الباب الأول

أنواع خاصة من التكاملات

1- التكاملات المعتلة

2- التكاملات المعتمدة على بارامتر

3- تكاملات أويلر

4- تكاملات الدوال الاتجاهية

الباب الأول

أنواع خاصة من التكاملات
Special Types of Integrals

فى هذا الباب سوف ندرس أنواعا خاصة من التكاملات التى تظهر فى كثير من المسائل العلمية والهندسية، ومن تلك التكاملات نذكر:

(1) التكاملات المعتلة.

(2) التكاملات التى تعتمد على بارامتر (تكاملات ليبنتز).

(3) تكاملات أويلر أو ما يعرف بدوال جاما وبيتا.

(4) تكامل الدوال الاتجاهية ونظريات التكامل الاتجاهية.

أولا : التكاملات المعتلة Improper Integrals

تعريف: يقال للتكامل المحدود $\int_a^b f(x)dx$ أنه تكامل معتل (أو شاذ) فى الفترة $[a,b]$ فى الحالتين:

(1) إذا كانت حدود التكامل لا نهائية.

(2) إذا كانت التكاملات لدوال غير متصلة عند نقطة او أكثر من نقاط الفترة، وفى كلتا الحالتين يتم حساب التكامل كنهاية (limit).

الحالة الأولى: التكاملات التى حدودها لا نهائية:

لدينا النظريات الآتية:

(1) إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[a, \infty)$ وكانت $t > a$ فإن:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx \qquad (1)$$

بشرط أن تكون النهاية موجودة:

(2) إذا كانت f دالة متصلة على الفترة [a ,∞-) فإن:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{a} f(x)dx \qquad (2)$$

العلاقتان (1) ، (2) تعرفان التكاملات المعتلة إذا كان أحد حدى التكامل لا نهائيا، ويسمى التكامل المعتل تقاربيا إذا كانت النهاية موجودة وتعطى قيمة التكامل، أما إذا لم تكن النهاية موجودة فيسمى التكامل المعتل تباعديا.

(3) يكون التكامل معتلا أيضا إذا كان حديه لا نهائيان، فإذا كانت f دالة متصلة لكل قيم x ى الفترة (∞ ,∞-) وكانت a عددا حقيقيا فإن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx \qquad (3)$$

بشرط أن كلا التكاملين المعتلين فى الطرف الأيمن يكون تقاربا، وإذا كان أحد هذين التكاملين تباعديا (أو متباعدا) فإن: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ يكون متباعدا.

<u>أمثلة محلولة:</u>

<u>مثال (1):</u> هل التكامل الآتى متقاربا أم متباعدا وإذا كان متقاربا فأوجد قيمته:

$$I = \int_{2}^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^2}$$

<u>الحل:</u>

$$I = \int_{2}^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{t\to\infty} \int_{2}^{t} \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{-1}{x-1}\right]_2^t = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{-1}{t-1} + \frac{1}{2-1}\right] = \frac{-1}{\infty} + \frac{1}{1} = 0 + 1 = 1$$

∴ التكامل متقارب وقيمته تساوى 1.

<u>مثال (2):</u> هل التكامل الآتى متقاربا أم متباعدا:

$$I = \int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x-1}$$

<u>الحل:</u>

$$I = \int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x-1} = \lim_{t\to\infty} \int_{2}^{t} \frac{dx}{x-1}$$
$$= \lim_{t\to\infty} [\ln(x-1)]_2^t = \lim_{t\to\infty} [\ln(t-1) - \ln(2-1)]$$
$$= \lim_{t\to\infty} [\ln(t-1)] - \ln(1) = [\ln\infty] - 0 = \infty$$

$\therefore$ التكامل متباعد.

<u>مثال (3):</u> اوجد قيمة التكامل المعتل:

$$I = \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2}$$

<u>الحل:</u>

$$I = \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{t\to\infty} \int_{1}^{t} \frac{dx}{x^2} = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{-1}{x}\right]_1^t$$
$$= \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{t} - (-1)\right] = \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{t}\right] + 1$$
$$= -\frac{1}{\infty} + 1 = -0 + 1 = 1$$

<u>مثال (4):</u> هل التكامل الآتى متقاربا أم متباعد، وإذا كان متقاربا فأوجد قيمته.

$$I = \int_{-\infty}^{1} e^x dx$$

الحل:

$$I=\int_{-\infty}^{1} e^{x}dx=\lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{1} e^{x}dx$$
$$=\lim_{t\to-\infty}\left[e^{x}\right]_{t}^{1}=\lim_{t\to-\infty}\left[e-e^{t}\right]$$
$$=e-e^{-\infty}=e-0=e$$

$\therefore$ التكامل متقارب وقيمته $= e$

مثال (5): هل التكامل الآتى متقاربا أم متباعد وإذا كان متقاربا فأوجد قيمته:

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$$

الحل:

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=I_1+I_2$$

$$I_1=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{t\to-\infty}\left[\tan^{-1}x\right]_{t}^{0}$$
$$=\lim_{t\to-\infty}\left[\tan^{-1}0-\tan^{-1}t\right]$$
$$=0-\left[\tan^{-1}(-\infty)\right]=0-\left[-\frac{\pi}{2}\right]=\frac{\pi}{2}$$

$$I_2=\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{t\to\infty}\int_{0}^{t}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{t\to\infty}\left[\tan^{-1}x\right]_{0}^{t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left[\tan^{-1}t-\tan^{-1}0\right]=\tan^{-1}(\infty)-0=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\ I=I_1+I_2=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$

$\therefore$ التكامل المعطى يكون تقاربيا وقيمته $= \pi$

مثال (6): أثبت أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \frac{\pi}{2}$$

الحل: الدالة المطلوب تكاملها $\left[\frac{e^x}{1+e^{2x}}\right]$ متصلة على الفترة $(-\infty, \infty)$ والتكامل معتل فنكتبه بالصورة الآتية:

$$I = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} + \int_{0}^{\infty} \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} + \lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \left[\tan^{-1} e^x\right]_t^0 + \lim_{t\to\infty} \left[\tan^{-1} e^x\right]_0^t$$

وذلك لأن:

$$\int_{0}^{t} \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \int_{0}^{t} \frac{e^x dx}{1+(e^x)^2} = \tan^{-1} e^x \Big|_0^t$$

$$\therefore\ I = \lim_{t\to-\infty} \left[\tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(e^t)\right] + \lim_{t\to\infty} \left[\tan^{-1}(e^t) - \tan^{-1}(1)\right]$$

$$= \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(e^{-\infty}) + \tan^{-1}(e^{\infty}) - \tan^{-1}(1)$$

$$= \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0) + \tan^{-1}(\infty) - \tan^{-1}(1)$$

$$= \frac{\pi}{4} - 0 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

[حيث:

$[e^0 = 1, e^{\infty} = \infty, e^{-\infty} = 0, \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}, \tan^{-1}(0) = 0, \tan^{-1}(\infty) = \frac{\pi}{2}$

وهو المطلوب.

الحالة الثانية : <u>التكاملات المعتلة لدوال غير متصلة عند إحدى نقاط الفترة:</u>

ويكون لدينا النظريات الآتية:

(1) إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[a, b)$ وغير متصلة (أى تأخذ قيمة لا نهائية) عند نقطة b (نقطة النهاية العليا) فإن:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b}\int_a^t f(x)dx \qquad (1)$$

(2) إذا كانت f دالة متصلة على الفترة (a, b) وغير متصلة عند نقطة a (نقطة النهاية السفلى) فإن:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a}\int_t^b f(x)dx \qquad (2)$$

التكاملان (2) ,(1) يعرفان التكاملات المعتلة فى هذه الحالة وتكون تلك التكاملات متقاربة إذا وجدت النهاية والتى تحدد قيمة التكامل، وإذا لم تكن النهاية موجودة فإن التكامل المعتل يكون متباعدا.

(3) إذا كانت f دالة غير متصلة عند قيمة ما c فى الفترة المفتوحة (a, b) حيث $a < c < b$، ولكنها متصلة عند أى قيمة فى الفترة $[a, b]$ فإن:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

بشرط أن يكون التكاملين فى الطرف الأيمن متقاربان، ويتضح كل ذلك من الأمثلة الآتية:

<u>مثال (1):</u> هل التكامل الآتى متقارب أم متباعد وإذا كان متقاربا فأوجد قيمته:

$$I = \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$$

الحل: التكامل المعطى غير متصل عند $x = 3$ [يقترب من ∞ عندما تقترب x من 3 من اليسار] فنطبق التعريفات السابقة:

$$I = \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{3-x}} = \lim_{t \to 3^-} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$$

$$= \lim_{t \to 3^-} \left[-2\sqrt{3-x}\right]_0^t = \lim_{t \to 3^-} \left[-2\sqrt{3-t} + 2\sqrt{3}\right]$$

$$= 0 + 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$\therefore$ التكامل متقارب وقيمته $2\sqrt{3}$.

مثال (2): هل التكامل الآتى متباعد أم متقارب:

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{1-x}$$

الحل: هذا التكامل معتل حيث أنه يقترب من ∞ عندما تقترب x من الواحد من اليمين فيكون الحال كالاتى:

$$\int_1^2 \frac{dx}{1-x} = \lim_{t \to 1^+} \int_t^2 \frac{dx}{1-x}$$

$$= \lim_{t \to 1^+} [\ln|1-x|]_t^2$$

$$= \lim_{t \to 1^+} [\ln|-1| - \ln|1-t|]$$

$$= \lim_{t \to 1^+} [\ln(1) - \ln(0)] = [0 - (-\infty)] = \infty$$

$\therefore$ التكامل متباعد.

<u>مثال (3):</u> هل التكامل المعتل $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ متقارب أم متباعد.

<u>الحل:</u> التكامل غير معرف عند $x = 0$ فهو تكامل معتل ونطبق عليه قواعد التكاملات المعتلة المذكورة سابقا:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t\to 0^+} [\ln x]_t^1$$
$$= \lim_{t\to 0^+} [\ln 1 - \ln t] = 0 - \ln(\infty)$$
$$= 0 - \infty = -\infty$$

$\therefore$ التكامل متباعد لأن النهاية غير موجودة.

<u>مثال (4):</u> هل التكامل المعتل الآتى $\int_0^4 \frac{dx}{(x-3)^2}$ متقارب أم متباعد:

<u>الحل:</u> التكامل غير معرف عند $x = 3$ وحيث أن هذا الرقم يقع فى الفترة $(0, 4)$ فنطبق التعريف المناسب بأخذ $c = 3$.

$$\therefore \int_0^4 \frac{dx}{(x-3)^2} = \int_0^3 \frac{dx}{(x-3)^2} + \int_3^4 \frac{dx}{(x-3)^2} = I_1 + I_2$$

ولكى يكون التكامل المعطى متقاربا يجب أن يكون التكاملين فى الطرف الأيمن متقاربين، فبتطبيق قواعد إيجاد هذه التكاملات نجد أن:

$$I_1 = \int_0^3 \frac{dx}{(x-3)^2} = \lim_{t\to 3^-} \int_0^t \frac{dx}{(x-3)^2}$$
$$= \lim_{t\to 3^-} \left[\frac{-1}{x-3}\right]_0^3 = \lim_{t\to 3^-} \left[\frac{-1}{t-3} - \frac{1}{3}\right] = \infty - \frac{1}{3} = \infty$$

$\therefore$ التكامل I_1 متباعد، وبذلك فإن التكامل المعطى I يكون أيضا متباعدا (حتى ولو لم نحسب I_2).

مثال (5): أحسب التكامل $I = \int_{-2}^{7} \frac{dx}{(x+1)^{2/3}}$

الحـــل: التكامل المعطى غير معرف x = -1 والتى تقع فى الفترة (-2, 7) فبتطبيق قواعد حساب التكاملات من هذا النوع وبأخذ C = -1 فإن:

$$I = \int_{-2}^{7} \frac{dx}{(x+1)^{2/3}} = \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x+1)^{2/3}} + \int_{-1}^{7} \frac{dx}{(x+1)^{2/3}} = I_1 + I_2$$

ولحساب I_1, I_2: يأخذ b = -1:

$$\therefore\ I_1 = \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x+1)^{2/3}} = \lim_{t \to (-1)^-} \int_{-2}^{t} \frac{dx}{(x+1)^{2/3}}$$

$$= \lim_{t \to (-1)^-} [3(x+1)^{1/3}]_{-2}^{t} = \lim_{t \to (-1)^-} [3(t+1)^{1/3} - 3\,(-1)^{1/3}]$$

$$= 0 + 3 = 3$$

وبأخذ a = -1:

$$I_2 = \int_{-2}^{7} \frac{dx}{(x+1)^{2/3}}$$

$$= \lim_{t \to (-1)^+} \int_{t}^{7} \frac{dx}{(x+1)^{2/3}} = \lim_{t \to (-1)^+} [3(x+1)^{1/3}]_{t}^{7}$$

$$= \lim_{t \to (-1)^+} [3(8)^{1/3} - 3(t+1)^{1/3}] = 6 - 0 = 6$$

وهكذا وجدنا أن المتكاملين I_1, I_2 كلاهمـــا متقـــارب فيكـــون التكامـــل المعطـــى (مجموعهما) متقاربا وقيمت = 6 + 3 = 9 وهو المطلوب.

مسائل

(1) هل التكاملات الآتية متقاربة أم متباعدة وإذا كانت متقاربة فأوجد قيمتها [الإجابة بين القوسين].

(i) $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^{3/4}}$ [متباعد]

(ii) $\int_{0}^{\infty} e^{-2x} dx$ [متقارب وقيمته = ½]

(iii) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^3}$ [متقارب وقيمته = −½]

(iv) $\int_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ [متباعد]

(v) $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx$ [متقارب وقيمته = صفر]

(vi) $\int_{-\infty}^{\infty} \sec h\, x\, dx$ [متقارب وقيمته = π]

(2) هل التكاملات الآتية متقاربة أم متباعدة وإذا كانت متقاربة فأوجد قيمتها [الإجابة بين القوسين].

(i) $\int_{-3}^{1} \frac{dx}{x^2}$ [متباعد]

(ii) $\int_{0}^{1} x \ln x \, dx$ [متقارب وقيمته $= -\frac{1}{4}$]

(iii) $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ [متقارب وقيمته = 6]

(iv) $\int_0^4 \frac{dx}{(4-x)^{2/3}}$ [متقارب وقيمته = $3\sqrt[3]{4}$]

(v) $\int_{-2}^2 \frac{dx}{(x+1)^3}$ [متباعد]

(vi) $\int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$ [متقارب وقيمته = $\frac{\pi}{2}$]

ثانيا : التكاملات التى تعتمد على بارامتر (تكاملات ليبنتز)

تعريف: نفرض أن لدينا التكامل المحدود التالى والذى يعتمد على البارامتر α.

$$I(\alpha)=\int_a^b F(x,\alpha)dx \qquad (1)$$

وسندرس الحالتين الآتيتين:

الحالة الأولى : حدود التكامل لا تعتمد على البارامتر α

فى هذه الحالة نطبق ما يعرف بعلاقة ليبنتز الأولى وصورتها:

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=\int_a^b \frac{\partial F(x,\alpha)}{\partial \alpha}dx \qquad (2)$$

[ويعرف ذلك أيضا بعملية التفاضل تحت أو داخل علامة التكامل]

تستخدم هذه العلاقة فى حساب العديد من التكاملات الصعبة كما سنرى بعد.

أمثلة محلولة

مثال (1):

باستخدام علاقة ليبنتز الأولى، أثبت أن:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}(\sin \alpha x)dx = \tan^{-1}\alpha$$

حيث α بارامتر

الحل:

نرمز للتكامل بالرمز $I(\alpha)$

$$\therefore\ I(\alpha)=\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}\sin \alpha x\, dx = \int_0^\infty F(x,\alpha)dx$$

بتطبيق علاقة ليبنتز الأولى وإيجاد التفاضل الجزئى للدالة F داخل علامة التكامل.

$$\therefore\ \frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \int_0^\infty \frac{\partial F(x,\alpha)}{\partial \alpha}dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \alpha}[\frac{e^{-x}}{x}\sin \alpha x]dx$$

$$= \int_0^\infty [\frac{e^{-x}}{x}\ x \cos \alpha x]dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-x}\cos \alpha x\, dx \qquad (1)$$

وهذا التكامل يمكن إيجاده بسهولة بطريقة التجزئ ونتيجته هى:

$$\int_0^\infty e^{-x}\cos \alpha x\, dx = \frac{1}{1+\alpha^2} \qquad (2)$$

من (2) ,(1) نجد أن:

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=\frac{1}{1+\alpha^2}$$

بفصل المتغيرات والتكامل لإيجاد $I(\alpha)$ نحصل على:

$$\int dI(\alpha)=\int\frac{1}{1+\alpha^2} \qquad \Bigg| \qquad \int\frac{dx}{1+x^2}=\tan^{-1}x$$

$$I(\alpha)=\tan^{-1}\alpha+C$$

<u>لإيجاد C:</u> نضع $\alpha=0$

$$\therefore\ I(0)=\tan^{-1}0+C$$

ولكن:

$$I(0)=\int_0^\infty\frac{e^{-x}}{x}\text{Sin }0\,dx=0$$

$$\tan^{-1}0= \quad \to 0=0+C\to C=0$$

$$\therefore\ I(\alpha)=\tan^{-1}\alpha\to\boxed{\int_0^\infty\frac{e^{-x}}{x}\text{Sin }\alpha\,x\,dx=\tan^{-1}\alpha}$$

<u>مثال (2):</u>

باستخدام علاقة ليبنتز الأولى للتفاضل الجزئى تحت علامة التكامل، أوجد قيمة التكامل الاتى:

$$\int_0^\infty\frac{e^{-x}}{x}(1-e^{-\alpha x})\,dx$$

ومن ثم أثبت أن:

$$\int_0^\infty\frac{e^{-x}}{x}(1-e^{-x})\,dx=\ln 2$$

الحل:

نفرض أن:
$$I(\alpha)=\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}(1-e^{-\alpha x})\,dx=\int_0^\infty F(x,\alpha)\,dx$$

بتطبيق قاعدة ليبنتز الأولى:
$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=\int_0^\infty \frac{\partial F(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx=\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{e^{-x}}{x}(1-e^{-\alpha x})\right]dx$$
$$=\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}(-e^{-\alpha x})(-x)\,dx=\int_0^\infty e^{-x}.e^{-\alpha x}dx=\int_0^\infty e^{-(1+\alpha)x}dx$$
$$=-\frac{1}{1+\alpha}e^{-(1+\alpha)x}\Big|_0^\infty=-\frac{1}{1+\alpha}(e^{-\infty}-e^{0})=-\frac{1}{1+\alpha}(0-1)=\frac{1}{1+\alpha}$$

وبإجراء التكامل نحصل على:
$$\int dI(\alpha)=\int\frac{d\alpha}{1+\alpha}\qquad\Bigg|\qquad \int\frac{dx}{1+x}=\ln(1+x)$$
$$\therefore\ I(\alpha)=\ln(1+\alpha)+C$$

ولإيجاد C:

بوضع $\alpha=0$ نحصل على:
$$\therefore\ I(0)=\ln 1+C$$
ولكن
$$I(0)=\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}(1-e^{0})\,dx=0$$
أيضا :
$$\ln 1=0$$
$$\therefore\ 0=0+C\qquad\rightarrow\qquad C=0$$
$$\therefore\ I(\alpha)=\ln(1+\alpha)\rightarrow=\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}(1-e^{-\alpha x})dx=\ln(1+\alpha)$$

وبوضع $\alpha = 1$ نحصل على:

$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{x}(1-e^{-x})dx = \ln 2}$$ وهو المطلوب

مثال (3):

باستخدام علاقة ليبنتز الأولى، أثبت أن:

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} dx = \ln 2$$

الحل:

لكى نطبق علاقة ليبنتز يجب إدخال البارامتر α وذلك كالآتى:

نفرض أن:

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^{\alpha}-1}{\ln x} dx \qquad (1)$$

وبتطبيق علاقة ليبنتز الأولى نجد أن:

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{x^{\alpha}-1}{\ln x}\right] dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\ln x}(x^{\alpha}.\ln x)dx = \int_0^1 x^{\alpha} dx$$

$$= \left.\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}$$

$$\frac{d}{d\alpha}(x^{\alpha}) = x^{\alpha}.\ln x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(a^{x}) = a^{x}.\ln a$$

وبإجراء التكامل نحصل على:

$$\int dI(\alpha) = \int \frac{d\alpha}{1+\alpha}$$

$$\therefore I(\alpha) = \ln(1+\alpha) + C$$

ولايجاد C:

نضع $\alpha = 0 \quad \leftarrow \quad I(0) = 0$

وأيضا $\ln(1) = 0 \rightarrow \boxed{C = 0} \quad \therefore$

$$\therefore \; I(\alpha) = \ln(1+\alpha)$$

$$\therefore \; \int_0^1 \frac{x^{\alpha} 1}{\ln x} dx = \ln(1+\alpha)$$

وبوضع $\alpha = 1$ نحصل على:

$$\therefore \; \int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} dx = \ln 2$$

وهو المطلوب.

مثال (4):

إذا علم أن: $\displaystyle \int_0^{\pi} \frac{dx}{\alpha - \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$

حيث: $\alpha > 1$

فباستخدام علاقة ليبنتز الأولى للتفاضل الجزئى تحت علامة التكامل.

