+1} - \frac{e^0(-1)}{s^2+1}] = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}[\frac{e^{-\pi s}+1}{s^2+1}]$$

$$= \frac{1}{(1-e^{-\pi s})(1+e^{-\pi s})}[\frac{1+e^{-\pi s}}{1+s^2}] = \frac{1}{1-e^{-\pi s}}(\frac{1}{1+s^2})$$

وهو المطلوب.

<u>**مسألة:**</u> أوجد تحويل لابلاس للدالة الدورية $F(t)$ ذات الدورة 2π والتي صورتها:

$$F(t) = \begin{cases} \cos t\ , & 0 < t < \pi \\ 0\ , & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

<u>خاصية(7):</u> <u>خاصية الالتفاف أو الطي</u> <u>Convolution</u>

إذا كان F, G دالتان متصلتان فيعرف التفافهما $F * G$ كالآتي :

$$F(t) * G(t) = \int_0^t F(u)G(t-u)\,du$$

ويلاحظ أن $(F*g)$ يحقق الخواص الآتية:

1- خاصية الإبدال (أو التبادل):

$$F*G=G*F$$

<u>البرهان</u>: حيث أن

$$F*G=\int_0^t F(u)G(t-u)du$$

فبوضع: $t-u=v \to u=t-v$

$$\therefore F*G=\int_0^t F(u)G(t-u)du=\int_0^t F(t-v)G(v)dv$$

$$=\int_0^t G(v)F(t-v)dv=G*F$$

2- وبالمثل يمكن إثبات الخواص الآتية :

(i) الخاصية الخطية:

$$(\alpha F_1+\beta F_2)*G=\alpha(F_1*G)+\beta(F_2*G)$$

(ii) خاصية التوزيع:

$$F*(G_1+G_2)=F*G_1+F*G_2$$

(iii) خاصية التجميع:

$$F*(G*H)=(F*G)*H$$

(iv) $F*0=0*F=0 \quad , \ 1*F\neq F$

فمثلاً: إذا كانت $F(t)=t$ فإن:

$$(1*F)=\int_0^t 1.(t-u)du=\left[tu-\frac{u^2}{2}\right]_0^t=\frac{t^2}{2}\neq F$$

نظرية الالتفاف(أو الطي): إذا كان

$$L^{-1}[F(s)]=F(t) \quad , \quad L^{-1}[G(s)]=G(t)$$

فإن:

$$L^{-1}[F(s)G(s)]=\int_0^t F(u)G(t-u)du = F(t)*G(t)$$

حيث $F(t)*g(t)$ هي التفاف الدالتين F,G وتخضع للقوانين السابقة.

مثال: باستخدام نظرية الالتفاف أوجد:

$$i- L^{-1}[\frac{1}{(s-1)(s-2)}]$$

$$ii- L^{-1}[\frac{1}{(s^2+\alpha^2)^2}]$$

$$iii- L^{-1}[\frac{1}{s^2(s+1)^2}]$$

$$iv- L^{-1}[\frac{1}{s^2(s-a)}]$$

$$v- L^{-1}[\frac{s}{(s^2+a^2)^2}]$$

أولاً: حيث أن

$$L^{-1}[\frac{1}{s-1}]=e^t \quad , \quad L^{-1}[\frac{1}{s-2}]=e^{2t}$$

فباستخدام نظرية الالتفاف نجد أن :

$$L^{-1}[\frac{1}{(s-1)(s-2)}]=\int_0^t e^u e^{2(t-u)}du=\int_0^t e^{2t}[e^{-u}]du$$

$$=e^{2t}\int_0^t e^{-u}du=e^{2t}[\frac{e^{-u}}{-1}]_0^t$$

$$=-e^{2t}[e^{-t}-e^0]=-e^t+e^{2t}=e^{2t}-e^t$$

وهو المطلوب.

