الباب الرابع

القطع الناقص Ellipse

تعريف: يعرف القطع الناقص على أنه المحل الهندسي لنقطة في المستوى بحيث تكون دائماً مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين مقدار ثابت. النقطتين الثابتتين تسمى البؤر والمقدار الثابت طول المحور الأكبر.

معادلة القطع الناقص:

نفرض أن البؤرتين $F_1(-C, 0), F_2(C, 0)$ ، $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$

حيث $P(x, y)$ إذن إحداثيات النقطة P تحقق

$$\sqrt{(x+C)^2 + y^2} + \sqrt{(x-C)^2 + y^2} = 2a$$

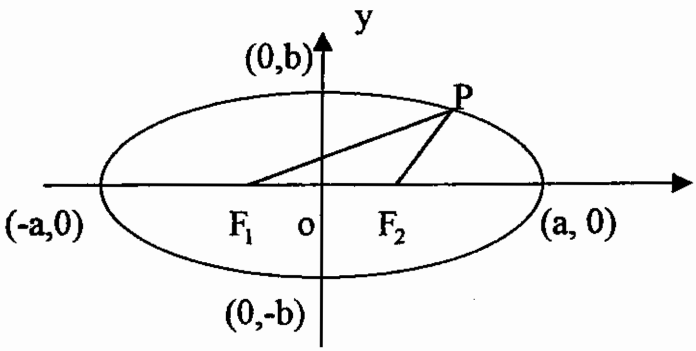
بعد تبسيط هذه المعادلة نحصل على

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - C^2} = 1 \qquad (1)$$

ملحوظة: من خواص المثلث $F_1 F_2 P$ فإن $2a > 2C$ أي أن $a^2 - C^2 > 0$ وليكن b^2 ، $b < a$ إذن المعادلة تأخذ الصورة

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \; b^2 = a^2 - C^2 \qquad (2)$$

انظر الشكل التالي:ـــ



من الخواص الجبرية للمعادلة (2) يمكن أن نلاحظ أن القطع الناقص متماثل حول محوري الإحداثيات والمعادلة (2) دالة زوجية في y, x معا حيث أنها دالة ضمنية **implicit function**.

المحور الأكبر **major axis** للقطع الناقص طوله 2 a وهو القطعة المستقيمة بين النقطتين $(\pm a, 0)$.

المحور الأصغر **minor axis** طوله 2 b وهو القطعة المستقيمة بين النقطتين $(0, \pm b)$.

a,b تسمى أنصاف المحور الأصغر، الأكبر **Semi major , semi minor axis** على الترتيب للقطع الناقص. المقدار 2C هو طول المسافة بين البؤرتين.

القطع الناقص (2) يسمى قطع ناقص أفقي لأن محوره الأكبر على امتداد محور السينات.

وإذا دارت المحاور بزاوية $\frac{\pi}{2}$ فإن

$$R_{o\left(\frac{\pi}{2}\right)} : (x, y) \longrightarrow (-y, x)$$

وتصبح المعادلة (2) في الصورة:

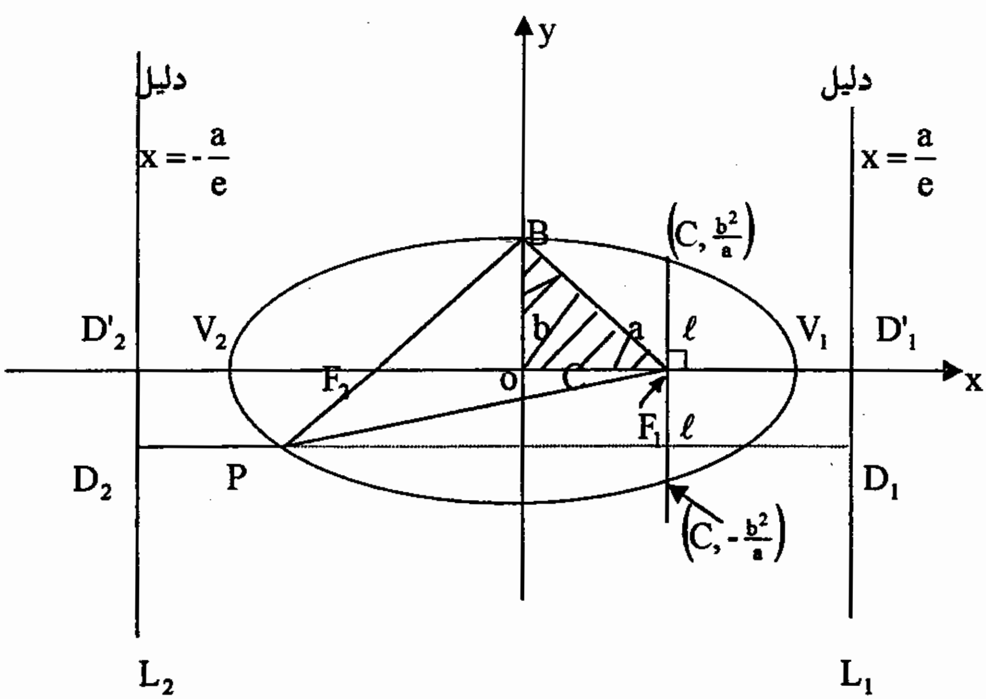
$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$$