أثبت أن: $\displaystyle \int_0^{\pi} \frac{dx}{(2 - \cos x)^2} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

الحل:

نفرض أن: $\displaystyle I(\alpha) = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\alpha - \cos x} = \pi(\alpha - 1)^{-1/2}$

بتطبيق علاقة ليبنتز الأولى:

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=\int_0^\pi \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{1}{\alpha-\cos x}\right]dx=\int_0^\pi \frac{\partial}{\partial\alpha}(\alpha-\cos x)^{-1}dx$$

$$=\frac{\partial}{\partial\alpha}=\left[\pi(\alpha^2-1)^{-½}\right]$$

$$\therefore \int_0^\pi (-1)(\alpha-\cos x)^{-2}dx=\pi.(-\frac{1}{2})(\alpha^2-1)^{-\frac{3}{2}}(2\alpha)$$

$$\therefore \int_0^\pi (\alpha-\cos x)^{-2}dx=\pi\alpha(\alpha^2-1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\therefore \int_0^\pi \frac{dx}{(\alpha-\cos x)^2}=\frac{2\alpha}{(\alpha^2-1)^{3/2}} \qquad (1)$$

<u>ولايجاد التكامل المطلوب:</u>

نضع $\alpha=2$ فى (1)

$$\therefore \int_0^\pi \frac{dx}{(\alpha-\cos x)^2}=\frac{2\pi}{(4-1)^{3/2}}$$

$$=\frac{2\pi}{3^{3/2}}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

وهو المطلوب

<u>مثال (5):</u>

إذا علم أن: $\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha}$

فباستخدام علاقة ليبنتز الأولى أثبت أن:

$$\boxed{\int_0^\infty x^n e^{-x}dx=n!}$$

الحل:

نفرض أن : $$I(\alpha)=\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha}$$

بتطبيق علاقة ليبنتز الأولى للتفاضل الجزئى تحت علاقة التكامل:

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\alpha}[e^{-\alpha x}]dx=\frac{\partial}{\partial\alpha}(\frac{1}{\alpha})$$

$$\therefore \int_0^\infty e^{-\alpha x}(-x)dx=-\frac{1}{\alpha^2}$$

$$\therefore \boxed{\int_0^\infty x.e^{-\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha^2}}$$

وبإجراء التفاضل مرة ثانية باستخدام علاقة ليبنتز الأولى:

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\alpha}[x.e^{-\alpha x}]dx=\frac{\partial}{\partial\alpha}(\frac{1}{\alpha^2})$$

$$\therefore \int_0^\infty x.e^{-\alpha x}.(-x)dx=-\frac{2}{\alpha^3}$$

$$\therefore \boxed{\int_0^\infty x^2e^{-\alpha x}dx=\frac{2}{\alpha^3}=\frac{1.2}{\alpha^3}}$$

وبإجراء التفاضل مرة ثالثة باستخدام علاقة ليبنتز الأولى:

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\alpha}[x^2e^{-\alpha x}]dx=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1.2}{\alpha^3}\right)$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\alpha}x^2.e^{-\alpha x}.(-x)dx=\frac{1.2.(-3)}{\alpha^4}$$

$$\therefore \int_0^\infty x^3.e^{-\alpha x}dx=\frac{1.2.3}{\alpha^4}$$

وهكذا حتى نصل إلى الصورة العامة:

$$\boxed{\int_{0}^{\infty} x^{n}.e^{-\alpha x}dx = \frac{1.2.3...}{\alpha^{n+1}}}$$

ولإيجاد العلاقة المطلوبة:

نضع $\alpha = 1$

$$\therefore \int_{0}^{\infty} x^{n}e^{-x}dx = 1.2.3...n = n!$$

وهو المطلوب.

<u>الحالة الثانية :</u>

عندما تكون نهائيا التكامل a, b دالتان فى البارامتر $a = a(\alpha), b = b(\alpha)$

فى هذه الحالة نستخدم علاقة ليبنتز الثانية وصورتها:

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} \frac{\partial F(x,\alpha)}{\partial \alpha}dx + F(b,\alpha) = \frac{db}{d\alpha} - F(a,\alpha) = \frac{da}{d\alpha}$$

يلاحظ أنه عندما لا تعتمد a , b على α

فإن : $\frac{da}{d\alpha} = 0, \frac{db}{d\alpha} = 0$ وتؤول علاقة ليبنتز الثانية إلى العلاقة الأولى.

<u>أمثلة محلولة:</u>

<u>مثال (1):</u>

إذا كان $I(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha^2} \frac{\sin dx}{x}dx$

فاوجد $I(\alpha) = \frac{dI(\alpha)}{d\alpha}$ حيث $\alpha \neq 0$

الحل:

هنا حدود التكامل تعتمد على α

حيث : $a(\alpha)=\alpha\ ,\ b(\alpha)=\alpha^2$

فبتطبيق علاقة لينبتز الثانية:

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=\int_{\alpha}^{\alpha^2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\sin\ dx}{x}\right)dx+\frac{\sin\ \alpha b}{b}\frac{d(\alpha^2)}{d\alpha}-\frac{\sin\ \alpha a}{a}\frac{d(\alpha)}{d\alpha}$$

$$=\int_{\alpha}^{\alpha^2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{x}.x\ \cos\ \alpha x\right)dx+\frac{\sin\alpha^2}{\alpha^2}(2\alpha)-\frac{\sin\alpha^2}{\alpha}(1)$$

$$=\int_{\alpha}^{\alpha^2}\cos\alpha x\,dx+\frac{2\sin\alpha^3}{\alpha}-\frac{\sin\alpha^2}{\alpha}$$

$$=\left[\frac{\sin\alpha x}{\alpha}\right]_{\alpha}^{\alpha^2}+\frac{2\sin\alpha^3}{\alpha}-\frac{\sin\alpha^2}{\alpha}$$

$$=\left[\frac{\sin\alpha^3}{\alpha}-\frac{\sin\alpha^2}{\alpha}\right]+\frac{2\sin\alpha^3}{\alpha}-\frac{\sin\alpha^2}{\alpha}$$

$$=\frac{1}{\alpha}[3\sin\alpha^3-2\sin\alpha^2]$$

وهو المطلوب.

مثال (2):

إذا كان $I(\alpha)=\int_{\alpha}^{\alpha^2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\alpha}\right)dx$

فأثبت أن: $\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=2\alpha\tan^{-1}\alpha-\frac{1}{2}\ln(1+\alpha^2)$

وذلك باستخدام علاقة ليبنتز الثانية.

الحل:

هنا: $a = 0 \quad , b = \alpha^2 = 0$

$$\downarrow$$

$$\frac{da}{d\alpha} = 0$$

وتؤول علاقة ليبنتز الثانية إلى الصورة:

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \int_0^b \frac{\partial F(x,\alpha)}{\partial \alpha} dx + F(b,\alpha)\frac{db}{b\alpha}$$

وبتطبيق هذه العلاقة على التكامل:

$$I(\alpha) = \int_0^{\alpha^2} \tan^{-1}\frac{x}{\alpha} dx$$

$$\therefore \frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \int_0^{\alpha^2} \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\tan^{-1}\frac{x}{\alpha}\right] dx + \tan^{-1}\frac{b}{\alpha}\frac{db}{d\alpha}$$

$$= \int_0^{\alpha^2} \frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)^2}\left(\frac{-x}{\alpha^2}\right) dx + \tan^{-1}\frac{\alpha^2}{\alpha}\frac{d(\alpha^2)}{d\alpha}$$

$$= -\int_0^{\alpha^2} \frac{x\,dx}{\alpha^2 + x^2} + \tan^{-1}(\alpha).(2\alpha)$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(\alpha^2 + x^2)\Big|_0^{\alpha^2} + 2\alpha\tan^{-1}\alpha$$

$$= 2\alpha\tan^{-1}\alpha - \frac{1}{2}\left[\ln\frac{\alpha^2+\alpha^4}{\alpha^2}\right]$$

$$= 2\alpha\tan^{-1}\alpha - \frac{1}{2}\ln(1+\alpha^2)$$

وهو المطلوب.

مسـائل

مسألة (1):

إذا كان $I(\alpha)=\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)}\frac{\sin dx}{x}dx$

فأوجد $\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}$ فى الحالتين:

(i) $a(\alpha)=1$, $b(\alpha)=e^{\alpha}$

(ii) $a(\alpha)=\alpha$, $b(\alpha)=e^{\alpha}$

وذلك باستخدام علاقة ليبنتز الثانية.

إجابة المسألة (1):

(i) $$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\sin(\alpha e^{\alpha})-\frac{1}{\alpha}\sin\alpha$$

(ii) $$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\sin(\alpha e^{\alpha})-\frac{2}{\alpha}\sin(\alpha^2)$$

مسألة (2):

إذا كان: $I(\alpha)=\int_{\alpha^2}^{\alpha^3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)dx$

فاثبت أن:

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=3\alpha^2\tan^{-1}\alpha^2-2\alpha\tan^{-1}\alpha+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha^4+1}\right)$$

وذلك باستخدام علاقة ليبنتز الثانية.

ثالثا : تكاملات أويلر (دوال جاما وبيتا) – Euler Integrals

مقدمة: هناك تكاملان محدودان هامان يظهران كثيرا فى مسائل التحليل الرياضى والتطبيقات العملية وخاصة فى الفيزياء والمسائل الهندسية، ويسميان بتكاملى أويلر وهما:

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx = \Gamma(n) \qquad (1)$$

وتسمى $\Gamma(n)$ دالة جاما (Γ-function)

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx = B(m,n) \qquad (2)$$

وتسمى $B(n)$ دالة بيتا (β-function)

أولا : دالة جاما

تعريف:

تعرف دالة جاما بالعلاقة: $\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$

العلاقة التكرارية:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

فمثلا: $\Gamma(7) = \Gamma(6+1) = 6\Gamma(6)$

مثال : أثبت أن $\Gamma(1) = 1$:

الحل:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1$$

حيث: $[e^{\infty} = \infty,\ e^{-\infty} = 0,\ e^{0} = 1$]

$$\therefore \quad \boxed{\Gamma(1) = (1)}$$

<u>دالة جاما بدلالة مضروب n:</u>

يعرف مضروب n (factorial n) بالعلاقة:

$$n! = n(n-1)\,(n-2)\,....\,3\,.\,2.\,1$$

وتكتب دالة جاما بدلالة هذا المضروب بالصورة:

$$\boxed{\Gamma(n+1) = n!}$$

حيث n عدد صحيح موجب:

$$n = 1, 2, 3, ...$$

<u>فمثلا:</u>

$$\Gamma(6) = \Gamma(5+1) = 5! = 5.4.3.2.1 = 120$$

<u>دالة جاما لقيم n السالبة:</u>

لقيم $n < 0$ (السالبة)

نطبق العلاقة التكرارية بالصورة الآتية:

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$$

<u>دالة جاما لقيم n النصفية:</u>

$$n = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, ... -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, ...$$

فى هذه الحالة تختزل دالة جاما بحيث نحصل عليها فى النهاية بدلالة $\Gamma(½)$:

<u>قيمة $\Gamma(½)$:</u>

$$\boxed{\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}}$$

سوف نثبت ذلك (فى الأمثلة)

<u>تكاملات تعتمد على دالة جاما:</u>

هناك عدد من التكاملات المحدودة التي تستخدم كثيرا فى المسائل التطبيقية وتؤول بعد حسابها إلى دالة جاما، ومن هذه التكاملات نذكر:

$$\int_{o}^{\infty} x^{m} e^{-ax^{n}} dx = \frac{1}{na^{\frac{m+1}{n}}} \Gamma(\frac{m+1}{n}) \qquad (1)$$

$$\int_{o}^{1} x^{m}(\ln x)^{n}\,dx = \frac{(-1)^{n}}{(m+1)^{n+1}}\Gamma(n+1) \qquad (2)$$

وسوف نثبت هذه العلاقات فى الأمثلة القادمة:

أمثلة محلولة

مثال (1): أثبت أن:

(أ) $$\boxed{\Gamma(n+1) = \Gamma(n)}$$

Recurrence relation (العلاقة التكرارية)

(ب) $$\boxed{\Gamma(n+1) = n!}$$

(حيث $n = 1, 2, 3, \ldots..$)

الحل: حل الجزء (أ):

من تعريف دالة جاما:

$$\Gamma(n) = \int_{o}^{\infty} e^{-x} x^{n-1}\,dx$$

$$\therefore\ \Gamma(n+1) = \int_{o}^{\infty} e^{-x} x^{n}\,dx = \int_{o}^{\infty} x^{n}\,d(-e^{-x})$$

بإجراء التكامل بالتجزئى نحصل على:

$$\Gamma(n+1) = x^{n}(-e^{-x})\Big|_{0}^{\infty} - \int_{0}^{\infty}(-e^{-x})(nx^{n-1})\,dx$$

$$\therefore\ \Gamma(n+1) = n\int_{0}^{\infty} e^{-x} x^{n-1}\,dx = n\,\Gamma(n) \qquad (1)$$

وهو المطلوب.

ملحوظة: يمكن كتابة (١) بالصورة

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$$

فبوضع $n = 1$:

$$\therefore\ \Gamma(1) = \frac{\Gamma(2)}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

وبوضع $n = 0$:

$$\therefore\ \Gamma(0) = \frac{\Gamma(1)}{0} = \infty$$

وبوضع $n = -1$:

$$\therefore \Gamma(-1) = \frac{\Gamma(0)}{-1} = -\infty$$

$[e^0=1,\ e^{\infty} = \infty,\ e^{-\infty} = 0]$

حل الجزء (ب):

لإثبات أن: $\Gamma(n + 1) = n!$

الطريقة الأولى : وجدنا أن : $\Gamma(1) = 1$

بوضع $n = 1, 2, 3, \ldots..$ فى العلاقة: $\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n)$

$$\Gamma(2) = 1.\ \Gamma(1) = 1 = 1!$$
$$\Gamma(3) = 2.\ \Gamma(2) = 2.1 = 2!$$
$$\Gamma(4) = 3.\ \Gamma(3) = 3.2.1 = 3!$$

وبوجه عام فإن:

$$\Gamma(n + 1) = n! \qquad (2)$$

حيث n عدد صحيح موجب، وهو المطلوب.

الطريقة الثانية:

من العلاقة: $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$

فبوضع $(n-1)$ بدلا من n نحصل على:

$$\Gamma(n) = (n-1)\,\Gamma(n-1)$$

وبالمثل فإن:

$$\Gamma(n-1) = (n-2)\,\Gamma(n-2)$$

أيضا:

$$\Gamma(n-2) = (n-3)\,\Gamma(n-3)$$

$$\therefore\ \Gamma(n+1) = n(n-1)\,\Gamma(n-1)$$
$$= n(n-1)\,(n-2)\,\Gamma(n-2)$$

$$= n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\ \ldots\ldots\ldots\ 3.2.1.\,\Gamma(1)$$

وذلك بوضع: $\Gamma(1) = \Gamma[n-(n-1)]$

$$\therefore\ \Gamma(n+1) = n(n-1)\,(n-2)\ \ldots.\ 3.2.1 = n!$$

وهو المطلوب.

مثال (2): أوجد قيمة كل مما يأتي:

$$\frac{\Gamma(6)}{2\Gamma(3)},\ \frac{\Gamma(3)\Gamma(2.5)}{\Gamma(5.5)},\ \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}$$

الحل:

(i) $$\frac{\Gamma(6)}{2\Gamma(3)} = \frac{5!}{2.2!} = \frac{5.4.3.2.1}{2.2.1} = 30$$

(ii) $$\frac{\Gamma(3)\Gamma(2.5)}{\Gamma(5.5)} = \frac{2!.(1.5).(0.5)\Gamma(0.5)}{(4.5).(3.5)(2.5)(1.5)(0.5)\Gamma(0.5)} = \frac{16}{315}$$

$$\text{(iii)}\quad \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}=\frac{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}=\frac{\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}=\frac{3}{4}$$

مثال (3): أوجد قيمة التكاملات الآتية:

$$\text{(i)}\ \int_o^\infty x^3e^{-x}dx \qquad\qquad \text{(ii)}\ \int_o^\infty x^6e^{-2x}dx$$

الحل: حل (i): من تعريف $\Gamma(n)$:

$$\int_o^\infty x^3e^{-x}dx=\Gamma(4)=3!=6$$

حل (ii):

بوضع: $2x=y \longrightarrow x=\frac{y}{2}$

$$\therefore\quad I=\int_o^\infty x^6e^{-2x}dx$$

$$=\int_o^\infty(\frac{y}{2})^6.e^{-y}.\frac{dy}{2}$$

$$=\frac{1}{27}\int_o^\infty y^6.e^{-y}dy$$

$$=\frac{1}{27}\Gamma(7)=\frac{1}{27}6!=\frac{45}{8}$$

مثال (4): أثبت أن:

$$\boxed{\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}}$$

<u>الإثبات:</u> من التعريف:

$$\Gamma(n)=\int_{o}^{\infty} e^{-x}x^{n-1}dx\,,\ n>o$$

فبوضع

$$dx=2udu \longleftarrow x=u^2$$

$$\Gamma(n)=2\int_{o}^{\infty} e^{-u^2}u^{2n-1}du$$

بوضع $n=\frac{1}{2}$:

$$\Gamma(\frac{1}{2})=2\int_{o}^{\infty} e^{-u^2}du \qquad (1)$$

أيضا

$$\Gamma(\frac{1}{2})=2\int_{o}^{\infty} e^{-\nu^2}d\nu \qquad (2)$$

بضرب (1) فى (2) نحصل على:

$$\therefore\ \left\{\Gamma(\frac{1}{2})\right\}^2=4\int_{o}^{\infty}\int_{o}^{\infty} e^{-(u^2+\nu^2)}dud\nu \qquad (3)$$

<u>لإيجاد التكامل فى (3)</u>: نستخدم الإحداثيات القطبية (r,θ) حيث:

$u=r\cos\theta \qquad , \qquad \nu=r\sin\theta$

عنصر المساحة هو: $du\,d\nu=rd\,rd\,\theta$

وحدود التكامل تتحول إلى:

r : من $0 \longrightarrow \infty$

θ : من $0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

وكذلك : $u^2+\nu^2=r^2$

وتؤول (3) إلى:

$$\left\{\Gamma(\frac{1}{2})\right\}^2 = 4\int_o^{\pi/2}\int_o^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta$$

$$= 4\int_o^{\pi/2}\int_o^{\infty} d(-\frac{1}{2}e^{-r^2})d\theta$$

$$= 4\int_o^{\pi/2}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_{r=o}^{\infty} d\theta$$

$$= 4\int_o^{\pi/2}\left[-\frac{1}{2}(0-1)\right]d\theta$$

$$= 4.\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} = \pi \rightarrow \therefore \boxed{\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}}$$

<u>مثال (5):</u> أوجد قيمة:

$$\text{(i) } \Gamma(-\frac{1}{2}) \qquad , \qquad \text{(ii) } \Gamma(-\frac{5}{2})$$

<u>الحل:</u> نستخدم تعريف دالة جاما للقيم السالبة:

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$$

$$\text{(i) } \Gamma(-\frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}$$

[حيث $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$]

$$\text{(ii) } \Gamma(-\frac{5}{2}) = \frac{\Gamma(-\frac{3}{2})}{-\frac{5}{2}}$$

ولكن:
$$\Gamma(-\frac{3}{2})=\frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{-\frac{3}{2}}=\frac{-2\sqrt{\pi}}{-\frac{3}{2}}=\frac{4\sqrt{\pi}}{3}$$

$$\therefore\ \Gamma(-\frac{5}{2})=\frac{\frac{4\sqrt{\pi}}{3}}{-\frac{5}{2}}=-\frac{8}{15}\sqrt{\pi}$$

وهو المطلوب.

مثال (6): أوجد قيمة التكاملين الآتيين:

$$I_1=\int_o^\infty \sqrt{y}\ e^{-y^3}\,dy, \qquad I_2=\int_o^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}$$

الحل: لإيجاد I_1

بوضع
$$y=x^{1/3} \longleftarrow y^3=x$$

$$\therefore\ 3y^2dy=dx \qquad \therefore\ dy=\frac{dx}{3x^{2/3}}$$

ويؤول التكامل إلى:

$$I_1=\int_o^\infty \sqrt{x^{1/3}}\ \ e^{-x}.\frac{dx}{3x^{2/3}}$$

$$=\frac{1}{3}\int_o^\infty x^{1/6}x^{-2/3}e^{-x}dx=\frac{1}{3}\int_o^\infty x^{-1/2}e^{-x}dx$$

$$=\frac{1}{3}.\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{3}$$

وهو المطلوب أولا

لإيجاد I_2:

$$I_2 = \int_o^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}$$

بوضع: $-\ln x = u \rightarrow \therefore\ x = e^{-u}$

$$\therefore\ dx = -e^{-u}\, du$$

حدود التكامل:

عندما $x = 1 \longrightarrow u = o$

وعندما $x = 0 \longrightarrow u = \infty$

ويؤول التكامل إلى:

$$I_2 = \int_o^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}} = \int_o^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du = \int_o^\infty u^{-1/2} e^{-u}\, du = \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

وهو المطلوب.

مثال (7): أثبت أن:

$$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{1.3.5....(2n-1)}{2n}\sqrt{\pi}$$

الحل:

نعلم أن: $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$

نستبدل n بالقيمة (n - ½) فنحصل على:

$$\therefore\ \Gamma(n+\frac{1}{2}) = (n-\frac{1}{2})\,\Gamma(n-\frac{1}{2})$$

$$= (n-\frac{1}{2})\,(n-\frac{3}{2})\,\Gamma(n-\frac{3}{2})$$

$$= (n-\frac{1}{2})\,(n-\frac{3}{2})\,(n-\frac{5}{2})\,\Gamma(n-\frac{5}{2})$$

$$= (n-\frac{1}{2})\,(n-\frac{3}{2})\,(n-\frac{5}{2})\ \ldots\ldots\ \frac{5}{2}.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\Gamma\frac{1}{2}$$

وذلك باعتبار أن:

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \Gamma[(n-(n-\frac{1}{2})]$$

$$\therefore\ \Gamma(n+\frac{1}{2}) = (\frac{2n-1}{2})\,(\frac{2n-3}{2})\ \ldots\ldots\ \frac{5}{2}.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\Gamma(\frac{1}{2})$$

$$= \frac{1}{2^n}\ x\ (2n-1)\,(2n-3)\ \ldots\ldots\ 5.3.1.\ \sqrt{\pi}$$

وهو المطلوب.

<u>مثال (8):</u> أثبت التكاملين الآتيين:

(i) $$I_1 = \int_o^\infty x^m\ e^{-ax^n} dx = \frac{1}{na^{\left(\frac{m+1}{n}\right)}}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$$

حيث m, n, a مقادير ثابتة موجبة.

(ii) $$I_2 = \int_o^1 x^m (\ln x)^n\ dx = \frac{(-1)^n \Gamma(n+1)}{(m+1)^{n+1}}$$

$$= \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} n!$$

<u>الإثبات</u>

أولا: <u>بالنسبة للتكامل I_1</u>

نضع:

$$x = \left(\frac{y}{a}\right)^{1/n} \longleftarrow \qquad ax^n = y$$

ويؤول التكامل إلى:

$$I_1=\int_o^\infty\left(\frac{y}{a}\right)^{m/n}.e^{-y}.d\left[\left(\frac{y}{a}\right)^{1/n}\right]$$

$$=\int_o^\infty\left(\frac{y}{a}\right)^{m/n}.e^{-y}\left(\frac{1}{a}\right)^{1/n}.\frac{1}{n}.y^{1/n-1}dy$$

$$=\frac{1}{n}.\frac{1}{a^{\frac{m+1}{n}}}\int_0^\infty y^{\frac{m+1}{n}-1}e^{-y}.dy=\frac{1}{n}.\frac{1}{a^{\frac{m+1}{n}}}\Gamma(\frac{m+1}{n})$$

وهو المطلوب.