ثانياً: بفرض أن

$$F(s)=\frac{1}{s^2+a^2}\,, \qquad G(s)=\frac{1}{s^2+a^2}$$

وحيث أن

$$F(t)=\frac{\sin at}{a}\,, \qquad G(t)=\frac{\sin at}{a}$$

وباستخدام نظرية الالتفاف نجد أن:

$$L^{-1}[\frac{1}{(s^2+a^2)^2}]=\frac{1}{a^2}\int_0^t \sin au \sin a(t-u)\,du$$

وحيث أن:

$$\sin x \sin y=\frac{1}{2}[\cos(x-y)\ \ -\cos(x+y)]$$

$$\therefore\ L^{-1}[\frac{1}{(s^2+a^2)^2}]=\frac{1}{2a^2}\int_0^t [\cos a(2u-t)-\cos at)]\,du$$

$$=\frac{1}{2a^2}[\frac{\sin a(2u-t)}{2a}-(\cos at)u]_0^t$$

$$=\frac{1}{2a^2}[\frac{1}{2a}\{\sin at-\sin a(-t)\}-t\ \cos at]$$

$$=\frac{1}{2a^2}[\frac{1}{2a}\{2\ \sin at\}-t\cos at]$$

$$=\frac{1}{2a^3}[\sin at-at\ \cos at\ ]$$

<u>ثالثاً:</u> حيث أن:

$$L^{-1}[\frac{1}{s^2}]=t \quad , \qquad L^{-1}[\frac{1}{(s+1)^2}]=te^{-t}$$

فبتطبيق نظرية الالتفاف:

$$L^{-1}[\frac{1}{s^2(s+1)^2}]=\int_0^t (ue^{-u}).(t-u)\,du=\int_0^t (ut-u^2)e^{-u}\,du$$

$$=\int_0^t -(ut-u^2)\,d(e^{-u})$$

وبإجراء التكامل بالتجزئ نحصل على :

$$L^{-1}[\frac{1}{s^2(s+1)^2}]=[-(ut-u^2)e^{-u}]_0^t+\int_0^t(t-2u)e^{-u}du$$

$$=[0]+\int_0^t(t-2u)e^{-u}du=\int_0^t[-(t-2u)d(e^{-u})]$$

$$=[-(t-2u)e^{-u}]_0^t-2\int_0^t e^{-u}du=te^{-t}+t-2[e^{-u}]_0^t$$

$$=te^{-t}+t+2e^{-t}-2=(t+2)e^{-t}+(t-2)$$

وهو المطلوب.

<u>رابعاً:</u> بفرض أن :

$$F(s)=\frac{1}{s^2}\quad,\qquad G(s)=\frac{1}{s-a}$$

وحيث أن :

$$F(t)=t\quad,\qquad G(t)=e^{at}$$

وبتطبيق نظرية الالتفاف :

$$\therefore L^{-1}[\frac{1}{s^2(s-a)}]=\int_0^t u.e^{a(t-u)}du\quad=e^{at}\int_0^t ue^{-au}du$$

وبإجراء التكامل بالتجزيء:

$$L^{-1}[\frac{1}{s^2(s-a)}]=e^{at}[u\frac{e^{-au}}{-a}\Big|_0^t-\int_0^t\frac{e^{-au}}{-a}du]$$

$$=e^{at}\{\frac{-t}{a}e^{-at}+\frac{1}{a}[\frac{e^{-au}}{-a}]_0^t\}=e^{at}\{\frac{-t}{a}e^{-at}+\frac{1}{a}[\frac{e^{-at}}{-a}+\frac{1}{a}]\}$$

$$=\frac{e^{at}}{a^2}[-ate^{-at}-e^{-at}+1]=\frac{1}{a^2}[-at-1+e^{at}]=\frac{1}{a^2}[e^{at}-at-1]$$

وهو المطلوب.