أي القطع الناقص يصبح رأسي ومحورة الأكبر منطبق على محور الصادات.

بينما نجد أن القطع المكافئ له بؤرة واحدة ودليل واحد، القطع الناقص يكـــون لـــه بؤرتين ودليلين كل دليل يرتبط بالبؤرة القريبة منه ومن التعريف العـــام للقطاعـــات المخروطية

$$PF_1=e.PD_1\ ,\ PF_2=e.PD_2$$

حيث $e<1$ (الاختلاف المركزي)، P أي نقطة على القطع، F_1 , F_2 البـــؤر، D_1 , D_2 نقاط تقاطع العمودي من P على كل من الدليلين $L_1\, L_2$ على الترتيب.



من الشكل يمكن أن نلاحظ

$$F_1 V_1 = e V_1 D'_1 \qquad (1)$$
$$F_1 V_2 = e V_2 D'_1 \qquad (2)$$

بالجمع

$$2a = e\left(V_1 D'_1 + V_2 D'_1\right)$$
$$2a = e\left(o D'_1 - a + o D'_1 + a\right)$$
$$o D'_1 = \frac{a}{e} > a$$

بطرح (1) ,(2) نحصل على $o F = a e < a$.

إذن معادلة الدليل $x = \pm\frac{a}{e}$. وإحداثيات البؤر $C = a e, F\left(\pm a e, 0\right)$.

الوتر البؤري العمودي:

الوتر البؤري العمودي هو وتر (خط مستقيم يقطع القطع الناقص في نقطتين) يمر بالبؤرة وعمودي على المحور الأكبر.

نصف طول الوتر البؤري العمودي ℓ يعطى من

$$\ell = d\left(F_1, P\right)$$
$$\ell = y = b\sqrt{-\frac{x^2}{a^2}+1} = b\sqrt{-e^2+1}, \ \ell = y, x = a e$$
$$C^2 = a^2 - b^2, a^2\left(-e^2+1\right) = b^2$$
$$1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2}$$

إذن $\ell = \dfrac{b^2}{a}$ وطول الوتر البؤري العمودي $\dfrac{2b^2}{a}$

ونهايات الوتر البؤري العمودي هي $\left(\pm C, \pm \dfrac{b^2}{a}\right)$.

معادلة القطع الناقص (2) يمكن كتابتها في شكل أعم حيث محاور التماثل توازي محاور الإحداثيات ومركز القطع نقطة خلاف نقطة الأصل وذلك بإجراء تحويل الإنتقال $(x, y) \longrightarrow (x-h, y-k)$ فإن المعادلة (2) تأخذ الصورة

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, \quad a > b \tag{3}$$

أو في الحالة العامة

$$A x^2 + B y^2 + C x + D y + E = 0$$
$$C^2 + D^2 > 4ABE, A, B > 0$$

تحقق من ذلك ؟ (بإكمال المربع).

القطع الناقص (3) مركزه (h, k) . ورؤوسه $(\pm a + h, k)$ $(h, k \pm b)$.

والبؤر $(\pm a e + h, k)$. ومعادلة الأدلة $x = \pm \dfrac{a}{e} + h$.

نهايات الوتر البؤري العمودي $\left(\pm C + h, \pm \dfrac{b^2}{a} + k\right)$.