ثانيا: بالنسبة للتكامل I_2

$$I_2=\int_o^1 x^m(\ln x)^n\ dx$$

بوضع:

$$\ln x=-y$$
$$\therefore\ (\ln x)^n=(-1)^n y^n$$

أيضا:

$$x=e^{-y}$$
$$\therefore\ dx=-e^{-y}\,dy$$

وحدود التكامل:

عندما: $y=\infty\longleftarrow x=0$

عندما: $y=0\longleftarrow x=1$

ويؤول التكامل I_2 إلى:

$$I_2=(-1)^n\int_o^\infty(e^{-y})^m(y)^n.e^{-y}\,dy=(-1)^n\int_0^\infty y^n e^{-(m+1)y}\,dy$$

وبوضع:

$$y=\frac{z}{m+1}\longleftarrow (m+1)y=z$$

وتبقى حدود التكامل كما هى حيث : $z=0$ عندما $y=0$ ، $z=\infty$ عندما $y=\infty$

$$\therefore \quad I_2=(-1)^n\int_0^{\infty}\frac{z^n}{(m+1)^n}.e^{-z}\frac{dz}{(m+1)}=(-1)^n\frac{1}{(m+1)^{n+1}}\int_0^{\infty}z^n e^{-z}dz$$

ولكن: $\int_0^{\infty}z^n e^{-z}dz=\Gamma(n+1)=n!$ (من تعريف آلة جاما)

$$\therefore \quad I_2=(-1)^n\frac{1}{(m+1)^{n+1}}\Gamma(n+1)=(-1)^n\frac{n!}{(m+1)^{n+1}}$$

وهو المطلوب.

<u>تطبيق هام على دالة جاما:</u>

فى مسائل توزيع السرعات الجزيئية فى الميكانيكا الإحصائية تظهر لنا تكـاملات على الصورة:

$$\int_0^{\infty}xe^{-\alpha x^2}dx,\int_0^{\infty}x^2e^{-\alpha x^2}dx,\int_0^{\infty}x^4e^{-\alpha x^2}dx,....$$

أو بالصورة العامة: $I=\int_0^{\infty}x^m e^{-\alpha x^n}dx$

وقيمة هذا التكامل بدلالة دالة جاما هى [سبق إيجادها]:

$$I=\frac{1}{n\alpha^{\frac{m+1}{n}}}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right) \qquad (1)$$

وفى الحالة الخاصة: عندما $n=2$ فإن :

$$\int_0^{\infty}x^m e^{-\alpha x^2}dx=\frac{1}{2\alpha^{\frac{m+1}{2}}}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \qquad (2)$$

حالات خاصة من (2):

(i) عندما $m = 0$: واعتبار أن $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

$$\therefore \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha^{1/2}} \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \qquad (3)$$

(ii) عندما $m = 1$: واعتبار أن $\Gamma(1) = 1$

$$\therefore \int_0^\infty x e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha} \Gamma(1) = \frac{1}{2\alpha} \qquad (4)$$

(iii) عندما $m = 2$: واعتبار أن $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

$$\therefore \int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha^{3/2}} \Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2\alpha^{3/2}} . \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{1}{4\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \qquad (5)$$

(iv) عندما $m = 3$: واعتبار أن $\Gamma(2) = 1$

$$\therefore \int_0^\infty x^3 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha^2} \Gamma(2) = \frac{1}{2\alpha^2} .(1) = \frac{1}{2\alpha^2} \qquad (6)$$

(v) عندما $m = 4$: واعتبار أن $\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{2} . \frac{1}{2} . \sqrt{\pi}$

$$\therefore \int_0^\infty x^4 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha^{5/2}} \Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha^5}} . \frac{3}{2} . \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}} \qquad (7)$$

وهكذا ....

ملحوظة (1): نلاحظ نتيجة التكامل الاتى:

$$\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x} dx \ \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

فمثلا : عندما $n = 1$:

$$\int_0^\infty x e^{-\alpha x} dx = \frac{1!}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2} \qquad (1)$$

عندما $n = 2$:

$$\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x}dx = \frac{2!}{\alpha^3} = \frac{2}{\alpha^3} \qquad (2)$$

وهكذا ....

ملحوظة (٢): إذا كانت حدود التكامل ($-\infty$) إلى (∞) فيسمى التكامل بالتكامل الشاذ أو المعتل، وفى هذه الحالة يكون:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^\infty f(x)dx = \lim_{a\to\infty}\int_a^0 f(x)dx + \lim_{b\to\infty}\int_0^b f(x)dx$$

حيث الدالة $f(x)$ متصلة على $(-\infty,\infty)$ [انظر الجزء الخاص بالتكاملات المعتلة] مع مراعاة الاتى:

إذا كانت $f(x)$ دالة زوجية فان: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\int_0^\infty f(x)dx$

ملحوظة (٣): بدون استخدام القانون العام (١) يمكن إثبات العلاقات (3), (4), (5) .... كما فى الأمثلة الآتية:

مثال (١): أثبت أن $I = \int_0^\infty xe^{-\alpha x^2} = \frac{1}{2\alpha}$

الحل:

نضع $y = \alpha x^2 \leftarrow \frac{1}{\sqrt{\alpha}} y^{½} \leftarrow dx = \frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{\alpha}} y^{½} dy$

$$\therefore \quad I = \int_0^\infty xe^{-\alpha x^2}dx = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}.\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^\infty y^{½}.e^{-y}.y^{-½}dy$$

$$= \frac{1}{2\alpha}\int_0^\infty e^{-y}dy = \frac{1}{2\alpha}\left[-e^{-y}\right]_0^\infty = \frac{-1}{2\alpha}\left[e^{-\infty} - e^0\right]$$

$$= -\frac{1}{2\alpha}[0-1] = \frac{1}{2\alpha}$$

مثال (2): أثبت أن: $I=\int_0^\infty x^2e^{-\alpha x^2}dx=\frac{1}{4\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

الحل:

نضع: $y=\alpha x^2 \leftarrow x^2=\frac{y}{\alpha} \leftarrow x=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}y^{1/2} \leftarrow dx=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\frac{1}{2}y^{-1/2}dy$

$$\therefore \quad I=\int_0^\infty x^2e^{-\alpha x^2}dx=\int_0^\infty(\frac{y}{\alpha})e^{-y}.\frac{1}{2}y^{-1/2}dy$$

$$=\frac{1}{2\alpha\sqrt{\alpha}}\int_0^\infty y^{1/2}e^{-y}dy=\frac{1}{2\alpha\sqrt{\alpha}}\Gamma(\frac{3}{2})$$

$$=\frac{1}{2\alpha\sqrt{\alpha}}.\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\frac{1}{4\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

مثال (3): أثبت أن: $I=\int_0^\infty x^4e^{-\alpha x^2}dx=\frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$

الحل: نضع $y=\alpha x^2 \leftarrow x^2=\frac{y}{\alpha} \leftarrow x=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}y^{1/2} \leftarrow dx=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}y^{-1/2}dy$

$$\therefore \quad I=\int_0^\infty x^4e^{-\alpha x^2}dx=\int_0^\infty\left(\frac{y}{\alpha}\right)^2e^{-y}.\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}.y^{-1/2}dy$$

$$=\frac{1}{\alpha^2\sqrt{\alpha}}\int_0^\infty y^{3/2}e^{-y}dy=\frac{1}{2\sqrt{\alpha^5}}\Gamma(\frac{5}{2})$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\alpha^5}}.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$$

ثانيا: دالة بيتا

تعريف:

تعرف دالة بيتا بالعلاقة:

$$B(m,n)=\int_{0}^{1} x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$$

ويمكن إثبات أن:

$$\text{(i)}\qquad B(m, n) = B(m, n)$$

وأن العلاقة بين دالتى بيتا وجاما فى:

$$\text{(ii)}\qquad B(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

حيث $m, n > 0$

تكاملات تؤول إلى دالة بيتا:

أهم هذه التكاملات التكاملين الآتيين:

$$\text{(i)}\qquad \int_{0}^{\infty}\frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}}\,dy=B(m,n)$$

$$\text{(ii)}\qquad \int_{0}^{\pi/2}\text{Sin}^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\;d\theta=\frac{1}{2}B(m,n)$$

حيث $m, n > 0$

وسوف نقوم بإيجاد هذين التكاملين الهامين وتكاملات أخرى تستخدم كثيرا فى التطبيقات العملية فى الأمثلة المحلولة بعد ذلك.

أمثلة محلولة

مثال (1): أثبت أن:

$$B(m, n) = B(n, m)$$

الحل: من التعريف:

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

باستبدال x بـ (1 − x) نحصل على:

$$B(m,n) = \int_1^0 (1-x)^{m-1}[1-(1-x)]^{n-1}(-dx)$$

$$= \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{m-1}dx = B(m, n)$$

وهو المطلوب.

مثال (2): أثبت أن: $B(m,n) = 2\int_0^{\pi/2} \mathrm{Sin}^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta \, d\theta$

الحل: من التعريف:

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx \qquad (1)$$

باستخدام التحويل:

$$x = \mathrm{Sin}^2 \theta$$
$$dx = 2\mathrm{Sin}\,\theta \cos\theta \, d\theta$$
$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - x$$

بالتعويض فى (1):

$$B(m,n)=\int_{0}^{\pi/2}(\sin^{2}\theta)^{m-1}(\cos^{2}\theta)^{n-1}.2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$=2\int_{0}^{\pi/2}\sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\,d\theta$$

$$\therefore\quad\int_{0}^{\pi/2}\sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\,d\theta=\frac{1}{2}B(m,n)$$

وهو المطلوب.

<u>مثال (3):</u> أثبت أن العلاقة بين دالتى بيتا وجاما يمكن كتابتها بالصورة الآتية:

$$B(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

حيث $m,n>0$

<u>الحل:</u> من تعريف دالة جاما

$$\Gamma(m)=\int_{0}^{\infty}u^{m-1}e^{-u}du$$

نفرض أن:

$$du=2x\,dx\longleftarrow u=x^{2}$$

$$\therefore\qquad\Gamma(m)=2\int_{0}^{\infty}x^{2m-1}e^{-x^{2}}dx\qquad(1)$$

وبالمثل فان:

$$\Gamma(n)=2\int_{0}^{\infty}y^{2n-1}e^{-y^{2}}dy\qquad(2)$$

من (2) ,(1) بالضرب نحصل على:

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = 4\int_{o}^{\infty}\int_{o}^{\infty} x^{2m-1}y^{2n-1}e^{-(x^2+y^2)}dxdy \qquad (3)$$

وبالتحول إلى الإحداثيات القطبية حيث:

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$$

$$x^2+y^2 = r^2 \quad , \quad dx\,dy = rd\,rd\,\theta$$ (عنصر المساحة)

حدود التكامل:

بالنسبة لـــ $r \quad : \quad o \longrightarrow \infty$

بالنسبة لـــ $\theta \quad : \quad o \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

ويؤول التكامل فى (3) إلى:

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = 4\int_{\theta=o}^{\pi/2}\int_{r=o}^{\infty}(r\cos\theta)^{2m-1}(r\sin\theta)^{2n-1}e^{-r^2}rdrd\theta$$

$$= 4\left(\int_{r=o}^{\infty} r^{2(m+n)-1}e^{-r^2}dr\right).\left(\int_{o}^{\pi/2}\cos^{2m-1}\theta\sin^{2n-1}\theta\,d\theta\right)$$

$$= 4\,[\frac{1}{2}\Gamma(m+n)].\,[\frac{1}{2}B(n,m)]$$

وذلك لأن:

$$B(n,m) = 2\int_{o}^{\pi/2}\sin^{2n-1}\theta\cos^{2m-1}\theta\,d\theta$$

$$\Gamma(m) = 2\int_{o}^{\infty}x^{2m-1}e^{-x^2}dx$$ (معادلة 1)

$$\therefore B(n,m) = B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

وهو المطلوب.

ملحوظة: من المثال رقم (2) وجدنا أن:

$$B(m,n) = 2\int_{0}^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\, d\theta \qquad (I)$$

ومن المثال رقم (3) وجدنا أن:

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \qquad (II)$$

بمساواة (I), (II) نحصل على:

$$\int_{0}^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\, d\theta = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)} \qquad (III)$$

وتستخدم هذه العلاقة كثيرا فى إيجاد عدد من التكاملات، كما فى المثال الآتى:

مثال (4): أوجد قيمة التكاملين الآتيين:

$$I_1 = \int_{0}^{\pi/2} \sin^6\theta\, d\theta$$

$$I_2 = \int_{0}^{\pi/2} \sin^4\theta\cos^5\theta\, d\theta$$

وذلك باستخدام خواص دالتى جاما وبيتا.

الحل: باستخدام العلاقة (III)

لإيجاد I_1: نضع:

$$m = \frac{7}{2} \longleftarrow 2m - 1 = 6$$

$$n = \frac{1}{2} \longleftarrow 2n - 1 = 0$$

وتؤول العلاقة (III) إلى:

$$\int_{o}^{\pi/2}\sin^6\theta\,d\theta = I_1 = \frac{\Gamma(\frac{7}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(4)} = \frac{5\pi}{32}$$

<u>لإيجاد I_2:</u> نضع

$$2n-1=5 \quad , \quad 2\,m-1=4$$

$$n=3 \quad , \quad n==\frac{5}{2}$$

ويؤول التكامل فى (III) إلى:

$$\int_{o}^{\pi/2}\sin^4\cos^5\theta\,d\theta = I_2 = \frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(3)}{2\Gamma(\frac{11}{2})} = \frac{8}{315}$$

<u>مثال (5):</u> أوجد التكاملات الآتية:

(i) $\int_{o}^{1} x^4(1-x)^3\,dx$

(ii) $\int_{o}^{2}\frac{x^2dx}{\sqrt{2-x}}$

(iii) $\int_{o}^{a} y^4.\sqrt{a^2-y^2}\,dy$

<u>الحل: أولا :</u>

$$I_1 = \int_{o}^{1} x^4(1-x)^3\,dx = B(5,4)$$

$$= \frac{\Gamma(5)\Gamma(4)}{\Gamma(9)} = \frac{4!.3!}{8!} = \frac{1}{280}$$

ثانيا:

$$I_2 = \int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{2-x}}$$

بوضع

$$dx = 2dz \longleftarrow x = 2z$$

$$\therefore I = \int_0^2 \frac{4z^2\,2dz}{\sqrt{2-2z}} = 4\sqrt{2}\int_0^1 z^2 (1-z)^{-1/2} dz$$

$$= 4\sqrt{2}B(3,\frac{1}{2}) = 4\sqrt{2}\,\frac{\Gamma(3)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{7}{2})} = \frac{64}{15}\sqrt{2}$$

ثالثا:

$$I_3 = \int_0^a y^4 .\sqrt{a^2 - y^2}\, dy$$

بوضع: $y^2 = a^2 z \longleftarrow y = a\sqrt{z}$

$$\therefore \quad dy = \frac{a}{2\sqrt{z}} dz$$

$$\therefore \quad I_3 = \int_0^1 a^4 z^2 .\sqrt{a^2 - a^2 z}\,.\left(\frac{a}{2\sqrt{z}}\right) dz = \frac{a^6}{2}\int_0^1 z^{3/2}(1-z)^{1/2} dz$$

$$= \frac{a^6}{2} B\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{a^6}{2}.\frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(4)} = \frac{a^6}{32}\pi$$

مثال (6): أثبت العلاقة التكاملية الآتية للدالة بيتا:

$$B(m,n)=\int_{o}^{\infty}\frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}}dy$$

الحل: من تعريف دالة بيتا

$$B(m,n)=\int_{o}^{1}x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

نضع: $x=\dfrac{y}{1+y}$

$$\therefore\ 1-x=1-\frac{y}{1+y}=\frac{1}{1+y}$$

$$\therefore\ dx=\frac{(1+y)dy-y.dy}{(1+y)^{2}}=\frac{dy}{(1+y)^{2}}$$

ولإيجاد حدود التكامل:

$$y=\frac{x}{1-x}\longleftarrow x=\frac{y}{1+y}$$

عندما $y=o\longleftarrow x=o$

عندما $y=\infty\longleftarrow x=1$

$$\therefore\ B(m,n)=\int_{o}^{\infty}\frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m-1}}.\frac{1}{(1+y)^{n-1}}.\frac{dy}{(1+y)^{2}}$$

$$=\int_{o}^{\infty}\frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}}dy=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

$$\therefore\ B(m,n)=\int_{o}^{\infty}\frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}}dy$$

مثال (7): أثبت أن:

$$\int_0^\infty \frac{y^{m-1}}{(1+y)} dy = \Gamma(m)\,\Gamma(1-m), \qquad 0 < m < 1$$

حيث:

الحل:

بوضع:

$$x = \frac{y}{1+y}$$

$$\therefore\ y = \frac{x}{1-x} \longrightarrow 1+y = \frac{x}{1-x}$$

$$\therefore\ dy = \frac{dx}{(1-x)^2}$$

ويؤول التكامل المعطى إلى:

$$I = \int_0^\infty \frac{y^{m-1}}{(1+y)} dy = \int_0^1 \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m-1}}.(1-x).\frac{dx}{(1-x)^2}$$

$$= \int_0^1 x^{m-1}.(1-x)^{-m} dx = B(m, 1-m)$$

$$= \frac{\Gamma(m)\Gamma(1-m)}{\Gamma(1)} = \Gamma(m)\Gamma(1-m)$$

وهو المطلوب.

ملحوظة على المثال (7):

التكامل:

$$I = \int_0^\infty \frac{y^{m-1}}{1+y} dy$$

يمكن إيجاده باستخدام خواص التكاملات المعتلة (Improper integrals)

$$\boxed{I = \int_{o}^{\infty} \frac{y^{m-1}}{1+y} dy = \frac{\pi}{\text{Sin } m\pi}}$$

حيث: $o < m < 1$

ومن مثال (7):

$$\therefore \boxed{\Gamma(m)\Gamma(1-m) = \frac{\pi}{\text{Sin } m\pi}}$$

وهى علاقة هامة تستخدم كثيرا فى حل العديد من المسائل التطبيقية.

كحالة خاصة: بوضع $m = \frac{1}{2}$

$$\therefore \Gamma(\tfrac{1}{2})\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \frac{\pi}{\text{Sin } \frac{\pi}{2}} = \pi$$

$$\therefore \left[\Gamma(\tfrac{1}{2})\right]^2 = \pi \qquad \therefore \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

وهو ما حصلنا عليه سابقا.

ملحوظة هامة: تستخدم العلاقة $\Gamma(m)\Gamma(1-m) = \frac{\pi}{\text{Sin } m\pi}$

كثيرا فى حل العديد من التكاملات، كما يتضح ذلك من الأمثلة الآتية:

مثال (8): أوجد قيمة التكامل الاتى: $I = \int_{o}^{2} x.\sqrt[3]{8 - x^3}\, dx$

الحل:

نضع:

$$x = 2y^{1/3} \longleftarrow x^3 = 8\,y$$

$$dx = \frac{3}{2} y^{-2/3} dy$$

$$\therefore I=\int_{o}^{1}2y^{1/3}.\sqrt[3]{8(1-y}\ .\frac{2}{3}y^{-2/3}dy=\frac{8}{3}\int_{o}^{1}y^{-1/3}(1-y)^{1/3}dy$$

$$=\frac{8}{3}B(\frac{2}{3},\frac{4}{3})=\frac{8}{3}\frac{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{4}{3})}{\Gamma(2)}$$

ولكن:

$$\Gamma(2)=1.\,\Gamma(1)=1$$

ولإيجاد:

$$\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{4}{3})$$

حيث أن:

$$\Gamma(\frac{4}{3})=\Gamma(\frac{1}{3}+1)=\frac{1}{3}\Gamma(\frac{1}{3})$$

$$\therefore\ \Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{4}{3})=\frac{1}{3}\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{2}{3})$$

وباستخدام العلاقة:

$$\Gamma(n)\Gamma(1-n)=\frac{\pi}{\mathrm{Sin}\ m\pi}$$

$$\therefore \Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{4}{3})=\frac{1}{3}\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{2}{3})=\frac{1}{3}\frac{\pi}{\mathrm{Sin}\ \frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{1}{3}\frac{\pi}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

ويصبح التكامل المطلوب بالصورة:

$$I=\frac{8}{3}.\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}=\frac{16\pi}{9\sqrt{3}}$$

وهو المطلوب.

مثال (9): أوجد قيمة التكامل الاتى:

$$I = \int_{o}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

الحل:

بوضع: $x^4 = y \longrightarrow x = \frac{1}{y4}$

$$\therefore\ dx = \frac{1}{4}\ y^{-3/4}\ dy$$

ويؤول التكامل إلى:

$$I = \frac{1}{4}\int_{o}^{\infty} \frac{y^{-3/4}}{1+y} dy = \frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4})$$

$$= \frac{1}{4}.\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}\sqrt{2}$$

(حيث $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$)

وهو المطلوب.

مثال (10): باستخدام تعريف دالة بيتا:

$$B(m,n) = \int_{o}^{1} x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx$$

أثبت أن:

$$\int_{o}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\tan\theta}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

الحل: حيث أن:

$$B(m,n) = \int_{o}^{1} x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx$$

فبوضع: $x = \sin^2\ \theta \longrightarrow dx = 2\sin\theta\cos\theta\ d\theta$

وأيضا: $1 - x = 1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$

وتتغير حدود التكامل إلى: من $\theta = 0$ إلى $\theta = \pi/2$

ونحصل على:

$$B(m,n) = \int_{o}^{\pi/2} (\sin^2\theta)^{m-1}(\cos^2)^{n-1}.2\text{Sin}\,\theta\,\cos\theta\,d\theta$$

$$= 2\int_{o}^{\pi/2} \sin^{2m-1}.\cos^{2n-1}d\theta$$

وبأخذ $m = 1/4\ ,\ n = 3/4$ نجد أن:

$$\therefore\quad B(\frac{1}{4},\frac{3}{4}) = 2\int_{o}^{\pi/2}\sin^{-1/2}\theta.\cos^{1/2}\theta\,d\theta = 2\int_{o}^{\pi/2}\frac{\sin^{-½}\theta}{\cos^{½}\theta}d\theta$$

$$= 2\int_{o}^{\pi/2}\tan^{-½}\theta\,d\theta = 2\int_{o}^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{\tan\theta}}$$

$$\therefore \int_{o}^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{\tan\theta}} = \frac{1}{2}B(\frac{1}{4},\frac{3}{4}) = \frac{1}{2}\left[\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4})\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}(\sqrt{2}\pi) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

وهو المطلوب.