<u>خامساً:</u> نفرض أن :

$$\frac{s}{(s^2+a^2)^2}=\frac{s}{(s^2+a^2)}.\frac{1}{(s^2+a^2)}$$

وحيث أن:

$$L^{-1}[\frac{s}{s^2+a^2}]=\cos at\ ,\qquad L^{-1}[\frac{1}{s^2+a^2}]=\frac{\sin at}{a}$$

وباستخدام نظرية الالتفاف:

$$\therefore L^{-1}[\frac{s}{(s^2+a^2)}]=\int_0^t \cos au.\frac{\sin a(t-u)}{a}du$$

وباستخدام العلاقة:

$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$$

$$\therefore L^{-1}[\frac{s}{(s^2+a^2)}]=\frac{1}{a}\int_0^t \cos au[\sin at\cos au-\cos at\sin au]du$$

$$=\frac{1}{a}\sin at\int_0^t \cos^2 au\,du-\frac{1}{a}\cos at\int_0^t \sin au\cos au\,du$$

$$=\frac{1}{a}\sin at\int_0^t \frac{1}{2}(1+\cos 2au)du-\frac{1}{a}\cos at\int_0^t \frac{1}{2}\sin 2au\,du$$

$$=\frac{1}{a}\sin at[\frac{t}{2}+\frac{\sin 2at}{4a}]-\frac{1}{a}\cos at[\frac{1-\cos 2at}{4a}]$$

$$=\frac{1}{a}\sin at[\frac{t}{2}+\frac{\sin at\cos at}{2a}]-\frac{1}{a}\cos at[\frac{\sin 2at}{2a}]=\frac{t\sin at}{2a}$$

وهو المطلوب.

<u>ملحوظة:</u> بعض المسائل التي تم حلها هنا باستخدام نظرية الالتفاف يمكن حلها بالطرق العادية فمثلاً:

[1] <u>$L^{-1}[\frac{s}{(s^2+a^2)^2}]$</u> : حيث أن :

$$\frac{d}{ds}[\frac{1}{(s^2+a^2)}]=\frac{-2s}{(s^2+a^2)^2}$$

$$\therefore \frac{s}{(s^2+a^2)^2} = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}[\frac{1}{(s^2+a^2)}]$$

وحيث أن :

$$L^{-1}[\frac{1}{s^2+a^2}] = \frac{\sin at}{a}$$

$$L^{-1}[\frac{1}{(s^2+a^2)^2}] = \frac{-1}{2}L^{-1}[\frac{d}{ds}(\frac{1}{s^2+a^2}) = \frac{1}{2}t[\frac{\sin at}{a}] = \frac{t\sin at}{2}$$

وذلك باستخدام خاصية الاشتقاق:

$$[L[tF(t)] = -\frac{d}{ds}F(s) \qquad \therefore -L^{-1}[\frac{d}{ds}F(s)] = tF(t)$$

[2] $L^{-1}[\frac{1}{s^2(s-a)}]$: حيث أنه (باستخدام الكسور الجزئية):

$$\frac{1}{s^2(s-a)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-a} = \frac{-1}{a^2}[\frac{1}{s} + \frac{a}{s^2} + \frac{1}{s-a}]$$

فبأخذ تحويل لابلاس العكسي لتلك العلاقة:

$$L^{-1}[\frac{1}{s^2(s-a)}] = -\frac{1}{a^2}L^{-1}[\frac{1}{s} + \frac{a}{s^2} + \frac{1}{s-a}]$$

$$= -\frac{1}{a^2}[L^{-1}[\frac{1}{s}] + aL^{-1}[\frac{1}{s^2}] - \frac{1}{a^2}L^{-1}[\frac{1}{s-a}]]$$

$$= -\frac{1}{a^2}[1 + at - e^{at}] = \frac{1}{a^2}[e^{at} - at - 1]$$

<u>مسألة:</u> باستخدام نظرية الالتفاف أوجد:

$$i)\ L^{-1}[\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}] \quad , \qquad ii)\ L^{-1}[\frac{1}{s^2(s^2+a^2)}]$$