<u>مثال (١)</u> : أوجد المركز والرؤوس والبؤر للقطع الناقص

$$9x^2 + 4y^2 + 36x - 8y + 4 = 0$$

<u>الحل:</u> بإكمال المربع نحصل على

$$\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

بما أن $4 > 9$، إذن المحور الأكبر يوازي محور y وبنقل المحاور إلى النقطة $o'(-2,1)$

لتصبح مركز القطع نحصل على

$$\frac{x'^2}{4}+\frac{y'^2}{9}=0$$

أنصاف المحاور $a = 3, b = 2$ ومنها تكون الرؤوس $(-2, -2)$,$(-2, 4)$

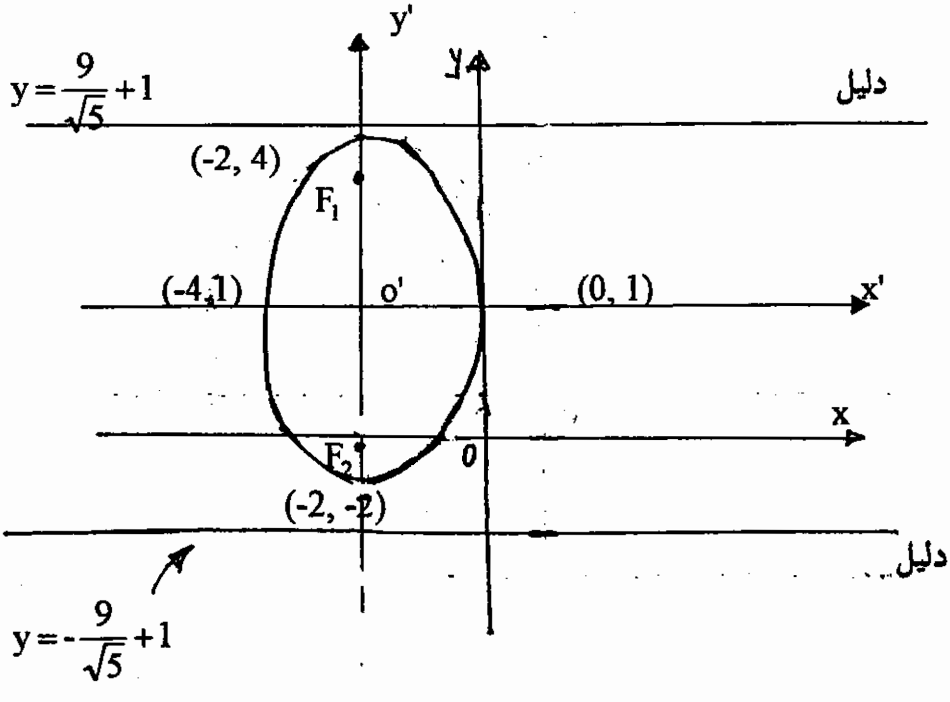
$$a^2 - b^2 = e^2 a^2 \Rightarrow e=\frac{\sqrt{5}}{3}<1$$

وبالتالي إحداثيات البؤر $\left(-2, 1\pm\sqrt{5}\right)$

ومعادلة الأدلة

$$y=\pm\frac{a}{e}+1=\pm\frac{a}{\sqrt{5}}+1$$

وطول الوتر البؤري العمودي يساوي $\frac{2b^2}{a}=\frac{8}{3}$ كما هو موضح بالرسم.