صيغة التضاعف لدالة جاما
Duplication Formula

هى صيغة تعطى بالعلاقة الآتية:

$$\Gamma(2m) = \left(\frac{2^{2m-1}}{\sqrt{\pi}}\right)\Gamma(m)\,\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)$$

الإثبات:

بكتابة:

$$I = \int_0^{\pi/2} \operatorname{Sin}^{2m}\theta d\theta$$

$$J = \int_0^{\pi/2} \operatorname{Sin}^{2m} 2\theta d\theta$$

من العلاقة:

$$B(m,n) = 2\int_0^{\pi/2} \operatorname{Sin}^{2m-1}\cos^{2n-1}\theta d\theta \qquad (1)$$

$$\therefore I = \frac{1}{2}\,B\left(m+\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}\right)$$

$$2n-1=0$$

$$n=\frac{1}{2}$$

باستبدال $(2m-1)$ فى القانون بـ $2m$

$$\therefore I = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(m+1)} = \frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{2m\Gamma(m)} \qquad (2)$$

$$J = \int_{0}^{\pi/2} \text{Sin}^{2m} 2\theta \, d\theta$$

بوضع: $2\theta = \phi$

$d\theta = \frac{1}{2} d\phi$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \text{Sin}^{2m} \phi d\phi = \int_{0}^{\pi/2} \text{Sin}^{2m} \phi d\phi = I \qquad (3)$$

ولكن: $J = \int_{0}^{\pi/2} \text{Sin}^{2m} 2\theta d\theta = \int_{0}^{\pi/2} (2\text{Sin}\,\theta \cos\theta)^{2m} d\theta$

$$= 2^{2m} \int_{0}^{\pi/2} \text{Sin}^{2m}\theta \cos^{2m} \theta d\theta$$

حيث التكامل داخل J يساوى: $\frac{1}{2} B(m+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2})$

بوضع: $2n - 1 = 2m$

$\therefore n = m + \frac{1}{2}$

$$\therefore J = 2^{2m-1} \frac{\left[\Gamma(m+\frac{1}{2})\right]^2}{\Gamma(2m+1)}$$

$$= 2^{2m-1} \frac{\left[\Gamma(m+\frac{1}{2})\right]^2}{2m\Gamma(2m)} \qquad (4)$$

بمساواة (4) ,(2) وذلك باستخدام (3):

$$\frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{2m\Gamma(m)} = 2^{2m-1} \frac{\left[\Gamma(m+\frac{1}{2})\right]^2}{2m\Gamma(2m)}$$

$$\therefore \Gamma(2m) = \frac{2^{2m-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(m)\Gamma(m+\frac{1}{2})$$

وهو المطلوب.

مثال (١١): أثبت أن:

(i) $$\int_0^1 (1-x^n)^{1/n}dx = \frac{1}{n}\frac{\left[\Gamma(\frac{1}{n})\right]^2}{2\Gamma(\frac{2}{n})}$$

(ii) $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{n}\frac{\Gamma(\frac{1}{n})}{\Gamma(\frac{1}{n}+\frac{1}{2})}$$

(iii) $$\int_0^1 x^{m-1}(1-x^a)^n dx = \frac{n!}{a}\frac{\Gamma(\frac{m}{a})}{\Gamma(\frac{m}{a}+n+1)}$$

(iv) $$\int_0^1 \frac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{(a+x)^{m+1}}dx \frac{1}{a^n(1+a)^m}\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

حل رقم (i):

$$I_1 = \int_0^1 (1-x^n)^{1/n}dx$$

نضع:

$$x = \sin^{2/n}\theta \leftarrow x^n = \sin^2\theta$$

$$\therefore \quad dx = \frac{2}{n}\sin^{\frac{2}{n}-1}\theta\cos\theta\, d\theta$$

$$\therefore \; I_1 = \int_0^{\pi/2} (\cos^2\theta)^{1/n}.\frac{2}{n}\sin^{\frac{2}{n}-1}\theta\cos\theta d\theta$$

$$= \frac{2}{n}\int_0^{\pi/2} \cos^{\frac{2}{n}+1}\theta.\sin^{\frac{2}{n}-1}\theta d\theta$$

ولكن التكامل فى I_1 يساوى

$$\frac{1}{2}B\left[\frac{1}{n}+1,\frac{1}{n}\right]$$

نستبدل:

$2m-1$

بـ $\frac{2}{n}+1$

$2m-1=\frac{2}{n}+1$

$\therefore m=\frac{1}{n}+1$

$$\therefore I_1=\frac{1}{n}\frac{\Gamma(\frac{1}{n}+1)\Gamma(\frac{1}{n})}{\Gamma(\frac{2}{n}+1)}$$

$$=\frac{1}{n}\frac{\frac{1}{n}\Gamma(\frac{1}{n})\Gamma(\frac{1}{n})}{(\frac{2}{n})\Gamma(\frac{2}{n})}$$

$$=\frac{1}{n}\frac{\left[\Gamma(\frac{1}{n})\right]^2}{2\Gamma(\frac{2}{n})}$$

وهو المطلوب

حل رقم (ii):

$$I_2=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}$$

نضع:

$$x=\sin^{2/n}\theta \longleftarrow x^n=\sin^2\theta$$

$$dx=\frac{2}{n}\sin^{2/n-1}\theta\cos\theta\, d\theta$$

$$=\frac{2}{n}\sin^{2-n/n}\theta\cos\theta\, d\theta$$

$1-x^2=1-\sin^2\theta$

$=\cos^2\theta$

$$\therefore \quad I_2=\frac{2}{n}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^{\frac{2-n}{n}}\theta\cos\theta d\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{2}{n}\int_{o}^{\pi/2} \sin^{\frac{2-n}{n}} \theta d\theta = \frac{2}{n}\left[\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{n}\right)\right] = \frac{1}{n}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{n})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{n})}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{n}\frac{\Gamma(\frac{1}{n})}{\Gamma(\frac{1}{n}+\frac{1}{2})} \quad , \qquad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$ حيث:

وهو المطلوب

حل رقم (iii):

$$I_3 = \int_{o}^{1} x^{m-1}(1-\underbrace{x^a})^n dx$$

نضع $x = \sin^{2/a}\theta \longleftarrow x^a = \sin^2\theta$

$$dx = \frac{2}{a}\sin^{2/a-1}\theta \cos\theta d\theta$$

$$1 - x^a = 1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$$

ويؤول التكامل إلى:

$$I_3 = \frac{2}{a}\int_{o}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin^{\frac{2}{a}(m-1)}\theta} \; \underbrace{\cos^{2n}\theta} \; \underbrace{\sin^{\frac{2}{a}-1}\theta \cos\theta d\theta}$$

$$= \frac{2}{a}\underbrace{\int_{o}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2m}{a}-1}\theta \cos^{2n+1}\theta d\theta} \qquad = \frac{2}{n}.\frac{1}{2}\left[B\left(\frac{m}{a},\underbrace{n+1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{a}\frac{\Gamma(\frac{m}{a})\Gamma(n+1)}{\Gamma(\frac{m}{a}+n+1)} = \frac{n!}{a}\frac{\Gamma(\frac{m}{a})}{\Gamma(\frac{m}{a}+n+1)}$$

حيث: $\Gamma(n+1) = n!$

حل رقم (iv):

$$I_4 = \int_0^1 \frac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{(a+x)^{m+n}} \underbrace{dx}$$

نضع

$$y = \frac{x(1-a)}{(a+x)} \qquad (1)$$

$$\therefore \quad dy = \frac{(a+x)(1+a) - x(1+a)}{(a+x)^2} dx = \frac{(1+a)a}{(a+x)^2} dx$$

$$\therefore \quad dx = \frac{(a+x)^2}{a(1+a)} dy \qquad (2)$$

ومن (١)

بعد الاختصار

$$\therefore \qquad x = \frac{ay}{1+a-y}$$

$$\therefore \qquad 1-x = 1 - \frac{ay}{1+a-y} = \frac{1+a-y-ay}{1+a-y}$$

$$1-x = \frac{(1+a)(1-y)}{1+a-y} \qquad (3)$$

$$a+x = a + \frac{ay}{1+a-y} = \frac{a+a^2-ay+ay}{1+a-y}$$

$$\therefore \qquad a+x = \frac{a(1+a)}{1+a-y} \qquad (4)$$

وبالتعويض من (2) ,(3) ,(4) فى I_4 نحصل على:

$$I_4 = \int_0^1 \frac{a^{m-1}y^{m-1}.(1+a)^{n-1}(1-y)^{n-1}.(1+a-y)^{m+n}.a(1+a)}{(1+a-y)^{m-1}.(1+a-y)^{n+1}.a^{m+n}(1+a)^{m+n}(1+a-y)^2}\,dy$$

بعد الاختصار نحصل على:

$$I_4 = \frac{1}{a^n(1+a)^m}\underbrace{\int_0^1 y^{m-1}(1-y)^{n-1}dy}$$

$$= \frac{1}{a^n(1+a)^m}B(m,n) = \frac{1}{a^n(1+a)^m}\,\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

وهو المطلوب.

صيغة التقارب للدالة $\Gamma(n)$
Approximation Formula

عندما تكون n كبيرة فانه تكون هناك صعوبات فى حساب قيمة الدالة $\Gamma(n)$ وفى هذه الحالة نلجأ الى تقريب معين يسمى تقريب سترلنج (Stirling Approximation) ويعطى بالصورة الآتية:

$$\Gamma(n+1) = n! \simeq \sqrt{2\pi n}\ n^n - e^{-n}$$

حيث الرمز $\simeq$ معناه (تقريبا فى حالة n كبيرة)

وتسمى هذه الصيغة أيضا بصيغة التقارب للدالة $\Gamma(n)$، وتستخدم هذه الصيغة كثيرا فى مسائل الفيزياء الإحصائية (Statistical physics) وفى ميكانيكا الكم (Quantum Mechanics) وغيرها من فروع الفيزياء الحديثة (Mathematical physics).

الإثبات:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty \underbrace{x^n}\, e^{-x}\,dx$$

$$= \int_0^\infty [e^{n \ln x} . e^{-x}]\,dx$$

$$= \int_0^\infty [e^{n \ln x - x}]\,dx$$

$$x^n = e^{n \ln x}$$

$$\ln x^n = n \ln x$$
$$n \ln x = n \ln x$$

باستخدام التعويض: $x = n + y$

$$\therefore\ \Gamma(n+1) = \int_{-n}^{\infty} e^{n\ln(n+y)-(n+y)}dy$$

$$= e^{-n}\int_{-n}^{\infty} e^{n\ln(n+y)-y}dy$$

$$= e^{-n}\int_{-n}^{\infty} e^{n\ln \underset{\smile}{n}\underbrace{(1+y/n)}-y}dy$$

$$= e^{-n}\int_{-n}^{\infty} e^{n\ln \underset{\smile}{n}+n\ln\underbrace{(1+y/n)}-y}dy$$

$$= e^{-n}.n^{n}\int_{-n}^{\infty} e^{n\underbrace{\ln(1+y/n)}-y}dy$$

$e^{n\ln n} = n^{n}$

يأخذ ln للطرفين

$n\ln n = \ln n^{n}$

$= n\ln n$

وباستخدام مفكوك تايلور للدالة $\ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots.$$

$$\therefore\ \Gamma(n+1) = e^{-n}n^{n}\int_{-n}^{\infty} e^{n[\frac{y}{n}-\frac{y^2}{2n^2}+\ldots..]-y}dy$$

$$= e^{-n}n^{n}\int_{-n}^{\infty} e^{[y-\frac{y^2}{2n}+\frac{y^3}{3n^2}+\ldots..]-y}dy$$

$$= e^{-n}n^{n}\int_{-n}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2n}+\frac{y^3}{3n^2}+\ldots..}dy$$

بوضع: $\frac{y^2}{n} = z^2 \leftarrow y = \sqrt{n}z \leftarrow dy = \sqrt{n}dz$

$$\Gamma(n+1) = e^{-n}n^n \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{n}+\frac{z^3}{3\sqrt{n}}\cdots\cdots} \sqrt{n}dz$$

تقريب سترلنج Stirling Approximation:

عندما n تكون كبيرة جدا فإن:

$$\Gamma(n+1) \simeq e^{-n}n^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{n}} .\sqrt{n}dz$$

$$\simeq e^{-n}n^n\sqrt{n} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{n}} .dz}_{\sqrt{2\pi}}$$

$$\therefore \boxed{\Gamma(n+1) = n! \simeq \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}}$$

وهو تقريب سترلنج المطلوب والمستخدم كثيرا فى العديد من المسائل التطبيقية.

مسائل للمراجعة على دالتى بيتا وجاما

مسألة رقم (١): أثبت أن:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha\lambda^2}\cos\beta\lambda\, d\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\beta^2/4\alpha}$$

الحل:

نفرض أن:

$$I = I(\alpha,\beta) = \int_0^\infty e^{-\alpha\lambda^2}\cos\beta\lambda\, d\lambda$$

وبإجراء التفاضل بالنسبة إلى β وذلك تحت علامة التكامل (باستخدام قاعدة ليبنتز) نحصل على:

$$\frac{\partial I}{\partial\beta} = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\beta}[e^{-\alpha\lambda^2}\cos\beta\lambda]d\lambda = \int_0^\infty [e^{-\alpha\lambda^2}.(-\sin\beta\lambda).(\lambda)]d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\alpha}\int_0^\infty [(\sin\beta\lambda).e^{-\alpha\lambda^2}.(-2\alpha\lambda d\lambda)] = \frac{1}{2\alpha}\int_0^\infty [(\sin\beta\lambda).d(e^{-\alpha\lambda^2})]$$

وبإجراء التكامل بالتجزئ نحصل على:

$$\frac{\partial I}{\partial\beta} = \frac{1}{2\alpha}[\sin\beta\lambda.e^{-\alpha\lambda^2}\Big|_0^\infty - \beta\int_0^\infty e^{-\alpha\lambda^2}\cos\beta\lambda d\lambda]$$

$$= \frac{1}{2\alpha}[0 - \beta\int_0^\infty e^{-\alpha\lambda^2}\cos\beta\lambda d\lambda] = \frac{-\beta}{2\alpha}I$$

$$\therefore \frac{1}{I}\frac{\partial I}{\partial\beta} = -\frac{\beta}{2\alpha} \qquad\qquad \therefore \frac{\partial}{\partial\beta}\ln I = -\frac{\beta}{2\alpha}$$

وبالتكامل بالنسبة إلى β نحصل على:

$$\ln I = -\frac{1}{2\alpha}.\left(\frac{\beta^2}{2}\right) + C_1 \qquad\qquad = -\frac{\beta^2}{4\alpha} + \ln C_1$$

$$\therefore \ln \frac{I}{C} = -\frac{\beta^2}{4\alpha} \qquad \therefore I = C e^{-\beta^2/4\alpha} \qquad (1)$$

ولإيجاد الثابت C:

بوضع: $\beta = 0$ فإن: $I(\alpha,0) = \int_0^\infty e^{-\alpha\lambda^2} d\lambda$

وبوضع: $x = \alpha\lambda^2 \leftarrow dx = 2\alpha\lambda d\lambda \leftarrow d\lambda = \frac{dx}{2\alpha\lambda}$

$$\lambda^2 = \frac{x}{\alpha} \therefore \lambda = \sqrt{\frac{x}{\alpha}}$$

$$\therefore d\lambda = \frac{dx}{2\alpha\lambda} = \frac{dx}{2\alpha\sqrt{\frac{x}{\alpha}}} = \frac{x^{-1/2}dx}{2\sqrt{a}}$$

$$\therefore I(\alpha,0) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \int_0^\infty x^{-1/2} e^{-x} dx$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} . \sqrt{\pi} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \qquad (2)$$

من (1), (2) نحصل على:

$$I(\alpha,0) = Ce^{o} = C = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

وبالتعويض فى (1) نجد أن:

$$\therefore I = I(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\beta^2/4\alpha}$$

وهو المطلوب.

مسألة رقم (٢): أثبت أن:

$$\int_{o}^{\infty}\frac{\cos x}{x^{p}}dx=\frac{\pi}{2\Gamma(p)\cos(\frac{p\pi}{2})}$$

حيث $o<p<1$

الحل:

نعلم أن:

$$\frac{1}{x^{p}}=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_{o}^{\infty}z^{p-1}e^{-xz}dz$$

$$\therefore\ \int_{o}^{\infty}\frac{\cos x}{x^{p}}dx=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_{o}^{\infty}\int_{o}^{\infty}z^{p-1}e^{-xz}\cos x\ dz\ dx$$

$$=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_{o}^{\infty}\left[\int_{o}^{\infty}e^{-xz}\cos x\ dx\right]z^{p-1}dz$$

$$=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_{o}^{\infty}\left[\frac{z}{1+z^{2}}\right]z^{p-1}dz\ =\frac{1}{\Gamma(p)}\int_{o}^{\infty}\frac{z^{p}}{1+z^{2}}dz\qquad(1)$$

حيث استخدمنا نتيجة التكامل:

$$\boxed{\int_{o}^{\infty}e^{-xz}\ \cos x\ dx=\frac{z}{1+z^{2}}}$$

<u>ولإيجاد التكامل في (1):</u>

نضع: $z=\sqrt{u}\leftarrow z^{2}=u$

$$dz=\frac{du}{2z}=\frac{du}{2\sqrt{u}}\leftarrow 2zdz=du$$

فيكون لدينا:

$$I = \int_{o}^{\infty} \frac{z^p}{1+z^2} dz = \int_{o}^{\infty} \frac{(u^{½})^p}{1+u} \left(\frac{(du)}{2\sqrt{u}} \right) = \frac{1}{2} \int_{o}^{\infty} \frac{u^{p/2-½}}{1+u} du$$

$$= \frac{1}{2} \int_{o}^{\infty} \frac{u^{½(p-1)}}{1+u} du$$

ولكن:

$$\int_{o}^{\infty} \frac{y^{m-1}}{1+y} dy = \Gamma(m)\Gamma(1-m) = \frac{\pi}{\sin m\pi}$$ [سبق الحصول عليها]

$$\therefore I = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sin ½(p+1)\pi} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\cos ½ p\pi}$$

وبذلك نحصل على التكامل المطلوب [بالتعويض فى (1)]:

$$\int_{o}^{\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx = \frac{1}{\Gamma(p)} \cdot \frac{1}{2} \frac{\pi}{\cos \frac{p\pi}{2}} = \frac{\pi}{2\Gamma(p) \cos\left(\frac{p\pi}{2} \right)}$$

وهو المطلوب.

رابعاً: تكامل الدوال الاتجاهية ونظريات التكامل الاتجاهية:

تعريف الدالة الاتجاهية: هي دالة تسلك سلوك المتجهات أي تنطبق عليها كل قوانين المتجهات، وتعتمد على متغير قياسي أو أكثر.

$\vec{F}(x,y,z)$	$\vec{F}(t)$
(تعتمد على x,y,z)	(تعتمد على t)

وقبل أن ندرس تكامل تلك الدوال، ندرس أولا مشتقات (أو تفاضلات) تلك الدوال.

مشتقة الدوال الاتجاهية:

1) **إذا كانت الدالة في متغير واحد:** مثل

$$\vec{F}(t)=\sin t\ \hat{i}+\ln t\ \hat{j}+t^2\ \hat{k}$$

تعرف مشتقتها بالمشتقة الكلية:

$$\frac{d\vec{F}(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\sin t\hat{i}+\ln t\hat{j}+t^2\hat{k}\right]=(\cos t)\hat{i}+\left(\frac{1}{t}\right)\hat{j}+(2t)\hat{k}$$

2) **إذا كانت الدالة في أكثر من متغير:** مثل

$$\vec{F}(x,y,z)=x^2yz\hat{i}-2xz^3\hat{j}+xz^2\hat{k}$$

توجد ثلاث مشتقات [تساوي عدد المتغيرات] وتعرف بالمشتقات الجزئية

$$\frac{\partial\vec{F}}{\partial x},\frac{\partial\vec{F}}{\partial y},\frac{\partial\vec{F}}{\partial z}$$

لإيجاد $\dfrac{\partial\vec{F}}{\partial x}$: نفاضل بالنسبة إلى x مع اعتبار y,z ثابتان فنحصل على:

$$\frac{\partial\vec{F}}{\partial x}=yz(2x)\hat{i}-2z^3(1)\hat{j}+z^2(1)\hat{k}=2xyz\hat{i}-2z^3\hat{j}+z^2\hat{k}$$

ولإيجاد $\dfrac{\partial \vec{F}}{\partial y}$: تفاضل بالنسبة إلى y مع اعتبار x,z ثابتان فنحصل على :

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial y}=(x^2z)(1)\hat{i}-(0)\hat{j}+(0)\hat{k}\ =x^2z\hat{i}$$

ولإيجاد $\dfrac{\partial \vec{F}}{\partial z}$: تفاضل بالنسبة إلى z مع اعتبار x,y ثابتان فنحصل على :

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial z}=(x^2y)(1)\hat{i}-2x(3z^2)\hat{j}+x(2z)\hat{k}\ =x^2y\hat{i}-6xz^2\hat{j}+2xz\hat{k}$$

<u>المشتقات الجزئية الأعلى:</u>

$$\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial X^2}=\frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{\partial \vec{F}}{\partial X}\right],\ \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \vec{F}}{\partial y}\right],\ \frac{\partial^3 \vec{F}}{\partial^2 x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x\partial y}\right],\cdots$$

<u>ملحوظة</u>: للدوال المتصلة نجد أن

$$\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial y\partial x}$$

<u>مثال</u>: إذا كانت :

$$\vec{A}(x,y,z)=x^2yz\,\hat{i}-2xz^3\,\hat{j}+xz^2\hat{k}\ ,\ \vec{B}(x,y,z)=2z\,\hat{i}+y\,\hat{j}-x^2\hat{k}$$

فأوجد $\dfrac{\partial^2(\vec{A}\wedge\vec{B})}{\partial x\,\partial y}$.

<u>الحل</u> : <u>أولاً</u> : نوجد المتجه $\vec{D}=\vec{A}\wedge\vec{B}$ كالآتي:

$$\vec{D}=\vec{A}\wedge\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ x^2yz & -2xz^3 & xz^2\\ 2z & y & -x^2\end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}\left[2x^3z^3-xyz^2\right]-\hat{j}\left[-x^4yz-2xz^3\right]+\hat{k}\left[x^2y^2z+4xz^4\right]\qquad (١)$$

المطلوب إيجاد : $\dfrac{\partial^2\vec{D}}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial y}\right]$

ومن (١):

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial y}=\hat{i}\left[0-xz^2\right]+\hat{j}\left[x^4z+0\right]+\hat{k}\left[2x^2yz+0\right]=-xz^2\hat{i}+x^4z\hat{j}+2x^2yz\hat{k}\qquad (٢)$$

وبتفاضل (٢) بالنسبة إلى x جزئياً نحصل على المطلوب وهو:

$$\frac{\partial^2 \bar{D}}{\partial x \partial y} = \left(-z^2\right)\hat{i} + \left(4x^3 z\right)\hat{j} + (4xyz)\hat{k} = -z^2\hat{i} + 4x^3 z\hat{j} + 4xyz\hat{k}$$

تفاضلة دالة اتجاهية: تعرف تفاضلة الدالة الاتجاهية $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z, t)$ بالعلاقة الآتية:

$$d\vec{F} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} dz + \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} dt \qquad (١)$$

وبقسمة الطرفين على dt نحصل على:

$$\frac{d\vec{F}}{dt} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial t}\frac{dt}{dt}$$

$$= \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial z}\dot{z} \qquad (٢)$$

حيث: $\dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad , \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} \quad , \quad \dot{z} = \frac{dz}{dt}$

العلاقة (٢) هي علاقة بين التفاضل الكلي للدالة $\vec{F}$ بالنسبة إلى t $\left(\frac{d\vec{F}}{dt}\right)$ والتفاضل الجزئي لها بالنسبة إلى t $\left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial t}\right)$.