استخدام تحويلات لابلاس في إيجاد بعض التكاملات

مثال(1): أوجد التكامل الآتي :

$$\int_0^\infty t^2 e^{-t} \sin t \, dt$$

الحل: حيث أن :

$$L[\sin t] = \frac{1}{s^2+1}$$

من خاصية الاشتقاق :

$$\therefore L[t^2 \sin t] = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} L[\sin t]$$

$$= \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{d}{ds}\left[\frac{-2s}{(s^2+1)^2}\right]$$

$$= \frac{-2(s^2+1)+8s^2}{(s^2+1)^3} = \frac{2(3s^2-1)}{(s^2+1)^3}$$

$$\therefore \int_0^\infty t^2 e^{-st} \sin t \, dt = L[t^2 \sin t] = \frac{2(3s^2-1)}{(1+s^2)^3}$$

وبوضع $s=1$ نحصل على :

$$\therefore \int_0^\infty t^2 e^{-st} \sin t \, dt = \frac{2(3-1)}{(1+1)^3} = \frac{4}{2^3} = \frac{1}{2}$$

مثال(2): إذا كان : $L^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$ فاثبت أن: $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

الحل: بأخذ $F(t) = \int_0^\infty e^{-tx^2} dx$ فإن :

$$\therefore L[F(t)] = \int_0^\infty e^{-st} dt \int_0^\infty e^{-tx^2} dx = \int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-st} e^{-tx^2} dt$$

$$= \int_0^\infty L[e^{-tx^2}] dx = \int_0^\infty \frac{1}{s+x^2} dx$$

$$\tan^{-1}\infty = 0$$

$$\tan^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{s}} \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{s}}\right]_0^\infty = [0 - \frac{1}{\sqrt{s}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{s}}$$

وبأخذ التحويل العكسي :

$$\therefore F(t)=\frac{\pi}{2}L^{-1}[\frac{1}{\sqrt{s}}]=\frac{\pi}{2}[\frac{1}{\sqrt{\pi t}}]=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}$$

$$\therefore \int_0^\infty e^{-tx^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}$$

وبوضع $t=1$:

$$\therefore \int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

وهو المطلوب.

مثال(3): إذا كان $L^{-1}(\frac{1}{\sqrt{s}})=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$ وكان $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\vartheta}{\sqrt{\tan\vartheta}}=\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{4}}$

فاثبت أن: $\int_0^\infty \cos^2 x\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

الحل: بأخذ $F(t)=\int_0^\infty \cos tx^2\,dx$ فإن :

$$L[F(t)]=\int_0^\infty e^{-st}dt\int_0^\infty \cos tx^2\,dx=\int_0^\infty dx\int_0^\infty e^{-st}\cos tx^2\,dt$$

$$=\int_0^\infty L[\cos tx^2]dx=\int_0^\infty \frac{s}{s^2+x^4}dx$$

ولإيجاد هذا التكامل: نستخدم التعويض الآتي:

$$x^2=s\tan\theta\rightarrow x=\sqrt{s}\sqrt{\tan\theta}$$

$$s^2+x^4=s^2+s^2\tan^2\theta=s^2(1+\tan^2\theta)=s^2\cot^2\theta$$

$$dx=\frac{1}{2}\sqrt{s}\tan\theta(\sec^2\theta\,d\theta)$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{s}{s^2+x^4}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{s}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\frac{1}{2}}\theta}{\sin^{\frac{1}{2}}\theta}\,d\theta = \frac{1}{2\sqrt{s}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\tan\theta}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{s}}\,\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{s}}\,\frac{\sqrt{2}\,\pi}{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{s}}$$

وبأخذ تحويل لابلاس العكسي :

$$F(t) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} L^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{\pi t}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2t}} = \int_0^\infty \cos t x^2\,dx$$

وبأخذ $t=1$ نحصل على:

$$\int_0^\infty \cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

وهو المطلوب.