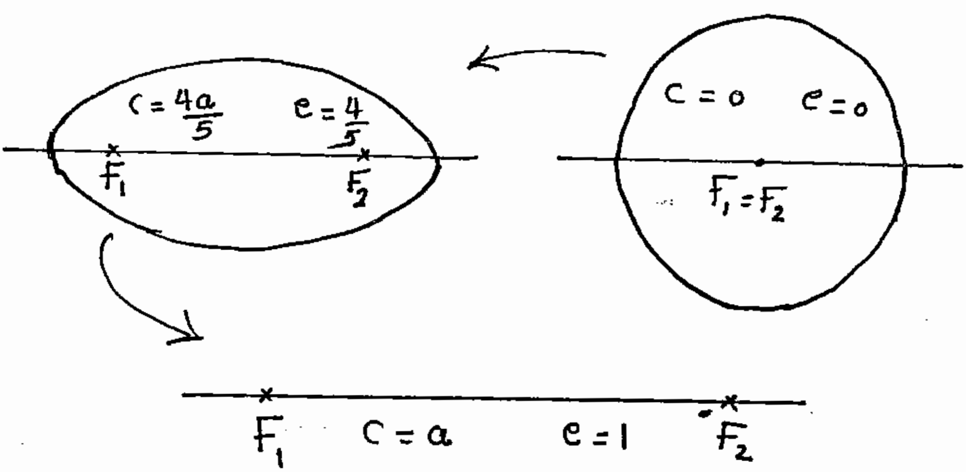
الإختلاف المركزي وشكل القطع الناقص:-

$$a > b > 0 , \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{تغير}$$

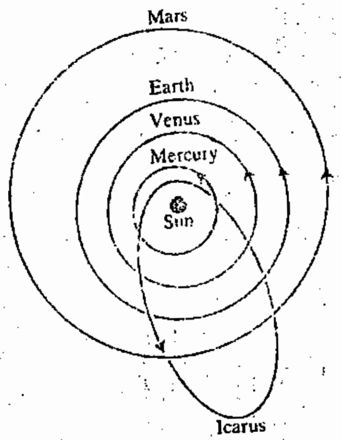
$$0 \le C = a\,e \le a\,,\ C = \sqrt{a^2 - b^2}$$

القطع الناتج يختلف في شكله على حسب قيمة C .

يكون دائري إذا كانت $C = 0$ $(a = b)$ ويكون مسحوبا (مطاولا) في إتجاه المحور الأكبر flatter كلما زادت C حتى تصل إلى قيمتها العظمى $C = a$ والقطع في هذه الحالة يصبح القطعة المستقيمة $F_1\,F_2$ أي أن النسبة (الاختلاف المركزي) $e = \frac{C}{a}$ تتغير من 0 إلى 1 لتوضيح درجة بعد القطع الناقص من كونه دائرة.



والمثال على ذلك أن الكواكب تدور حول الشمس في المجموعة الشمسية في مدارات ناقصيه حيث الشمس في بؤرتها ومعظم المسارات بما فيها الأرض تقريبا دائرية.



للقطع الناقص تطبيقات عديدة مثل حركة الكواكب وتصميم الطـــائرات وكذلــك الأصوات الناتجة عن حركة الضوضاء وتأثيرها على ما بداخل الطائرة.

المعادلات البارامترية للقطع الناقص:ـ

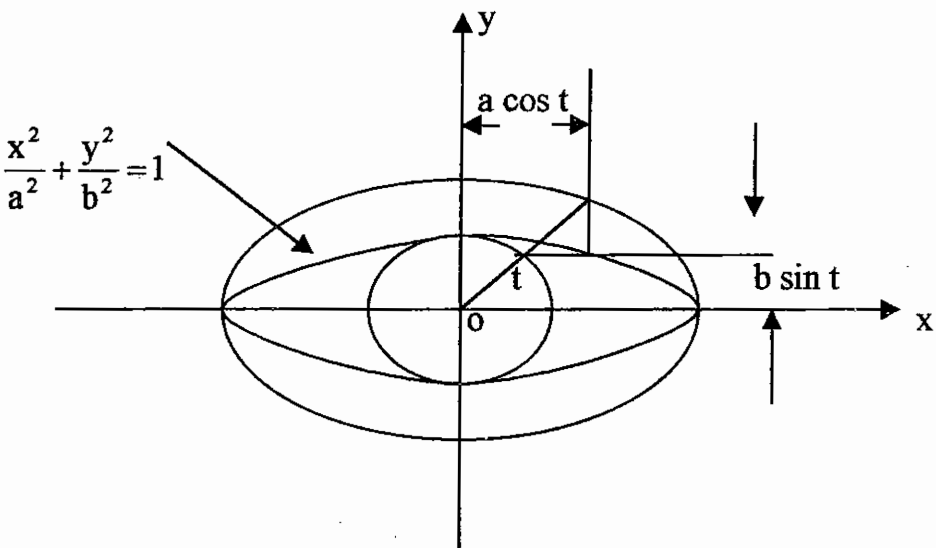
المعادلات البارامترية للقطع الناقص

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

تعطى من

$$x=a\cos t\,,\ y=b\sin t\,,\ 0\le t\le 2\pi \qquad (2)$$

المعادلات (2) تحقق (1) وتفسيرها الهندسي يتضح من خلال حركة نقطة مادية مـــن النقطة (a, 0) ذات البارامتر (الزمن) t=0 في إتجاه ضد عقارب الســاعة Counter clock wise حول القطع الناقص ليرسمه مره واحدة عندما تتغير t من 0 إلى 2π .