المؤثر التفاضلي نابلا $\left(\vec{\nabla}\right)$: هو مؤثر يعرف بالعلاقة الآتية:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)k \qquad (١)$$

ومركباته هي المشتقات الجزئية بالنسبة إلى x, y, z أي أن:

$$\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

تأثير $\vec{\nabla}$ على دالة قياسية $\phi=\phi(x,y,z)$: إذا أثرت $\vec{\nabla}$ علـــى الدالـــة القياســـية $\phi=\phi(x,y,z)$ فإن :

$$\vec{\nabla}\phi=\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}$$

والناتج هو كمية متجهة مركباتها:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

وتعرف هذه الكمية بتدرج أو انحدار ϕ $(\text{gradient of } \phi)$ ويرمز لها اختـــصاراً بالرمز $\text{grad } \phi$

$$\therefore grad\phi=\vec{\nabla}\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k}$$

<u>مثال (١):</u> أوجد تدرج الدالـــة القياســـية $\phi(x,y,z)=x^2yz+4xz^2$ عنـــد النقطـــة $p(1,-2,-1)$.

<u>الحل:</u> من تعريف التدرج:

$$grad\phi=\overline{\nabla}\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k}$$

$$=\left(2xyz+4z^2\right)\hat{i}+\left(x^2z+0\right)\hat{j}+\left(x^2y+8xz\right)\hat{k}$$

$$=\left(2xyz+4z^2\right)\hat{i}+x^2z\hat{j}+\left(x^2y+8xz\right)\hat{k} \qquad (١)$$

وهو كمية متجهة.

<u>عند النقطة (١,−٢,−١):</u> نعوض عن $x=1$ ، $y=-2$ ، $z=-1$ في (١) فنحصل على :

$$(grad\phi)=8\hat{i}-\hat{j}-10\hat{k}$$

وهو المطلوب.

<u>مثال (٢):</u> أثبت أن:

$grad\left(\frac{1}{r}\right)=\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\vec{r}}{r^3}$ حيث $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ، $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$.

<u>الحل:</u>

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)=\vec{\nabla}\left(\frac{1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right)=\vec{\nabla}\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$$=\hat{i}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}+\hat{j}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}+\hat{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\hat{i}\left[-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot(2x)\right]+\hat{j}\left[-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot(2y)\right]+$$

$$\hat{k}\left[-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot(2z)\right]$$

$$=\hat{i}\left[-x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right]+\hat{j}\left[-y\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right]+\hat{k}\left[-z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right]$$

$$=-(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\left[x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}\right]=-\frac{x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}}=-\frac{\vec{r}}{r^3}$$

وهو المطلوب.

<u>مسألة:</u> أثبت أن: $grad(\ln r)=\vec{\nabla}(\ln r)=\frac{\vec{r}}{r^2}$ حيث:

$r=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ، $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$

<u>تباعد دالة اتجاهية (divergence):</u> إذا كان لدينا دالة اتجاهية $\vec{A}$ فان الكمية $(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})$ الناتجة عن تأثير المؤثر $\vec{\nabla}$ قياسيا على $\vec{A}$ تسمى تباعد $\vec{A}$ ، وهي دالة قياسية وتعرف اختصاراً كالآتي: $div\vec{A}=\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$

<u>تعريف</u>: يعرف $div\vec{A}$ (تباعد $\vec{A}$) بالعلاقة الآتية:

$$\vec{A} \text{ تباعد } = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = div\vec{A} = \frac{\partial Ax}{\partial x} + \frac{\partial Ay}{\partial y} + \frac{\partial Az}{\partial z} \qquad (١)$$

حيث : $\vec{A} = Ax\hat{i} + Ay\hat{j} + Az\hat{k}$

<u>مثال (١):</u> إذا كانت $\vec{A} = x^2 z\hat{i} - 2y^3 z^2\hat{j} + xy^2 z\hat{k}$ فأوجد $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ (تباعد $\vec{A}$).

<u>الحل:</u> بتطبيق القانون (١) نحصل على:

$$div\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial(x^2 z)}{\partial x} + \frac{\partial(-2y^3 z^2)}{\partial y} + \frac{\partial(xy^2 z)}{\partial z}$$

$$= 2xz - 2(3y^2)z^2 + xy^2(1) = 2xz - 6y^2 z^2 + xy^2$$

وهو المطلوب.

<u>مثال (٢):</u> أثبت أن: $div(\frac{\vec{r}}{r^3}) = \vec{\nabla}\cdot(\frac{\vec{r}}{r^3}) = 0$

<u>الحل:</u> حيث أن:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}, \quad r = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \left(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

ومن تعريف التباعد فإن :

$$div\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[x\cdot\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[y\cdot\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left[z\cdot\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right]$$

$$= x\cdot(-\frac{3}{2})\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot(2x) + \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot(1)$$

$$+ y\cdot(-\frac{3}{2})\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot(2y) + \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot(1)$$

$$+ z\cdot(-\frac{3}{2})\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot(2z) + \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot(1)$$

$$=-3x^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$
$$-3y^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$
$$-3z^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$
$$=-3\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}+3\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$
$$=-3\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}+3\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}=0$$
$$\therefore div\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)=0$$

وهو المطلوب.

التفاف دالة اتجاهية: إذا كان لدينا دالة اتجاهية $\vec{A}$ فإن الكمية $\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)$ الناتجة عن تأثير المؤثر $\vec{\nabla}$ اتجاهيا على $\vec{A}$ تسمى إلتفاف $\vec{A}$ وهي دالة اتجاهية وتعرف اختصارا كالآتي:

$$curl\vec{A}=\vec{\nabla}\wedge\vec{A}$$

وأحيانا تسمى دوران (rot $\vec{A}$)

$$\therefore rot\vec{A}=\vec{\nabla}\wedge\vec{A}$$

تعريف: تعرف $\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)$ بالعلاقة الآتية:

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{A}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ Ax & Ay & Az\end{vmatrix}$$

حيث:

$$\vec{A}\equiv\left(Ax,Ay,Az\right),\quad \vec{\nabla}\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

وبفك المحدد نحصل على:

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{A}=\hat{i}\left(\frac{\partial Az}{\partial y}-\frac{\partial Ay}{\partial z}\right)-\hat{j}\left(\frac{\partial Az}{\partial x}-\frac{\partial Ax}{\partial z}\right)+\hat{k}\left(\frac{\partial Ay}{\partial x}-\frac{\partial Ax}{\partial y}\right)$$

مثال: إذا كانت $\vec{A} = xz^3\hat{i} - 2x^2yz\hat{j} + 2yz^4\hat{k}$ فأوجد التفاف $\vec{A}$ $(curl\vec{A})$.

الحل: بتطبيق القانون:

$$\bar{\nabla} \wedge \vec{A} = curl\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz^3 & -2x^2yz & 2yz^4 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(2yz^4\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(-2x^2yz\right)\right] - \hat{j}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(2yz^4\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(xz^3\right)\right]$$

$$+ \hat{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-2x^2yz\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(xz^3\right)\right]$$

$$= \hat{i}\left[2z^4 + 2x^2y\right] - \hat{j}\left[0 - 3xz^2\right] + \hat{k}\left[-4xyz - 0\right]$$

$$= \hat{i}\left(2z^4 + 2x^2y\right) + \hat{j}\left(3xz^2\right) - \hat{k}\left(4xyz\right)$$

وهو المطلوب.

مسائل:

(١) إذا كانت $\phi = 2xz^4 - x^2y$ فأوجد $grad\phi$.

(٢) إذا كانت $\vec{A} = x^2yz\hat{i} + xyz\hat{j} - xyz^2\hat{k}$ فأوجد $curl\vec{A}$، $div\vec{A}$.

(٣) إذا كانت $\bar{F} = (x + 2y + 4z)\hat{i} + (2x - 3y - z)\hat{j} + (4x - y + 2z)\hat{k}$ تمثل دالة اتجاهية، فاثبت أن $div\bar{F} = 0$.

المجال اللولبي (أو الحلزوني) والمجال اللادوراني:

ملحوظة:

(١) أي مجال (كهربي، مغنطيسي، .....) تصفه دالة اتجاهية، فالمجال الكهربي مثلاً تصفه الدالة $\bar{E}$ (شدة المجال الكهربي)، والمجال المغنطيسي تصفه الدالة $\vec{H}$ (شدة المجال المغنطيسي).

(٢) أي مجال تمثله مجموعة من الخطوط المتوازية تسمى خطوط المجال وهي نوعان:

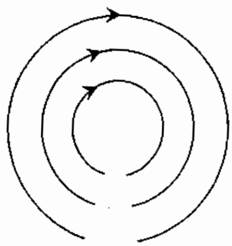
(أ) خطوط متباعدة ويمثلها مجال متباعد $\left[div\vec{A} \neq 0\right]$، ومثال له المجال الكهربي.

(ب) مجال غير متباعد ويمثلها مجال غير متباعد (لولبي) $\left[div\vec{A} = 0\right]$، ومثال له المجال المغنطيسي فبالنسبة للمجال المغنطيسي فإن:

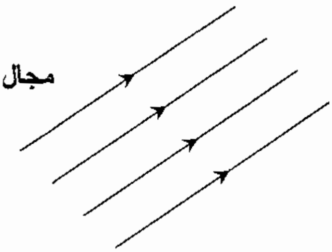
$$div\vec{H} = 0$$

بينما بالنسبة للمجال الكهربي فإن: $div\vec{E} \neq 0 \rightarrow div\vec{E} = \rho$

حيث ρ هي كثافة الشحنة الكهربائية.



مجال غير متباعد (لولبي)



مجال متباعد

(٣) المجالات أيضاً نوعان:

(أ) مجال تباعده منعدم [ليس له تباعد] أي أن $div\vec{A} = 0$ ويسمى مجال لولبي أو حلزوني (Solenoidal).

(ب) مجال إلتفافه (أو دورانه) منعدم (أي ليس له دوران أو التفـــاف) أي أن $curl\vec{A} = 0$ ويسمى مجال لا دوراني (Irrotational).

<u>**مثال:**</u> أوجد الثابت a الذي يجعل المجال الذي تمثله الدالة الاتجاهية الآتية:

$$\vec{A} = (x+3y)\hat{i} + (y-2z)\hat{j} + (x+az)\hat{k}$$

مجالا لولبيا.

<u>**الحل:**</u> شرط أن يكون المجال $\vec{A}$ لولبيا هو: $div\vec{A} = 0$

$$\therefore \frac{\partial Ax}{\partial x} + \frac{\partial Ay}{\partial y} + \frac{\partial Az}{\partial z} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial(x+3z)}{\partial x} + \frac{\partial(y-2z)}{\partial y} + \frac{\partial(x+az)}{\partial z} = 0$$

$$\therefore 1+1+a=0 \rightarrow \therefore 2+a=0 \rightarrow \therefore a=-2$$

وهو المطلوب.

<u>علاقات هامة للمؤثر $\vec{\nabla}$</u>: هناك أربع علاقات هامة للمؤثر $\vec{\nabla}$ تعرف بالتطبيقات المتتالية للمؤثر $\vec{\nabla}$، وهذه العلاقات هي:

$$(١)\ \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\phi\right)=\nabla^2\phi$$

ويمكن كتابتها بالصورة: $div\ grad\phi=\nabla^2\phi$

<u>الإثبات:</u>

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi=\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\right)\phi=\nabla^2\phi$$

حيث :

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)=\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}$$

وتعرف بمؤثر لابلاس.

$$(٢)\ \vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}\phi\right)=0$$

ويمكن كتابتها بالصورة : $curl\ grad\phi=0$

<u>الإثبات:</u> وذلك لأن

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}\phi=\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}\right)\phi=0\quad\rightarrow\quad\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}=0$$

$$(٣)\ \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)=0$$

ويمكن كتابتها بالصورة : $div\ curl\vec{A}=0$

<u>الإثبات:</u>

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\Ax&Ay&Az\end{vmatrix}=0$$

وذلك حيث أن:

$$\vec{A}\cdot\left(\vec{A}\wedge\vec{C}\right)=\begin{vmatrix} Ax & Ay & Az \\ Ax & Ay & Az \\ Cx & Cy & Cz \end{vmatrix}=0$$

$$(4)\ \vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}$$

ويمكن كتابتها بالصورة: $curl\ curl\vec{A}=grad\ div\vec{A}-\nabla^2\vec{A}$

<u>**الإثبات:**</u> من قانون حاصل الضرب الاتجاهي:

$$\vec{A}\wedge\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)=\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B}-\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}=\vec{B}\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)-\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}$$

$$\therefore\ \vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)-\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A}=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}=grad\ div\ \vec{A}-\nabla^2\vec{A}$$

<u>**ملخص للعلاقات الهامة للمؤثر $\vec{\nabla}$:**</u>

1) $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi=div\ grad\phi=\nabla^2\phi$

2) $\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}\phi=curl\ grad\phi=0$

3) $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)=div\ curl\vec{A}=0$

4) $\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)=curl\ curl\vec{A}=grad\ div\vec{A}-\nabla^2\vec{A}$

<u>**ملاحظات:**</u>

1) مؤثر لابلاس (∇^2) يكون لدالة قياسية $(\nabla^2\phi)$ أو لدالة اتجاهية $(\nabla^2\vec{A})$.

2) المعادلة $\nabla^2\phi=0$ تسمى معادلة لابلاس بينما المعادلة $\nabla^2\phi\neq0$ أو $\nabla^2\phi=k$ لا تسمى معادلة لابلاس، ويعتمد أسمها على قيمة k وبذلك نحصل على معادلات مثل: معادلة بواسون، معادلة هلمهولتز، .... إلخ.

أمثلة محلولة

مثال (1): مثال تطبيقي [يتكون من 4 أجزاء]

الجزء (أ): إذا كان $\vec{E}$ يمثل المجال الكهروستاتيكي ويحقق العلاقة $curl\vec{E}=0$ فاثبت أن $\vec{E}$ يمكن كتابتها بدلالة دالة قياسية ϕ تسمى بالجهد الكهروستاتيكي بالعلاقة الآتية: $\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi$.

الحل: حيث أن:

$$curl\vec{E}=0 \quad \text{(من رأس المثال)} \tag{1}$$

ومن العلاقة (2):

$$curl(grad\phi)=0 \tag{2}$$

حيث ϕ دالة قياسية، والتي يمكن كتابتها بالصورة الآتية أيضاً:

$$curl(-grad\phi)=0 \tag{3}$$

بمقارنة (3)، (1) نجد أن:

$$\vec{E}=-grad\phi=-\vec{\nabla}\phi \tag{4}$$

وهو المطلوب.

ملحوظة: حيث أن

$$grad\phi=\vec{\nabla}\phi=\hat{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$\vec{E}=\hat{i}E_x+\hat{j}E_y+\hat{k}E_z$$

بالتعويض في (4):

$$\hat{i}E_x+\hat{j}E_y+\hat{k}E_z=-\hat{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}-\hat{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}-\hat{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

ومنها:

$$E_x=-\frac{\partial\phi}{\partial x},\ E_y=-\frac{\partial\phi}{\partial y},\ E_z=-\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$\therefore$ شدة المجال = − تفاضل الجهد بالنسبة للمسافة

<u>الجزء (ب):</u> إذا كان المجال الكهروستاتيكي $\vec{E}$ في الفراغ (في غياب الشحنات الكهربية) يحقق العلاقة $div\vec{E}=0$ فاثبت أن $\vec{E}$ تحقق معادلة لابلاس أي $\nabla^2\vec{E}=0$.

<u>الحل:</u> حيث أن

(١) $$div\vec{E}=0$$

أيضاً فإن:

(٢) $$curl\vec{E}=0$$

ومن العلاقة (٤) في علاقات المؤثر $\vec{\nabla}$:

(٣) $$curl\ curl\vec{E}=grad\ div\vec{E}-\nabla^2\vec{E}$$

فبالتعويض من (٢)، (١) في (٣) نحصل على:

$$\nabla^2\vec{E}=grad\ div\vec{E}-curl\ curl\vec{E}=0-0=0$$

وهو المطلوب.

<u>الجزء (ج):</u> إذا كان $\vec{H}$ يمثل المجال المغنطيسي الناتج عن مرور التيار الكهربي $\vec{J}$ في سلك ويرتبط الاثنان بالعلاقة $curl\vec{H}=\vec{J}$ فاثبت أن $\vec{J}$ يمثل متجها لولبيا.

<u>الحل:</u> حيث أن:

$$curl\vec{H}=\vec{J}$$

(١)

بأخذ div الطرفين:

(٢) $$div\ curl\vec{H}=div\vec{J}$$

ولكن من العلاقة (٣) [في علاقات المؤثر $\vec{\nabla}$]:

(٣) $$div\ curl\vec{H}=0$$

من (٣)، (٢) نحصل على :

$div\vec{J}=0$ (٤)

ومن تعريف المتجه اللولبي: $div\vec{A}=0$ نجد أن : $\vec{J}$ يمثل متجهــا لولبيــا وهــو المطلوب.

الجزء (د): إذا كان المجال المغنطيسي $\vec{H}$ يعرف بالعلاقة: $div\vec{H}=0$ فاثبــت أن هناك جهدا اتجاهياً (مغنطيسيا) $\vec{A}$ يرتبط بالمجال $\vec{H}$ بالعلاقة: $\vec{H}=curl\vec{A}$

الحل: حيث أن:

$div\vec{H}=0$ (١)

ومن العلاقة (٣) [في علاقات المؤثر $\vec{\nabla}$]:

$div\ curl\vec{A}=0$ (٢)

بمقارنة (٢)، (١) نجد أن: $\vec{H}=curl\vec{A}$

حيث $\vec{A}$ متجه يعرف بالجهد الاتجاهي (المغنطيسي) وهو المطلوب.

ملحوظة: هناك جهدان في الكهربية والمغنطيسية:

(١) قياسي ϕ ويرتبط بالمجال الكهربي بالعلاقة $\vec{E}=-grad\phi$.

(٢) اتجاهي $\vec{A}$ ويرتبط بالمجال المغنطيسي بالعلاقة $\vec{H}=curl\vec{A}$

مثال (٢): إذا كان المتجهان $\vec{A},\vec{B}$ لا دورانيــان فاثبــت أن حاصــل ضــربهما الاتجاهي $(\vec{A}\wedge\vec{B})$ يكون متجها لولبيا.

الحل: حيث أن $\vec{A},\vec{B}$ متجهان لا دورانيان فإن:

$curl\vec{A}=0\ ,\ curl\vec{B}=0$ (١)

ولإثبات أن حاصل ضربهما الاتجاهي $(\vec{A}\wedge\vec{B})$ يكون لولبيا يجب أن نثبت العلاقة:

$div(\vec{A}\wedge\vec{B})=0$

فمن العلاقة الاتجاهية:

$div(\vec{A}\wedge\vec{B})=\vec{B}\cdot curl\vec{A}-\vec{A}\cdot curl\vec{B}$ [وهي علاقة يمكن إثباتها بسهولة]

وبالتعويض من (١) نجد أن: $div(\vec{A}\wedge\vec{B})=0$ وهو المطلوب.

مثال (٣): أثبت أن الدالة $\phi = \frac{1}{r}$ تحقق معادلة لابلاس أي أن $\nabla^2\phi = 0$

الحل: المطلوب إثبات أن:

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = 0 \quad \text{حيث:} \quad r = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

إذن المطلوب هو إثبات أن:

$$\nabla^2\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right] = 0$$

$$\therefore \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right] = 0$$

ولإيجاد $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$:

نوجد أولا: $\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$ ثم نوجد $\frac{\partial}{\partial x}$ للناتج وذلك لأن:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot(2x) = -x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\therefore \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}} = -\left[x\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot(2x)+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot(1)\right]$$

$$= 3x^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}} - \left(x^2+y^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}} \qquad (١)$$

وبالمثل فإن:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 3y^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}} - \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} \qquad (٢)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 3z^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}} - \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} \qquad (٣)$$

بجمع (٣)، (٢)، (١) نحصل على:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 3\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}} - 3\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= 3\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} - 3\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} = 0$$

$$\therefore \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

وهو المطلوب.

__مثال (٤):__ إذا كانت: $\vec{A} = y\hat{i} + z\hat{j} + x\hat{k},\ \vec{B} = x^2 z\hat{i} + y^2 x\hat{j} + z^2 y\hat{k}$

دالتان انجاهيتان، فاوجد: $\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}\right) \equiv curl\vec{A}\wedge curl\vec{B}$

__الحل:__ المطلوب هو حاصل الضرب للمتجهين $curl\vec{A}, curl\vec{B}$

$$curl\vec{A} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = \hat{i}\left(\frac{\partial x}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial z}\right) - \hat{j}\left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial z}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y}\right)$$

وحيث أن x, y, z إحداثيات مستقلة (أي لا تعتمد على بعضها) فإن:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0\,,\quad \frac{\partial y}{\partial z} = 0\,,\quad \frac{\partial x}{\partial y} = 0$$

$$\therefore curl\vec{A} = \hat{i}(0-1) - \hat{j}(1-0) + \hat{k}(0-1) = -\hat{i} - \hat{j} - \hat{k} \qquad (١)$$

بالمثل فإن:

$$curl\vec{B} = \vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 y & y^2 x & z^2 y \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left[\frac{\partial x}{\partial y}\left(z^2 y\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(y^2 x\right)\right] - \hat{j}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(z^2 y\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(x^2 z\right)\right] + \hat{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(y^2 x\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 z\right)\right]$$

$$= \hat{i}\left[z^2 - 0\right] - \hat{j}\left[0 - x^2\right] + \hat{k}\left[y^2 - 0\right] = z^2\hat{i} + x^2\hat{j} + y^2\hat{k} \qquad (٢)$$

بضرب (١) في (٢) إتجاهيا نحصل على:

$$\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}\right) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & -1 & -1 \\ z^2 & x^2 & y^2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left[-y^2+x^2\right]-\hat{j}\left[-y^2+z^2\right]+\hat{k}\left[-x^2+z^2\right]$$
$$= \left(x^2-y^2\right)\hat{i}+\left(y^2-z^2\right)\hat{j}+\left(z^2-x^2\right)\hat{k}$$

وهو المطلوب.