مثال (٢) : حول المعادلة $x^2+4y^2+6x+16y+21=0$ إلى الصورة القياسية وعين إحداثيات المركز والبؤرتين والرؤوس ومعادلتي الدليلين ونهايات الوترين البؤريين العموديين وأرسم القطع الناقص.

الحل: بإكمال المربع تأخذ المعادلة المعطاة الصورة

$$\frac{(x-(-3))^2}{4}+\frac{(y-(-2))^2}{1}=1$$

المركز هو $o'(-3,-2)$.

$$a^2=4 \Rightarrow a=2, b=1, C=\sqrt{3}, e=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

البؤرتان هما

$$F\left(-3\pm\sqrt{3}, -2\right)$$

الرؤوس

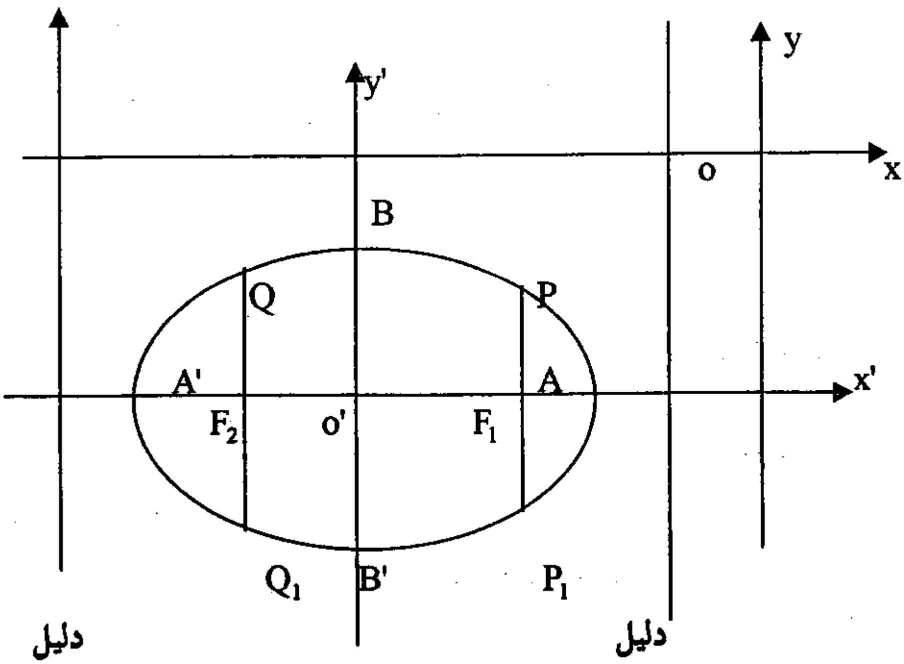
$$A(-1,-2), A'(-5,-2), B(-3,-1), B'(-3,-3)$$

نهايتا الوترين البؤريين العموديين

$$P\left(-3+\sqrt{3},-\frac{3}{2}\right),P_1\left(-3+\sqrt{3},-\frac{5}{2}\right)$$
$$Q\left(-3-\sqrt{3},-\frac{3}{2}\right),Q_1\left(-3-\sqrt{3},-\frac{5}{2}\right)$$

الدليلين هما

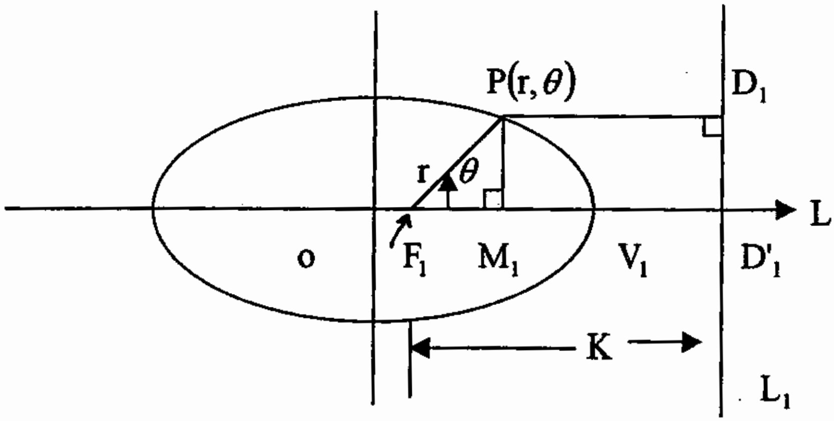
$$x=\pm\frac{a}{e}+h$$
$$=\pm\frac{4}{\sqrt{2}}-3$$