مثال (٥): أثبت العلاقتين الاتجاهيتين الآتيتين:

(١) $div\left(\phi\vec{A}\right)=\phi div\vec{A}+\vec{A}\cdot\left(grad\phi\right)$

(٢) $curl\left(\phi\vec{A}\right)=\phi curl\vec{A}-\vec{A}\wedge grad\phi$

الحل: أولاً:

$$div\left(\phi\vec{A}\right)=\vec{\nabla}\cdot\left(\phi\vec{A}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\phi A_x\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\phi A_y\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\phi A_z\right)$$
$$=\left[\phi\frac{\partial A_x}{\partial x}+A_x\frac{\partial \phi}{\partial x}\right]+\left[\phi\frac{\partial A_y}{\partial y}+A_y\frac{\partial \phi}{\partial y}\right]+\left[\phi\frac{\partial A_z}{\partial z}+A_z\frac{\partial \phi}{\partial z}\right]$$
$$=\phi\left[\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right]+\left[A_x\frac{\partial \phi}{\partial x}+A_y\frac{\partial \phi}{\partial y}+A_z\frac{\partial \phi}{\partial z}\right] \qquad (١)$$

ولكن:

$$\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=\vec{\nabla}\cdot\vec{A} \qquad (٢)$$

أيضا إذا كان: $grad\phi=\vec{\nabla}\phi=\frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial \phi}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial \phi}{\partial z}\hat{k}\ ,\ \vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$

$$\therefore\ \vec{A}\cdot grad\phi=\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\phi=A_x\frac{\partial \phi}{\partial x}+A_y\frac{\partial \phi}{\partial y}+A_z\frac{\partial \phi}{\partial z} \qquad (٣)$$

بالتعويض من (٣)، (٢) في (١) نحصل على:

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\phi\vec{\nabla}\right)=\phi\left(\vec{\nabla}\cdot A\right)+\vec{A}\cdot grad\phi$$

وهو المطلوب أولاً.

ثانياً:

$$curl\left(\phi\vec{A}\right)=\vec{\nabla}\wedge\left(\phi\vec{A}\right)=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \phi A_x & \phi A_y & \phi A_z\end{vmatrix}$$

$$= i\left[\frac{\partial}{\partial y}(\phi A_z) - \frac{\partial}{\partial z}(\phi A_y)\right] + \hat{j}\left[\frac{\partial}{\partial z}(\phi A_x) - \frac{\partial}{\partial x}(\phi A_z)\right] + \hat{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\phi A_y) - \frac{\partial}{\partial y}(\phi A_x)\right]$$

$$= \hat{i}\left[\phi\frac{\partial A_z}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial y}A_z - \phi\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial z}A_y\right] + \hat{j}\left[\phi\frac{\partial A_x}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial z}A_x - \phi\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x}A_z\right]$$

$$+ \hat{k}\left[\phi\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x}A_y - \phi\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y}A_x\right]$$

$$= \phi\left[\hat{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\right] + \hat{i}\left[\frac{\partial \phi}{\partial y}A_z - \frac{\partial \phi}{\partial z}A_y\right]$$

$$+ \hat{j}\left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}A_x - \frac{\partial \phi}{\partial x}A_z\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}A_y - \frac{\partial \phi}{\partial y}A_x\right)\right] \qquad (١)$$

ولكن:

$$curl\overline{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \qquad (2)$$

أيضاً:

$$(\overline{\nabla}\phi) \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \hat{i}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}A_z - \frac{\partial \phi}{\partial z}A_y\right) + j\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}A_x - \frac{\partial \phi}{\partial x}A_z\right)$$

$$+ \hat{k}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}A_y - \frac{\partial \phi}{\partial y}A_x\right) \qquad (٣)$$

بالتعويض من (٣)، (٢) في (١) ينتج أن:

$$curl(\phi\overline{A}) = \phi curl\overline{A} + (\overline{\nabla}\phi) \wedge \overline{A} = \phi curl\overline{A} - \overline{A} \wedge grad\phi$$

حيث $\left[\overline{\nabla}\phi \wedge \overline{A} = -\overline{A} \wedge \overline{\nabla}\phi\right]$

$$\therefore curl(\phi\bar{A}) = \phi curl\bar{A} - \bar{A} \wedge grad\phi$$

وهو المطلوب ثانياً.

<u>مسألة :</u> أثبت العلاقة الاتجاهية الآتية:

$$div(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot curl\,\vec{A} - \vec{A} \cdot curl\,\vec{B}$$

<u>مثال (٦):</u> أثبت العلاقتين الآتيتين:

i. $\bar{\nabla} \cdot (\phi\bar{\nabla}\psi - \psi\bar{\nabla}\phi) = \phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi$

وتعرف بمتطابقة جرين الأولى.

ii. $\nabla^2(\phi\psi) = \phi\nabla^2\psi + \psi\nabla^2\phi + 2(\bar{\nabla}\phi)\cdot(\bar{\nabla}\psi)$

وتعرف بمتطابقة جرين الثانية. حيث ϕ,ψ دالتان قياسيتان.

<u>الإثبات</u>: <u>العلاقة الأولى</u>: باستخدام العلاقة الاتجاهية [مثال ٥]:

$$div(\phi\vec{A}) = \phi div\vec{A} + \vec{A} \cdot grad\phi$$
$$\vec{\nabla} \cdot (\phi\vec{A}) = \phi(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot (\vec{\nabla}\phi)$$

وبأخذ $\phi = \phi, \quad \vec{A} = \vec{\nabla}\psi$

$$\therefore \vec{\nabla} \cdot (\phi\vec{\nabla}\psi) = \phi(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\psi) + (\vec{\nabla}\psi)\cdot(\vec{\nabla}\phi)$$
$$= \phi\nabla^2\psi + (\vec{\nabla}\psi)\cdot(\vec{\nabla}\phi) \qquad (١)$$

وبتغيير وضعي ϕ,ψ نحصل على:

$$\vec{\nabla} \cdot (\psi\vec{\nabla}\phi) = \psi\nabla^2\phi + (\vec{\nabla}\phi)\cdot(\vec{\nabla}\psi) \qquad (٢)$$

من (١)، (٢) بالطرح:

$$\vec{\nabla} \cdot (\phi\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\phi) = \phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi$$

وهي متطابقة جرين الأولى.

<u>ثانياً:</u>

$$\nabla^2(\phi\psi) = \vec{\nabla} \cdot [\vec{\nabla}(\phi\psi)] \qquad (٣)$$

وحيث أن:

$$\vec{\nabla}(\phi\psi) = \phi\vec{\nabla}\psi + \psi\vec{\nabla}\phi$$

$$\therefore \nabla^2(\phi\psi) = \vec{\nabla}\cdot\left[\phi\vec{\nabla}\psi + \psi\vec{\nabla}\phi\right] = \vec{\nabla}\cdot\left(\phi\vec{\nabla}\psi\right) + \vec{\nabla}\cdot\left(\psi\vec{\nabla}\phi\right) \qquad (٤)$$

وباستخدام العلاقة الاتجاهية $\vec{\nabla}\cdot\left(\phi\vec{A}\right) = \phi\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) + \vec{A}\cdot\left(\vec{\nabla}\phi\right)$ ووضع $\vec{A} = \vec{\nabla}\psi . \vec{\nabla}\phi$

والتعويض في (٤) نحصل على الآتي:

$$\therefore \nabla^2(\phi\psi) = \phi\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\psi + \left(\vec{\nabla}\psi\right)\cdot\left(\vec{\nabla}\phi\right) + \psi\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi + \left(\vec{\nabla}\phi\right)\cdot\left(\vec{\nabla}\psi\right)$$
$$= \phi\nabla^2\psi + \psi\nabla^2\phi + 2\left(\vec{\nabla}\phi\right)\cdot\left(\vec{\nabla}\psi\right)$$

وهي متطابقة جرين الثانية وهو المطلوب.

<u>المجالات المحافظة:</u>

<u>تعريف:</u> حيث أن أي مجال تصفه دالة اتجاهية $\vec{F}$. فيقال أن المجال $\vec{F}$ هو مجال محافظ إذا وجدت دالة قياسية ϕ بحيث أن: $\vec{F} = grad\phi$ أو $\vec{F} = -grad\phi$.

<u>مثال:</u> المجال الكهروستاتيكي $\vec{E}$ هو مجال محافظ لأنه توجد بينه وبين الجهد الكهروستاتيكي القياسي ϕ العلاقة: $\vec{E} = -grad\phi$.

<u>نظرية:</u> للمجالات المحافظة $\vec{F}$ فإن $curl\vec{F} = 0$

<u>الإثبات:</u> من تعريف المجال المحافظ: أنه توجد دالة قياسية ϕ بحيث أن:

$$\vec{F} = grad\phi = \vec{\nabla}\phi$$

بأخذ $curl$ للطرفين: $\therefore curl\vec{F} = curl\ grad\phi$

ولكن مما سبق فإن $curl\ grd\phi = 0$ وبذلك نحصل على: $curl\ \vec{F} = 0$

<u>مثال:</u> أثبت أن المجال الذي تصفه الدالة : $\vec{F} = \left(2xy + z^3\right)\hat{i} + x^2\hat{j} + 3xz^2\hat{k}$ يمثل مجالاً محافظاً.

<u>الحل:</u> لكي يكون المجال $\vec{F}$ محافظاً يجب أن تكون: $curl\ \vec{F} = 0$

$$curl\vec{F} = \vec{\nabla}\wedge\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + z^3 & x^2 & 3xz^2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(3xz^2\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(x^2\right)\right]-\hat{j}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(3xz^2\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(2xy+z^3\right)\right]$$

$$+\hat{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(2xy+z^3\right)\right]$$

$$= \hat{i}\,[0-0]-\hat{j}\left[3z^2-\left(0+3z^2\right)\right]+\hat{k}[2x-(2x+0)]$$

$$= \hat{i}(0)-\hat{j}(0)+\hat{k}(0)=0$$

$\therefore\ \vec{F}$ يمثل مجالاً محافظاً. وهو المطلوب.

مسائل:

١) إذا كانت $\phi = 2x^3y^2z^2$ فأوجد $\nabla^2\phi$، وهل تحقق معادلة لابلاس أم لا.

٢) إذا كانت $\vec{A} = x^2y\hat{i} - 2xz\hat{j} + 2yz\hat{k}$ فأوجد $\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)$.

٣) أثبت أن $\nabla^2[\ln(r)] = \frac{1}{r^2}$.

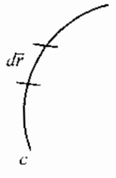
٤) إذا كان $\vec{A} = \vec{\nabla}\phi$ حيث $\phi = x^3yz^2$ فأوجد $\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right), \left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)$.

٥) إذا كان $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ متجها لا دورانياً، وكانت $\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ فاثبت أن المتجه $\left(\vec{A}\wedge\vec{r}\right)$ هو متجه لولبي أي أن: $div\left(\vec{A}\wedge\vec{r}\right) = 0$

تكامل الدوال الاتجاهية: هناك ٣ أنواع من التكاملات للدوال الاتجاهية هي:

(١) تكامل خطي، (٢) تكامل سطحي، (٣) تكامل حجمي

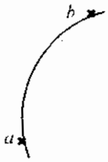
أولاً: التكامل الخطي: إذا كانت $\bar{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$ دالة اتجاهية، وكان: $d\bar{r} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$ يمثل منحنى معين C فإن التكامل الخطي للدالة $\bar{F}$ هو:



$$C = \int_C \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_C \left[F_x dx + F_y dy + F_z dz\right] \qquad (١)$$

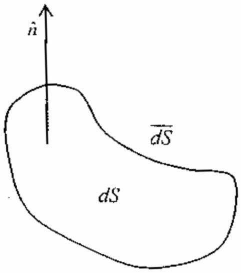
ويعرف التكامل في (١) أحياناً بتدوير $\bar{F}$ (Circulation of $\bar{F}$).

ملحوظة: إذا كانت $\bar{F}$ تمثل قوة تؤثر على جسم ما فإن $\int_a^b \bar{F}\cdot d\bar{r}$ يمثل الشغل المبذول بواسطة القوة $\bar{F}$ في تحريك الجسم بين النقطتين a,b، أي أن



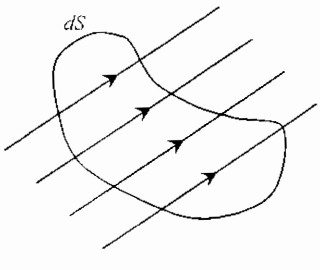
$$W = \int_a^b \bar{F}\cdot d\bar{r}$$

ثانياً التكامل السطحي: إذا كانت $\overrightarrow{dS}$ تمثل متجه المساحة حيث $\overrightarrow{dS} = dS\hat{n}$ فإن التكامل السطحي للدالة $\bar{F}$ هو:



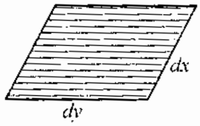
$$\Phi = \iint \bar{F}\cdot\overrightarrow{dS} = \iint \bar{F}\cdot\hat{n}dS \qquad (٢)$$

تسمى Φ بفيض المجال $\bar{F}$ (flux of $\bar{F}$)، $\hat{n}$ هو متجه الوحدة العمودي على المساحة dS إلى الخارج.



ملحوظة (١): يعبر التكامل السطحي $\iint \bar{F}\cdot\overrightarrow{dS}$ عن عدد خطوط القوى للمجال $\bar{F}$ التي تعبر أو تنساب خلال السطح dS، ولذلك يعرف $\iint \bar{F}\cdot\overrightarrow{dS}$ بفيض المجال $\bar{F}$.

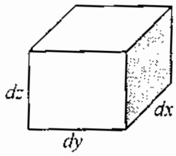
ملحوظة (٢): إذا كانت $dS = dxdy$ فإن $\iint \bar{F}\cdot\hat{n}dS = \iint(\bar{F}\cdot\hat{n})dxdy$ يسمى بالتكامل الثنائي [بالنسبة للمتغيرين x, y].



ثالثاً: التكامل الحجمي: يعرف بالعلاقة:

$I = \iiint \bar{F}dV$ حيث $dV = dxdydz \leftarrow \therefore I = \iiint \bar{F}dxdydz$

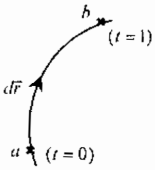
يسمى بالتكامل الثلاثي {بالنسبة للمتغيرات الثلاثة x, y, z}.



أمثلة محلولة:

مثال(١): إذا كانت: $\bar{F} = xy\hat{i} - z\hat{j} + x^2\hat{k}$ تمثل قوة معينة تؤثر على جسم ما، فاوجد الشغل المبذول بواسطة هذه القوة في تحريك جسم على المنحنى c الذي معادلته $\bar{r} = t^2\hat{i} + 2t\hat{j} + t^3\hat{k}$ بين النقطتين من $t = 0$ إلى $t = 1$

الحل: المطلوب هو:



$$W = \int_a^b \bar{F}\cdot d\bar{r} \qquad (١)$$

حيث أن:

$$\bar{r} = t^2\hat{j} + 2t\hat{j} + t^3\hat{k} \;,\quad d\bar{r} = (2tdt)\hat{i} + (2dt)\hat{j} + (3t^2dt)\hat{k} \qquad (٢)$$

أيضا نوجد $\bar{F}$ بدلالة t كالآتي:

حيث أن : $\bar{r} = t^2\hat{i} + 2t\hat{j} + t^3\hat{k}$ ومن الصورة العامة لـ $\bar{r}$: $\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$\therefore x = t^2, \quad y = 2t, \quad z = t^3$

وبالتعويض في علاقة $\bar{F}$ نحصل على العلاقة الآتية التي تمثل $\bar{F}$ بدلالة متغير واحد هو t:

$$\bar{F} = xy\hat{i} - z\hat{j} + x^2\hat{k}$$
$$= (t^2)(2t)\hat{i} - (t^3)\hat{j} + (t^2)^2\hat{k} = 2t^3\hat{i} - t^3\hat{j} + t^4\hat{k} \qquad (٣)$$

من (٢)، (٣) نحصل على :

$$\bar{F}\cdot d\bar{r} = (2t^3)(2tdt) + (-t^3)(2dt) + (t^4)(3t^2dt)$$
$$= 4t^4dt - 2t^3dt + 3t^6dt = (4t^4 - 2t^3 + 3t^6)dt \qquad (٤)$$

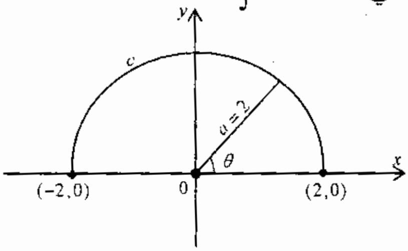
ويصبح الشغل المبذول:

$$W = \int_{t=0}^{t=1}\left(4t^4 - 2t^3 + 3t^6\right)dt = \left[4\frac{t^5}{5} - 2\frac{t^4}{4} + 3\frac{t^7}{7}\right]_0^1 = \frac{4}{5} - \frac{2}{4} + \frac{3}{7} = \frac{51}{70}$$

وهو المطلوب.

مثال (٢): إحسب التكامل الخطي للمجال الاتجاهي $\vec{F} = x^2\hat{i} + y\hat{j}$ على طول المنحنى c الذي هو عبارة عن النصف العلوي لدائرة نصف قطرها 2 ومركزها عند نقطة الأصل:

الحل: المطلوب هو التكامل الخطي : $\int \vec{F}\cdot d\vec{r}$



المعادلة الاتجاهية للمنحنى C هي: $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ حيث x, y يعطيان من المعادلات البارامتريه للمنحنى C، حيث $0 \le \theta \le \pi$; $y = 2\sin\theta, x = 2\cos\theta$ [المنحنى C هو النصف العلوي للدائرة]

$$\therefore \vec{r} = 2\cos\theta\,\hat{i} + 2\sin\theta\,\hat{j}$$

ومنها نوجد $d\vec{r}$:

$$d\vec{r} = \left(-2\sin\theta\,\hat{i} + 2\cos\theta\,\hat{j}\right)d\theta \qquad (١)$$

ثم نوجد $\vec{F}$ بدلالة البارامتر θ:

$$\vec{F} = x^2\hat{i} + y\hat{j} = (2\cos\theta)^2\hat{i} + (2\sin\theta)\hat{j} = 4\cos^2\theta\,\hat{i} + 2\sin\theta\,\hat{j} \qquad (٢)$$

ويصبح التكامل المطلوب:

$$\int_c \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{\pi}\left(4\cos^2\theta\,\hat{i} + 2\sin\theta\,\hat{j}\right)\cdot\left(-2\sin\theta\,\hat{i} + 2\cos\theta\,\hat{j}\right)d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\left[-8\cos^2\theta\sin\theta + 4\sin\theta\cos\theta\right]d\theta$$

$$= -8\int_0^{\pi}\cos^2\theta\, d(-\cos\theta) + 4\int_0^{\pi}\cos\theta\, d(-\cos\theta)$$

$$= 8\left[\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi} - 4\left[\frac{\cos^2\theta}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{-16}{3}$$

مثال(٣): احسب التكامل الخطي للمجال الاتجاهي الموصوف بالدالة:

$$\bar{F} = -3a\sin^2\theta\cos\theta\,\hat{i} + a\left(2\sin\theta - 3\sin^3\theta\right)\hat{j} + b\sin 2\theta\,\hat{k}$$

على طول المنحنى C الذي معادلاته البارامترية هي:

$$x = a\cos\theta\,,\quad y = a\sin\theta\,,\quad z = b\theta$$

حيث $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ ، a,b ثوابت.

الحل: المطلوب هو التكامل الخطي: $\int_c \bar{F}\cdot d\bar{r}$

لإيجاد $d\bar{r}$: المعادلة الاتجاهية للمنحنى C: $\quad \bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

حيث: x,y,z تعطى من المعادلات البارامترية للمنحنى:

$$\therefore \bar{r} = a\cos\theta\,\hat{i} + a\sin\theta\,\hat{j} + b\theta\,\hat{k} \qquad (١)$$

ومنها نوجد $d\bar{r}$:

$$d\bar{r} = \left(-a\sin\theta\,\hat{i} + a\cos\theta\,\hat{j} + b\hat{k}\right)d\theta \qquad (٢)$$

ويكون التكامل المطلوب هو:

$$I = \int_c \bar{F}\cdot d\bar{r}$$

$$= \int\left[-3a\sin^2\theta\cos\theta\,\hat{i} + a\left(2\sin\theta - 3\sin^3\theta\right)\hat{j} + b\sin 2\theta\,\hat{k}\right]\cdot \left[-a\sin\theta\,\hat{i} + a\cos\theta\,\hat{j} + b\hat{k}\right]d\theta$$

$$= \int\left[3a^2\sin^3\theta\cos\theta + a^2\left(2\sin\theta - 3\sin^3\theta\right)\cos\theta + b^2\sin 2\theta\right]d\theta$$

$$= \int\left[a^2\left(3\sin^3\theta\cos\theta + 2\sin\theta\cos\theta - 3\sin^3\theta\cos\theta + b^2\sin 2\theta\right)\right]d\theta$$

$$= \int\left[a^2\sin 2\theta + b^2\sin 2\theta\right]d\theta = \int\left(a^2+b^2\right)\sin 2\theta\,d\theta$$

$$= \left(a^2+b^2\right)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\,d\theta = \left(a^2+b^2\right)\left[-\frac{\cos 2\theta}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(a^2 + b^2\right)\left[\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)$$

وهو المطلوب.

نظريات التكامل الاتجاهية Vector Integral Theorems

هي نظريات تشتمل على العلاقات بين التكاملات الخطية والسطحية والحجمية للدوال الاتجاهية (التي تمثل مجالات).

وسوف ندرس منها نظريتان هما:

(١)نظرية التباعد لجاوس (Gauss divergence theorem):

تربط بين التكامل السطحي (الفيض) لدالة اتجاهية $\vec{F}$ والتكامل الحجمي لتباعد الدالة $(div\vec{F})$ وصورتها هي:

$$\iint \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint \left(div\vec{F}\right) dV \qquad \therefore \iint \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iiint \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) dV$$

(٢)نظرية الالتفاف لستوكس (Stocks curl Theorem):

تربط بين التكامل الخطي (التدوير) لدالة اتجاهية $\vec{F}$ والتكامل السطحي لالتفاف (أو دوران) الدالة $(curl\vec{F})$ وصورتها هي:

$$\int_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint \left(curl\vec{F}\right) \cdot dS \qquad \therefore \int_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{F}\right) \cdot d\vec{S}$$

ملخص:

نظرية جاوس: $\Phi = \iint \vec{F} \cdot dS = \iiint \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) dV$

نظرية ستوكس: $C = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{F}\right) \cdot \overline{dS}$

أمثلة محلولة:

مثـــال (١) : إذا كانت $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ هي متجه موضع أي نقطه على الـــسطح $\overline{dS}$ فأثبت أن: $\iint \vec{r} \cdot \overline{dS} = 3V$

حيث V هو الحجم المحدود بالسطح، وذلك بإستخدام نظرية جاوس.

الحل: من نظرية جاوس:

$$\iint \vec{F}\cdot\overrightarrow{dS} = \iiint (\vec{\nabla}\cdot\vec{F})dV$$

فبوضع $\vec{F}=\vec{r}$ نحصل على :

(١) $$\iint \vec{r}\cdot\overrightarrow{dS} = \iiint (\vec{\nabla}\cdot\vec{r})dV \quad .$$

ولكن:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot\left(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(x)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z)=1+1+1=3$$

بالتعويض في (١):

$$\iint \vec{r}\cdot\overrightarrow{dS} = \iiint (3)dV = 3\iiint dV = 3V \quad , \quad \iiint dV = V$$ حيث الحجم الكلي

وهو المطلوب.

مثال (٢): باستخدام نظرية التباعد لجاوس أثبت أن:

$$\iint_S (\phi\vec{A})\cdot\overrightarrow{dS} = \iiint_V \left[\phi(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})+\vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\phi)\right]dV$$

الحل: من نظرية التباعد لجاوس:

$$\iint_S \vec{F}\cdot\overrightarrow{dS} = \iiint_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{F})dV$$

فبأخذ $\vec{F}=\phi\vec{A}$ نحصل على:

(1) $$\iint_S (\phi\vec{A})\cdot\overrightarrow{dS} = \iiint_V \left[\vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{A})\right]dV$$

ومن قوانين المتجهات:

(٢) $$div(\phi\vec{A}) = \phi\, div\vec{A} + \vec{A}\cdot grad\phi \rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{A}) = \phi(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) + \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\phi)$$

بالتعويض من (٢) في (١) ينتج أن:

$$\iint_S (\phi\vec{A})\cdot\overrightarrow{dS} = \iiint_V \left[\phi(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})+\vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\phi)\right]dV$$

وهو المطلوب.

مثال (٣): باستخدام نظرية التباعد لجاوس أثبت أنه لأي سطح مغلق S فإن:

$$\iint_S (\vec{\nabla}\phi)\wedge(\vec{\nabla}\psi)\cdot\overrightarrow{dS}=0$$

حيث ϕ,ψ دالتان قياسيتان.

الحل:

من نظرية جاوس:

$$\iint_S \vec{F}\cdot\overrightarrow{dS}=\iiint_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{F})dV$$

بوضع $\vec{F}=(\vec{\nabla}\phi)\wedge(\vec{\nabla}\psi)$ نحصل على:

$$\therefore\ \iint_S (\vec{\nabla}\phi)\wedge(\vec{\nabla}\psi)\cdot\overrightarrow{dS}=\iiint_V [\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{\nabla}\psi)]dV \qquad (١)$$

ولكن من تعريف حاصل الضرب القياسي الثلاثي فإن:

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{\nabla}\psi)=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z}\\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial z}\end{vmatrix}\phi=0$$

$$\therefore\ \iint_S (\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{\nabla}\psi)\cdot\overrightarrow{dS}=0$$

وهو المطلوب.

مثال(٤): باستخدام نظرية جاوس، استنتج متطابقتا جرين الأولى والثانية وصورتهما:

$$\text{(i)}\quad \iiint_V [\phi\nabla^2\psi+(\vec{\nabla}\phi)\cdot(\vec{\nabla}\psi)]dV=\iint_S (\phi\vec{\nabla}\psi)\cdot\overrightarrow{dS}$$

$$\text{(ii)}\quad \iiint_V \left[\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi\right]dV = \iint_S \left[\phi\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\phi\right]\cdot\overrightarrow{dS}$$

الحل: من نظرية جاوس:

$$\iint_S \vec{F}\cdot\overrightarrow{dS} = \iiint_V \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)dV$$

بوضع $\vec{F} = \phi\vec{\nabla}\psi$ فإن:

$$\therefore \iint_S \left(\phi\vec{\nabla}\psi\right)\cdot\overrightarrow{dS} = \iiint_V \vec{\nabla}\cdot\left(\phi\vec{\nabla}\psi\right)dV \qquad (١)$$

ولكن باستخدام العلاقة $\vec{\nabla}\cdot\left(\phi\overline{A}\right) = \phi\left(\vec{\nabla}\cdot\overline{A}\right) + \overline{A}\cdot\vec{\nabla}\phi$:

$$\therefore \vec{\nabla}\cdot\left(\phi\vec{\nabla}\psi\right) = \phi\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\psi\right) + \left(\nabla\psi\right)\cdot\left(\vec{\nabla}\phi\right) = \phi\nabla^2\psi + \left(\vec{\nabla}\psi\right)\cdot\left(\vec{\nabla}\phi\right) \qquad (٢)$$

وبالتعويض من (٢) في (١):

$$\iint_S \left(\phi\vec{\nabla}\psi\right)\cdot\overrightarrow{dS} = \iiint_V \left[\phi\nabla^2\psi + \left(\vec{\nabla}\phi\right)\cdot\left(\vec{\nabla}\psi\right)\right]dV$$

وهي متطابقة جرين الأولى.

إثبات متطابقة جرين الثانية:

من المتطابقة الأولى:

$$\iiint_V \left[\phi\nabla^2\psi + \left(\vec{\nabla}\phi\right)\cdot\left(\vec{\nabla}\psi\right)\right]dV = \iint_S \left(\phi\vec{\nabla}\psi\right)\cdot\overrightarrow{dS} \qquad (٣)$$

بتبديل ϕ مكان ψ نحصل على:

$$\iiint_V \left[\psi\nabla^2\phi + \left(\vec{\nabla}\psi\right)\cdot\left(\vec{\nabla}\phi\right)\right]dV = \iint_S \left(\psi\vec{\nabla}\phi\right)\cdot\overrightarrow{dS} \qquad (٤)$$

من (٤)، (٣) بالطرح:

$$\iiint_V \left[\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi\right]dV = \iint_S \left(\phi\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\phi\right)\cdot\overrightarrow{dS}$$

وهي متطابقة جرين الثانية.

مثال(٥): باستخدام نظرية ستوكس أثبت أن:

$$\text{(i)}\quad \int_C \vec{r}\cdot d\vec{r} = 0$$

(ii) $\int_C \vec{r} \wedge d\vec{r} = 2\vec{S}$

حيث : $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad , \quad S = \iint_S dS$

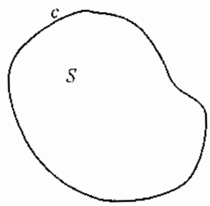
__الحل__: __أولاً__: من نظرية ستوكس :

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{F}\right) \cdot \overrightarrow{dS}$$

وبوضع $\vec{F} = \vec{r}$ نحصل على:

$$\int_C \vec{r} \cdot d\vec{r} = \iint_S \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{r}\right) \cdot \overrightarrow{dS} = \iint_S \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{r}\right) \cdot \hat{n} dS \qquad (١)$$

ولكن:



$$\vec{\nabla} \wedge \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(z) - \frac{\partial}{\partial z}(y)\right] + \hat{j}\left[\frac{\partial}{\partial z}(x) - \frac{\partial}{\partial x}(z)\right] + \hat{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(y) - \frac{\partial}{\partial y}(x)\right] = 0$$

$$\therefore \int_C \vec{r} \cdot d\vec{r} = \iint_S \left(\vec{0}\right) \cdot \hat{n} d\vec{S} = 0 \rightarrow \therefore \int_C \vec{r} \cdot d\vec{r} = 0$$

وهو المطلوب أولاً.

__ثانياً__: من نظرية ستوكس:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{F}\right) \cdot d\vec{S}$$

بوضع $\vec{F} = \vec{a} \wedge \vec{r}$ (حيث $\vec{a}$ متجه ثابت) :

$$\int_C \left(\vec{a} \wedge \vec{r}\right) \cdot d\vec{r} = \iint_S \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{a} \wedge \vec{r}\right) \cdot d\vec{S} \qquad (٢)$$

ولكن من قانون حاصل الضرب الاتجاهي الثلاثي فإن:

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{a} \wedge \vec{r}\right) = \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{r}\right)\vec{a} - \left(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{r} \qquad (٣)$$

$$\left[\overline{A}\wedge\left(\overline{B}\wedge\overline{C}\right)=\left(\overline{A}\cdot\overline{C}\right)\overline{B}-\left(\overline{B}\cdot\overline{A}\right)\overline{C}\right]$$

أيضاً:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{r}=\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(x)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z)=3 \qquad (٤)$$

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{r}=\left(a_x\frac{\partial}{\partial x}+a_y\frac{\partial}{\partial y}+a_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}\right)=a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k}=\vec{a} \qquad (٥)$$

بالتعويض من (٥) و (٤) في (٣) نحصل على:

$$\therefore \vec{\nabla}\wedge\left(\vec{a}\wedge\vec{r}\right)=(3)\vec{a}-\vec{a}=2\vec{a} \qquad (٦)$$

بالتعويض من (٦) في (٢):

$$\int_C\left(\vec{a}\wedge\vec{r}\right)\cdot d\vec{r}=\iint_S\left(2\vec{a}\right)\cdot d\vec{S}$$

ولكن من خواص حاصل الضرب الثلاثي القياسي فإن:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\wedge\vec{c}=\vec{a}\wedge\vec{b}\cdot\vec{c}$$

$$\therefore \int_C\vec{a}\cdot\vec{r}\wedge d\vec{r}=2\iint_S\vec{a}\cdot d\vec{S}$$

وحيث أن $\vec{a}$ متجه ثابت فإن :

$$\vec{a}\cdot\int\vec{r}\wedge d\vec{r}=\vec{a}\cdot\left[2\iint_S d\vec{S}\right]$$

$$\therefore \int\vec{r}\wedge d\vec{r}=2\iint_S d\vec{S}=2\vec{S}$$

وهو المطلوب ثانياً.

<u>مثال (٦) :</u>

(أ) تعرف القوة الدافعة الكهربية بالعلاقة $\varepsilon=\int\vec{E}\cdot d\vec{r}$ حيث $\vec{E}$ شدة المجال الكهربي، وينص قانون فاراداي في الحث الكهرومغنطيسي أن : $\varepsilon=-\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}$ حيث ϕ الفيض الكلي للمجال المغنطيسي ويعطى بالعلاقة $\phi=\int\vec{H}\cdot d\vec{s}$ حيث $\vec{H}$ شدة المجال المغنطيسي.

المطلوب: استخدام نظرية ستوكس لإثبات أن التفاف المجال الكهربي يعطى بالعلاقة: $curl\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$.

(ب) تعرف القوة الدافعة المغنطيسية بالعلاقة $m = \int \vec{H}\cdot d\vec{r}$ ، وتنص علاقة أمبير التي تحدد العلاقة بين القوة الدافعة المغنطيسية والتيار الكلي الناتج على أن:

$m = \frac{4\pi}{c} I$ حيث I هو التيار الكلي ويعطى بالعلاقة $I = \int \vec{J}\cdot d\vec{s}$ حيث J هو كثافة التيار.

المطلوب: استخدام نظرية ستوكس لإثبات أن التفاف المجال المغنطيسي يعطى بالعلاقة: $curl\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}$.

الحل:

الجزء(أ): حيث أن $\varepsilon = \int \vec{E}\cdot d\vec{r}$ ، $\varepsilon = -\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t}$ فإن : $\int \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t}$

ولكن $\phi = \int \vec{H}\cdot d\vec{s}$

$$\therefore \int \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{H}\cdot d\vec{S} = -\frac{1}{c}\int \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\cdot d\vec{s} \quad (١)$$

وباستخدام نظرية ستوكس فإن: (٢) $\int \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int curl\,\vec{E}\cdot d\vec{S}$

من (١) و (٢) نجد أن : $\int curl\,\vec{E}\cdot d\vec{S} = -\frac{1}{c}\int \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$

$$\therefore \int \left[curl\,\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right]\cdot d\vec{S} = 0$$

والتكامل هنا مأخوذ على كل المحيط الذي يحد السطح S ، وبذلك فإن:

$$\left[curl\,\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right] = 0 \quad \rightarrow \quad curl\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

وهو المطلوب أولاً.

الجزء(ب): حيث أن $m = \int \vec{H}\cdot d\vec{r}$ ومن علاقة أمبير فإن $m = \frac{4\pi}{c} I$

$$\therefore \int \vec{H}\cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c} I = \frac{4\pi}{c}\int \vec{J}\cdot \overrightarrow{dS} \qquad (٣)$$

حيث $I = \int \vec{J}\cdot \overrightarrow{dS}$

وباستخدام نظرية ستوكس فإن:

$$\int \vec{H}\cdot d\vec{r} = \int curl\, \vec{H}\cdot \overrightarrow{dS} \qquad (٤)$$

من (٣) و (٤) نجد أن:

$$\int curl\, \vec{H}.\overrightarrow{dS} = \frac{4\pi}{c}\int \vec{J}\cdot \overrightarrow{dS}$$

$$\therefore \int \left[curl\, \vec{H} - \frac{4\pi}{c}\vec{J} \right].\overrightarrow{dS} = 0$$

والتكامل مأخوذ على الدائرة الكهربية التي تحدد السطح S ويمر بهـا التيـار $\vec{J}$، وهو المطلوب ثانياً.

$$\therefore \left[curl\, \vec{H} - \frac{4\pi}{c}\vec{J} \right] = 0 \;\rightarrow\; curl\, \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}$$

<u>مسائل:</u>

(١) باستخدام نظرية التباعد لجاوس أثبت أن:

$$\iiint_V \frac{dV}{r^2} = \iint_S \frac{\vec{r}\cdot d\vec{S}}{r^2}$$

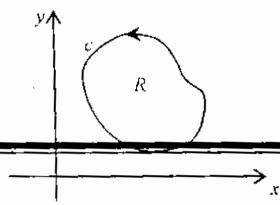
(٢) إذا كان S سطح مغلق يحتوي على الحجم V وكانت $\vec{F} = \alpha x\hat{i} + \beta y\hat{j} + \gamma z\hat{k}$ فأثبت أن:

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = (\alpha + \beta + \gamma)V$$

(٣) باستخدام نظرية ستوكس، أثبت العلاقة الآتية:

$$\oint_C \left[\phi\vec{\nabla}\psi + \psi\vec{\nabla}\phi\right]\cdot d\vec{r} = 0$$

<u>نظرية جرين في المستوى:</u>



إذا كانت M,N دالتان متصلتان في المنطقة R
التي يحدها المنحنى المستوى C فإن نظرية جرين
في المستوى تنص على الآتي:

$$\oint_C (Mdx + Ndy) = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) ds$$

أمثلة على نظرية جرين في المستوى:

مثال (١): أثبت أن نظرية جرين في المستوى هي حالة خاصة من نظرية ستوكس

الحل: من نظرية ستوكس فإن:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

وبأخذ المساحة dS تقع في المستوى (xy) فإن:

$$d\vec{S} = \hat{k} dS$$

حيث $\hat{k}$ هو متجه الوحدة العمودي على المستوى (xy) أي على المساحة dS.

$$\therefore \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) \cdot \hat{k} dS \qquad (١)$$

إذا كانت M,N دالتان متصلتان وكانت $\vec{F}$ دالة اتجاهية تقع في المستوى (xy) بحيث أن:

$$\vec{F} = M\hat{i} + N\hat{j}$$

$$\therefore \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = curl\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & O \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\hat{k} \qquad (٢)$$

وبفرض أن عنصر الطول على المنحنى C يقع في المستوى xy فإن:

$$d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$$

$$\therefore \vec{F} \cdot d\vec{r} = (M\hat{i} + N\hat{j}) \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j}) = Mdx + Ndy \qquad (٣)$$

أيضاً: من (٢) بالضرب قياسياً في $\hat{k}$ نحصل على :

$$\therefore \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{F}\right)\cdot \hat{k} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\hat{k}\cdot\hat{k} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \qquad (4)$$

حيث $\hat{k}\cdot\hat{k} = 1$

بالتعويض من (3)، (4) في (1) نحصل على :

$$\oint_C (Mdx + Ndy) = \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dS$$

وهي نظرية جرين في المستوى.

__مثال (2):__ باستخدام نظرية جرين في المستوى أثبت أن مساحة المنطقة R المحدودة بالمنحنى C تعطى بالصورة: $S = \frac{1}{2}\oint (xdy - ydx)$

ومع ذلك أثبت أن مساحة القطع الناقص تساوي (πab) حيث a,b نصفا طولي المحورين الأكبر والأصغر للقطع.

__الحل:__ من نظرية جرين في المستوى:

$$\oint_C [Mdx + Ndy] = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dS \qquad (1)$$

نعتبر الحالتين الآتيتين:

(i) بأخذ $N = x\,, \quad M = 0$

$$\oint_C xdy = \iint_R dS = S \qquad (2)$$

(ii) بأخذ $N = 0\,, \quad M = -y$

$$\oint_C (-y)dx = \iint_R dS = S \qquad (3)$$

بجمع (2)، (3)

$$\oint (xdy - ydx) = 2S$$

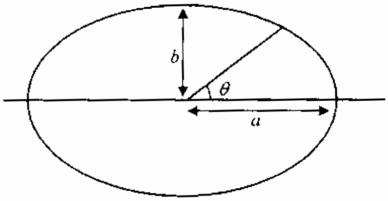
$$\therefore S = \frac{1}{2}\oint_C (xdy - ydx) \qquad (4)$$

وهي العلاقة التي تعطي مساحة أي منطقة مستوية محدودة بمنحنى مغلق.

تطبيق العلاقة(4) لإيجاد مساحة القطع الناقص:

نستخدم المعادلات البارامترية للقطع الناقص وهي:

$x = a\cos\theta\,,\quad y = b\sin\theta\,,\ 0 \le \theta \le 2\pi$



$x = a\cos\theta \quad \to dx = -a\sin\theta\, d\theta$

$y = b\sin\theta \quad \to dy = b\cos\theta\, d\theta$

بتطبيق العلاقة (4) نحصل على :

$$S = \frac{1}{2}\oint(xdy - ydx)$$

$$= \frac{1}{2}\oint[(a\cos\theta)(b\cos\theta\, d\theta) - (b\sin\theta)(-a\sin\theta\, d\theta)]$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[ab\cos^2\theta + ab\sin^2\theta]d\theta$$

$$= \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}[\cos^2\theta + \sin^2\theta]d\theta$$

$$= \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}d\theta = \frac{1}{2}ab[2\pi] = \pi ab$$

وهو المطلوب.

مسألة : باستخدام العلاقة $S = \frac{1}{2}\oint_C(xdy - ydx)$ ، أثبت أن مساحة الدائرة هي πr^2 حيث r نصف قطر الدائرة.

مسائل عامة على تفاضل وتكامل الدوال الاتجاهية

(١) إذا كانت الإزاحة لجسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة تعطي بالعلاقة $\vec{r}=\vec{a}\cos wt+\vec{b}\sin wt$ حيث $\vec{a},\vec{b}$ متجهان ثابتان، w ثابت أيضاً . أثبت أن $\vec{r}\wedge\dot{\vec{r}}=w(\vec{a}\wedge\vec{b})\ ,\ddot{\vec{r}}=-w^2\,\vec{r}$ حيث $\ddot{\vec{r}}=\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}\ ,\ \dot{\vec{r}}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$

(٢) (أ) أوجد مشتقة حاصل الضرب $(\vec{r}\wedge\vec{s})$ وأثبت أن $\dfrac{d}{dt}(\vec{r}\wedge\dot{\vec{r}})=\vec{r}\wedge\ddot{\vec{r}}$

(ب) إذا كان: $\vec{r}=\dfrac{x\hat{i}+y\hat{j}}{x+y}$ فأوجد: $\vec{\nabla}\cdot\vec{r}\ ,\vec{\nabla}\wedge\vec{r}$

(٣) أثبت العلاقات الآتية:

(i) $\vec{\nabla}(r^n)=nr^{n-2}\,\vec{r}$

(ii) $\vec{\nabla}\cdot(r^n\vec{r})=(n+3)\,r^n$

(ii) $\vec{\nabla}\wedge(r^n\vec{r})=0$

(٤) أثبت أن: $\vec{F}=\dfrac{\vec{a}}{r}e^{iw(t-\frac{r}{c})}$ حيث $\vec{a}$ متجه ثابت، w,c ثابتان قياسيان، تحقق المعادلة $\dfrac{\partial^2\vec{F}}{\partial r^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial\vec{F}}{\partial r}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{F}}{\partial t^2}$

(٥) أثبت أن قانون الانكسار للضوء المار من وسط معامل انكساره μ_1 إلى وسط آخر معامل انكساره μ_2 يعطي بالعلاقة: $\mu_1\,(\vec{a}\wedge\vec{n})=\mu_2\,(\vec{b}\wedge\vec{n})$ حيث $\vec{n}$ هو متجه الوحدة العمودي على الحد الفاصل بين الوسطين، $\vec{a}$ متجه الوحدة في اتجاه الشعاع الساقط، $\vec{b}$ متجه الوحدة في اتجاه الشعاع المنكسر. أوجد كذلك قانون الانعكاس بالصورة: $\vec{a}\wedge\vec{n}=\vec{r}\wedge\vec{n}$ حيث $\vec{r}$ هو متجه الوحدة في اتجاه الشعاع المنعكس.

(٦) إذا كانت القوة الكهروستاتيكية المؤثرة على جسيم شحنته q هي $(q\vec{E})$ حيث $\vec{E}$ شدة المجال الكهربي، وكانت القوة المغنطيسية المؤثرة على الجسيم هي $\dfrac{q}{c}(\vec{V}\wedge\vec{B})$، حيث $\vec{V}$ هي سرعة الجسيم المشحون، $\vec{B}$ هي شدة المجال المغنطيسي، c سرعة الضوء. أوجد القوة الكلية المؤثرة على الشحنة q

المتحركة بسرعة $\vec{V}=2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$ في مجال كهربي شدته $\vec{E}=2\hat{i}$ ومجال مغنطيسي شدته $\vec{B}=3\hat{i}+4\hat{j}$.

(7) (أ) أثبت أنه إذا كانت

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0\ ,\ \vec{\nabla}\cdot\vec{H}=0\ ,\ \vec{\nabla}\wedge\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\ ,\ \vec{\nabla}\wedge\vec{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

هي معادلات ماكسويل للمجال الكهرومغنطيسي في الفراغ (الخالي من الشحنات)، فإن كلاً من $\vec{E},\vec{H}=\vec{U}$ تحقق علاقة دالمبيرت:

$$\nabla^2\vec{U}-\frac{1}{c}\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2}=0$$

(ب) أثبت أن حل معادلات ماكسويل في الفراغ يعطي بالعلاقتين

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\quad ,\quad \vec{H}=\vec{\nabla}\wedge\vec{A}$$

حيث $\vec{A},\phi$ هما دالتي الجهد الإتجاهي والقياسي على التوالي.

(8) باستخدام نظرية التباعد لجاوس، احسب التكامل السطحى $\iint_S \vec{F}d\vec{S}$ حيث: $\vec{F}=4xz\hat{i}-y^2\hat{j}+yz\hat{k}$، هو سطح المكعب المحدد بالمستويات $x=0, x=1$، $y=0, y=1$، $z=0, z=1$،
[أو هو المكعب $0\le x, y, z\le 1$]

(9) باستخدام نظرية جرين فى المستوى، احسب التكامل $\oint_c[(x^2+y)dx+xdy]$

حيث المنحنى c يمثل بالدائرة $x^2+y^2=4$.

(10) حقق نظرية جرين فى المستوى على التكامل الخطى $\oint_c[(xy+y^2)dx+x^2dy]$ حيث c هو المنحنى المغلق للمنطقة المحصورة بين المنحنى $y=x^2$ والمستقيم $y=x$ فى الاتجاه الموجب للمنحنى c.

حلول المسائل

المسألة(١):

$$\vec{r}=\vec{a}\cos wt+\vec{b}\sin wt$$

$$\dot{\vec{r}}=\frac{d\vec{r}}{dt}=-w\sin wt\,\vec{a}+w\cos wt\,\vec{b}$$

$$\ddot{\vec{r}}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=-w^2\cos wt\,\vec{a}-w^2\sin wt\,\vec{b}$$

$$=-w^2[\cos wt\,\vec{a}+\sin wt\,\vec{b}]=-w^2\vec{r}$$

أيضاً فإن:

$$\vec{r}\wedge\dot{\vec{r}}=(\vec{a}\cos wt+\vec{b}\sin wt)\wedge(-w\sin wt\,\vec{a}+w\cos wt\,\vec{b})$$

$$=w[(\vec{a}\cos wt)\wedge(-\sin wt\,\vec{a})+(\vec{a}\cos wt)\wedge(\cos wt\,\vec{b})$$

$$+(\vec{b}\sin wt)\wedge(-\sin wt\,\vec{a})+(\vec{b}\sin wt)\wedge(\cos wt\,\vec{b})$$

$$=w[-\cos wt\sin wt(\vec{a}\wedge\vec{a})+\cos^2 wt(\vec{a}\wedge\vec{b})$$

$$-\sin^2 wt(\vec{b}\wedge\vec{a})+\sin wt\cos wt(\vec{b}\wedge\vec{b})]$$

$$=w[\cos^2 wt(\vec{a}\wedge\vec{b})+\sin^2 wt(\vec{a}\wedge\vec{b})]$$

$$=w(\cos^2 wt+\sin^2 wt)(\vec{a}\wedge\vec{b})=w(\vec{a}\wedge\vec{b})]$$

وهو المطلوب.

المسألة(٢):

(أ) مشتقة حاصل الضرب $(\vec{r}\wedge\vec{s})$ هي (بالقانون):

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}\wedge\vec{s})=\vec{r}\wedge\frac{d\vec{s}}{dt}+\frac{d\vec{r}}{dt}\wedge\vec{s} \qquad (١)$$

ولإيجاد $\frac{d}{dt}(\vec{r}\wedge\dot{\vec{r}})$: نضع $\vec{s}=\dot{\vec{r}}$ في (١) فنحصل على:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}\wedge\dot{\vec{r}})=\vec{r}\wedge\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}})+\frac{d\vec{r}}{dt}\wedge(\dot{\vec{r}})=\vec{r}\wedge\ddot{\vec{r}}+\dot{\vec{r}}\wedge\dot{\vec{r}}=\vec{r}\wedge\ddot{\vec{r}}$$

حيث أن: $\dot{\vec{r}}\wedge\dot{\vec{r}}=0$ (من خواص حاصل الضرب الاتجاهي).

(ب)

$$\vec{r}=\frac{x\hat{i}+y\hat{j}}{x+y}=\frac{x}{x+y}\hat{i}+\frac{y}{x+y}\hat{j}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{r}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x+y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x+y}\right)$$

$$=\frac{(x+y)-x}{(x+y)^2}+\frac{(x+y)-y}{(x+y)^2}=\frac{x+y}{(x+y)^2}=\frac{1}{x+y}$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{r}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{x}{x+y} & \frac{y}{x+y} & 0\end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}\left[0-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{x+y}\right)\right]-\hat{j}\left[0-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{x+y}\right)\right]+\hat{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x+y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x+y}\right)\right]$$

$$=\hat{i}(0)-\hat{j}(0)+\hat{k}\left[-\frac{y}{(x+y)^2}+\frac{x}{(x+y)^2}\right]=\frac{x-y}{(x+y)^2}\hat{k}$$

وهو المطلوب.

المسألة(٣):

$$\text{(i)}\ \vec{\nabla}(r^n)=\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}(r^n)+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}(r^n)+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}(r^n)$$

$$=\hat{i}nr^{n-1}\frac{\partial r}{\partial x}+\hat{j}nr^{n-1}\frac{\partial r}{\partial y}+\hat{k}nr^{n-1}\frac{\partial r}{\partial z}$$

ولكن: $r^2=x^2+y^2+z^2$ ومنها نجد أن:

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}\ ,\ \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}\ ,\ \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$$

$$\therefore \vec{\nabla}(r^n) = nr^{n-1}\left[\hat{i}\frac{\partial r}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial r}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial r}{\partial z}\right] = nr^{n-1}\left[\hat{i}\frac{x}{r} + \hat{j}\frac{y}{r} + \hat{k}\frac{z}{r}\right]$$

$$= \frac{nr^{n-1}}{r}[x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}] = nr^{n-2}\vec{r}$$

(ii) $\vec{\nabla}\cdot(r^n\vec{r}) = div(\phi\vec{A}) = \phi\, div\vec{A} + (grad\,\phi)\cdot\vec{A}$

حيث $\vec{A} = \vec{r}\,,\phi = r^n$ ، والقانون سبق إثباته.

$$\therefore \vec{\nabla}\cdot(r^n\vec{r}) = r^n\, div\,\vec{r} + (grad\, r^n)\cdot\vec{r}$$

ولكن:

$$div\vec{r} = \vec{\nabla}\cdot\vec{r} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1+1+1 = 3$$

$$grad\, r^n = nr^{n-2}\vec{r}$$

$$\therefore \vec{\nabla}\cdot(r^n\vec{r}) = r^n(3) + (nr^{n-2}\vec{r})\cdot\vec{r}$$

$$= 3r^n + nr^{n-2}(r^2) = 3r^n + nr^n = (3+n)r^n$$

(iii) $\vec{\nabla}\wedge(r^n\vec{r}) = curl(\phi\vec{A}) = \phi\, curl\vec{A} + (grad\,\phi)\wedge\vec{A}$

حيث $\vec{A} = \vec{r}\,,\phi = r^n$ ، والقانون سبق إثباته.

$$\therefore \vec{\nabla}\wedge(r^n\vec{r}) = r^n\, curl\,\vec{r} + (grad\, r^n)\wedge\vec{r}$$

ولكن:

$$curl\,\vec{r} = \vec{\nabla}\wedge\vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

$$grad\, r^n = nr^{n-2}\vec{r}$$

$$\therefore \vec{\nabla}\wedge(r^n\vec{r}) = r^n(0) + (nr^{n-2}\vec{r})\wedge\vec{r} = 0 + 0 = 0 \quad , \quad \vec{r}\wedge\vec{r} = 0$$

المسألة(٤):

$$\vec{F}=\vec{a}\ \frac{e^{iw(t-\frac{r}{c})}}{r}$$

$$\frac{\partial\vec{F}}{\partial r}=\vec{a}\ \frac{r\,e^{iw(t-\frac{r}{c})}\,(\frac{-iw}{c})-e^{iw(t-\frac{r}{c})}}{r^2}=\vec{a}\,[\frac{-iw}{cr}e^{iw(t-\frac{r}{c})}-\frac{1}{r^2}e^{iw(t-\frac{r}{c})}]$$

$$=\vec{a}\,e^{iw(t-\frac{r}{c})}\,[\frac{-iw}{cr}-\frac{1}{r^2}] \qquad \_\_\_(1)$$

$$\frac{\partial^2\vec{F}}{\partial r^2}=\vec{a}\,[\frac{-iw}{c}\ \frac{r\,e^{iw(t-\frac{r}{c})}\,(\frac{-iw}{c})-e^{iw(t-\frac{r}{c})}}{r^2}-\frac{r^2\,e^{iw(t-\frac{r}{c})}\,(\frac{-iw}{c})-2re^{iw(t-\frac{r}{c})}}{r^4}]$$

$$=\vec{a}\,e^{iw(t-\frac{r}{c})}\,[\frac{-w^2}{c^2r}+\frac{iw}{cr^2}+\frac{iw}{cr^2}+\frac{2}{r^3}]$$

$$=\vec{a}\,e^{iw(t-\frac{r}{c})}\,[\frac{-w^2}{c^2r}+\frac{2iw}{cr^2}+\frac{2}{r^3}] \qquad \_\_\_(2)$$

$$\frac{\partial\vec{F}}{\partial t}=\frac{\vec{a}}{r}e^{iw(t-\frac{r}{c})}\,(iw)=\frac{iw}{r}\vec{a}\,e^{iw(t-\frac{r}{c})}$$

$$\frac{\partial^2\vec{F}}{\partial t^2}=\frac{iw}{r}\vec{a}\,e^{iw(t-\frac{r}{c})}\,(iw)=-\frac{w^2}{r}\vec{a}\,e^{iw(t-\frac{r}{c})} \qquad \_\_\_(3)$$

من (١):

$$\frac{2}{r}\frac{\partial\vec{F}}{\partial r}=\vec{a}\,e^{iw(t-\frac{r}{c})}\,[\frac{-2iw}{cr^2}-\frac{2}{r^3}] \qquad \_\_\_(٤)$$

ومن (٣):

$$\frac{1}{rc^2}\frac{\partial^2\vec{F}}{\partial t^2}=\frac{-w^2}{c^2r}\vec{a}\,e^{iw(t-\frac{r}{c})} \qquad \_\_\_(٥)$$

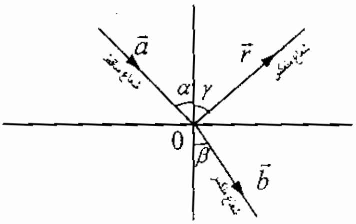
من (٥) , (٤) ,(٢) نجد أن

$$\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial \vec{F}}{\partial r}$$

$$=\vec{a}\,e^{iw(t-\frac{r}{c})}\left[\frac{-w^2}{c^2 r}+\frac{2iw}{cr^2}+\frac{2}{r^3}\right]+\vec{a}\,e^{iw(t-\frac{r}{c})}\left[-\frac{2iw}{cr^2}-\frac{2}{r^3}\right]$$

$$=\vec{a}\,e^{iw(t-\frac{r}{c})}\left(\frac{-w^2}{c^2 r}\right)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2}$$

وهو المطلوب.



<u>المسألة(٥):</u> نفرض أن α هي زاوية الشعاع الساقط

وأن β هي زاوية الشعاع المنكسر

فمن قانون الانكسار في الضوء فإن:

$$\frac{\mu_1}{\mu_2}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \qquad \_\_\_\_(1)$$

مع ملاحظة أن متجهات الوحدة $\vec{n}\,,\vec{a}\,,\vec{b}$ تقع في نفس المستوى. فإذا كان $\hat{\varepsilon}$ هو متجه الوحدة العمودي على المستوى المحتوى لهذه المتجهات

___(٢)

$$\vec{a}\wedge\vec{n}=1\cdot 1\cdot\sin\alpha\;\hat{\varepsilon} \quad\rightarrow\quad \therefore \sin\alpha=\frac{\vec{a}\wedge\vec{n}}{\hat{\varepsilon}}$$

أيضاً فإن:

$$\vec{b}\wedge\vec{n}=1\cdot 1\cdot\sin\beta\;\hat{\varepsilon} \quad\rightarrow\quad \therefore \sin\beta=\frac{\vec{b}\wedge\vec{n}}{\hat{\varepsilon}} \qquad \_\_\_\_(3)$$

ومن (١):

$$\mu_1\sin\alpha=\mu_2\sin\beta$$

فبالتعويض من (٣),(٢) نحصل على:

$$\mu_1\frac{\vec{a}\wedge\vec{n}}{\hat{\varepsilon}}=\mu_2\frac{\vec{b}\wedge\vec{n}}{\hat{\varepsilon}} \quad\rightarrow\quad \therefore \mu_1(\vec{a}\wedge\vec{n})=\mu_2(\vec{b}\wedge\vec{n})$$

وهو قانون الانكسار المطلوب.

أيضاً فمن قانون الانعكاس في الضوء: زاوية السقوط = زاوية الانعكاس

حيث زاوية السقوط هي α وزاوية الانعكاس هي γ. فإذا كان $\vec{r}$ هو متجه

الوحدة في اتجاه الشعاع المنعكس فإن: $\sin\gamma = \dfrac{\vec{r}\wedge\vec{n}}{\hat{\varepsilon}}$

ويأخذ قانون الانعكاس الصورة: $\alpha=\gamma \leftarrow \sin\alpha=\sin\gamma$

$$\therefore\ \frac{\vec{a}\wedge\vec{n}}{\hat{\varepsilon}}=\frac{\vec{r}\wedge\vec{n}}{\hat{\varepsilon}} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\vec{a}\wedge\vec{n}=\vec{r}\wedge\vec{n}}$$

وهو قانون الانعكاس المطلوب.

<u>**المسألة(٦):**</u> $\vec{E}=2\hat{i}\ ,\ \vec{B}=3\hat{i}+4\hat{j},\ \ \vec{V}=2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$

القوة الإلكتروستاتيكية:

$$\vec{F}_e=q\vec{E}=q(2\hat{i})=(2q)\hat{i} \qquad \_\_\_(١)$$

القوة المغنطيسية:

$$\vec{F}_m=\frac{q}{c}(\vec{v}\wedge\vec{B})=\frac{q}{3\times10^{10}}\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 0\end{vmatrix}=\frac{q}{3\times10^{10}}[-16\hat{i}+12\hat{j}-\hat{k}]\ \_\_(2)$$

مقدار القوة الالكتروستاتيكية:

$$F_e=\left|\vec{F}_e\right|=2q \qquad \_\_\_(٣)$$

مقدار القوة المغنطيسية: $F_m=\left|\vec{F}_m\right|=\dfrac{q}{3\times10^{10}}[\sqrt{16^2+12^2+1^2}\,]$

$$=\frac{q}{3\times10^{10}}[\sqrt{401}\,]=\frac{q}{3\times10^{10}}(20.025)=6.675\times10^{-10}\ q$$

مقدار القوة الكلية: $F=F_e+F_m=(2+6.675\times10^{-10})q$

وهو المطلوب.

ملحوظة: بالنسبة للوحدات فإن $\vec{E}$ تقاس بالوحدات الالكتروستاتيكية $(e\cdot s\cdot u)$، $\vec{B}$ تقاس بالوحدات الكهرومغنطيسية $(e\cdot m\cdot u)$، أما القوة $\vec{F}$ فتقاس بالداين والسرعة $\vec{V}$ فتقاس بوحدة $(cm./\sec.)$.

المسألة(٧): الجزء(أ): معادلات ماكسويل في الفراغ الحد (الخالي من الشحنات) هي:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0 \qquad \_\_\_(1) \quad , \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{H}=0 \qquad \_\_\_(2)$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \qquad \_\_\_(3) \quad , \quad \vec{\nabla}\wedge\vec{E}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad \_\_\_(4)$$

من المعادلة (٣) وباستخدام (٤):

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{E})=\vec{\nabla}\wedge(-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t})$$

$$=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\wedge\vec{H})=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t})=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \qquad \_\_\_(5)$$

ولكن من قوانين حاصل الضرب الثلاثي الاتجاهي:

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{E})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E}=-\nabla^2\vec{E} \qquad \_\_\_(٦)$$

حيث $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$، ومن (٦),(٥) نجد أن:

$$-\nabla^2\vec{E}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \qquad \to \qquad \nabla^2\vec{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0 \quad \_\_\_(٧)$$

أيضاً من المعادلة (٤) وباستخدام (٣):

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{H})=\vec{\nabla}\wedge(-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t})$$

$$=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\wedge\vec{E})=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t})=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} \qquad \_\_\_(8)$$

أيضاً فإن:

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{H})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{H})-\nabla^2\vec{H}=-\nabla^2\vec{H} \qquad \_\_\_(٩)$$

حيث $\nabla\cdot\vec{H}=0$، ومن (٩),(٨) نجد أن

$$-\nabla^2\vec{H} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} \quad \rightarrow \quad \nabla^2\vec{H} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0 \qquad \_\_\_(10)$$

المعادلتان (10) , (7) هما المعادلتان المطلوبتان، فإذا كانت $\vec{U} = \vec{E}\,,\vec{H}$

$$\therefore \nabla^2\vec{U} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{U}}{\partial t^2} = 0$$

الجزء(ب): من المعادلة (2) واستخدام العلاقة الاتجاهية: $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}) = 0$، حيث $\vec{A}$ دالة اتجاهية فإن: $\vec{H} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}$ تحقق المعادلة (2) فهي بذلك تكون حل لها.

أيضاً بوضع $\vec{H} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}$ في المعادلة (3) واستخدام العلاقة الاتجاهية $\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\phi) = 0$ أو $\vec{\nabla}\wedge(-\vec{\nabla}\phi) = 0$ حيث ϕ دالة قياسية، فإن

$$\therefore \vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}) = \vec{\nabla}\wedge(-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t})$$

$$\therefore \vec{\nabla}\wedge(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}) = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi$$

$$\therefore \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \qquad \_\_\_(11)$$

وهذا يعني أن تلك المعادلة هي حل للمعادلة (3) لأنها تحققها.

الدالتان $\vec{A}\,,\phi$ هما دالتا الجهد الاتجاهي والقياسي على الترتيب. وهو المطلوب.

حل المسألة(8): من نظرية التباعد لجاوس:

$$\iint_S \vec{F}.d\vec{S} = \iint_S \vec{\nabla}.\vec{F}(dV) \qquad (1)$$

لحساب الطرف الأيمن:

$$\vec{F} = 4xz\hat{i} - y^2\hat{j} + yz\hat{k} \rightarrow$$

$$\vec{\nabla}.\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(4xz) + \frac{\partial}{\partial y}(-y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(zy) = 4z - 2y + y = 4z - y \qquad (2)$$

وباعتبار الحجم $dV = dxdydz$ حيث: $z:0\rightarrow 1,\ y:0\rightarrow 1,\ z:0\rightarrow 1$

وبالتعويض من (2) فى (1) نحصل على:

$$\int\int_S \vec{F}.d\vec{S} = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}\int_{z=0}^{1}(4z-y)dxdydz = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}\left[2z^2-yz\right]_0^1 dxdy$$

$$= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}[2-y]dxdy = \int_{x=0}^{1}\left[2y-\frac{1}{2}y^2\right]_0^1 dx = \int_0^1[\frac{3}{2}]dx = \frac{3}{2}[x]_0^1 = \frac{3}{2}$$

وهو المطلوب.

<u>حل المسألة(9):</u> من نظرية جرين فى المستوى:

$$\oint_c [Mdx + Ndy] = \int\int_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)dS \qquad (1)$$

التكامل المعطى:

$$\oint_c [(x^2-y)dx + xdy] = \oint_c [(Mdx + Ndy]$$

$$\therefore \quad M = x^2 - y \longrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = -1$$

$$N = x \longrightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

وبتطبيق نظرية جرين:

$$\oint_c [(x^2-y)dx + xdy] = \int\int_S [1-(-1)]dS = 2\int\int_S dS \qquad (2)$$

ولحساب $\int\int_S dS$: المنحنى c هو الدائرة $x^2+y^2=4$ التى نصف قطرها $r=2$

ويمكن اعتبار أن $\int\int_S dS = S$ حيث S هى مساحة الدائرة: $S = \pi r^2 = 4\pi$

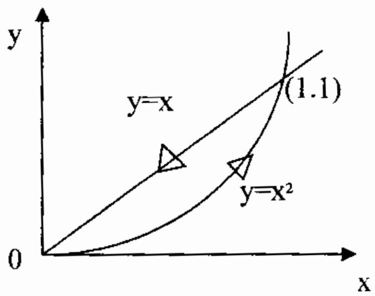
بالتعويض فى (2):

$$\therefore \oint_c [(x^2-y)dx + xdy] = 2(4\pi) = 8\pi$$

وهو المطلوب.

<u>حل المسألة(١٠):</u> المنحنى $y = x^2$ والمستقيم $y = x$ يتقاطعان عند النقطتين: $(0,0), (1,1)$.

<u>اولا: حساب التكامل الخطي:</u> يتكون هذا التكامل من تكاملين:



(١) <u>تكامل على المنحنى $y = x^2$:</u>

$$I_1 = \int_0^1 (x.x^2 + x^4)dx + \int_0^1 x^2.(2x)dx$$

$$= \int_0^1 (3x^3 + x^4)dx = \frac{19}{20}$$

(٢) <u>تكامل على المستقيم $y = x$ $(0 \leftarrow 1)$:</u>

$$I_2 = \int_1^0 (x^2 + x^2)dx + \int_1^0 x^2 dx = \int_0^1 3x^2 dx = -1$$

ويصبح التكامل المطلوب:

$$I = I_1 + I_2 = \frac{19}{20} - 1 = -\frac{1}{20} \qquad (1)$$

ثانيا: حساب التكامل السطحي:

$$\iint_s \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dxdy = \iint_s \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(xy + y^2)\right) dxdy$$

$$= \iint_s (x - 2y)dxdy$$

$$= \int_{x=}^{1} \int_{y=x^2}^{x} (x - 2y)dxdy = \int_0^1 \left[xy - y^2\right]_{x^2}^{x} dx = -\frac{1}{20} \qquad (2)$$

من (2) و (1) نجد أن نظرية جرين:

$$\oint_c [Mdx + Ndy] = \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dS$$

تكون متحققة على التكامل المعطى.

وهو المطلوب.