المعادلة القطبية للقطع الناقص:-

نأخذ الخط الابتدائي منطبق على محور القطع الناقص (الأفقي) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

والبؤرة اليمنى منطبقة على قطب الإحداثيات القطبية كما هو موضح بالرسم



من تعريف القطع الناقص

$$PF_1 = e\,PD_1 = e\left(F_1D'_1 - F_1M_1\right)$$

$$r = e(K - r\cos\theta)$$

$$r = \frac{eK}{1 - e\cos\theta}$$

حيث K بعد البؤرة عن الدليل.

لاحظ المعادلة (1) حصلنا عليها بأخذ البؤرة اليمنى والدليل القريب منها.

$$K = oD'_1 - oF_1$$

$$= \frac{a}{e} - ae$$

بعد الاختصار واستخدام العلاقة بين C, a, b نحصل على

$$K = \frac{a^2 - C^2}{a e} = \frac{b^2}{a e}$$

$$e K = \frac{b^2}{a} = \ell$$

أي أن $e K$ هي نصف الوتر البؤري العمودي

$$r = \frac{\ell}{1 - e\cos\theta}, \quad \ell = e K$$

بدوران المحاور بزاوية π نحصل على

$$r = \frac{\ell}{1 + e\cos\theta}$$

وفي هذه الحالة أخذنا البؤرة F_2 مع الدليل L_2.

بالمثل إذا كان القطع الناقص رأسي فإننا نأخذ العمودي على محور القطع منطبق على الخط الابتدائي والبؤرة منطبقة على القطب ويمكن أن نرى أن معادلة القطع الناقص هي

$$r = \frac{\ell}{1 - e\cos\theta}$$

حيث البؤرة F_1، الدليل L_1.

$$r = \frac{\ell}{1 + e\cos\theta}$$

حيث البؤرة F_2 ، الدليل L_2.

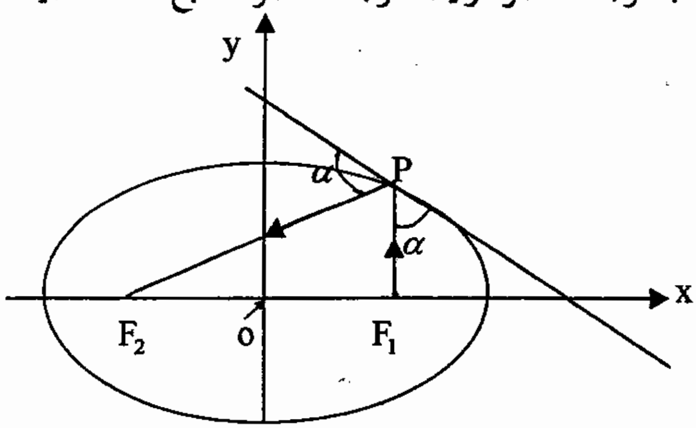
عموما بالنسبة للقطع الناقص حيث أن معادلته لها أوضاع مختلفة تختلف باختلاف البؤرة والدليل يمكن أن نضع المعادلات السابقة في الصورة

$$r = \frac{\ell}{1 - e\cos(\theta - \alpha)}$$

حيث α هي الزاوية التي يصنعها المحور مع الخط الابتدائي مقاسه في اتجاه ضد عقارب الساعة وتكون α إما أن تساوي 0 أو π أو $\frac{\pi}{2}$ أو $\frac{3\pi}{2}$ على حسب أوضاع القطع الناقص (1)، (2)، (3)، (4) على الترتيب.

خاصية الإنعكاس في القطع الناقص Reflective property

إذا دار القطع الناقص حول محوره الأكبر فإننا نحصل على مجسم ناقص (عدسة ناقصية) يمكن إثبات أن الشعاع الصادر من أحد البؤرتين ينعكس إلى البؤرة الأخرى. هذا بالنسبة لموجات الضوء وأيضا موجات الصوت تتبع هذه الخاصية



تمارين

١ــ عين إحداثيات البؤرة ونهايات الوترين البؤريين العموديين ومعادلتي الدليلين ثم أرسم القطع في الحالات الآتية:ــ

(i) $\frac{(y+3)^2}{36}+\frac{(x-6)^2}{16}=1$

(ii) $16x^2+25y^2+160x+200y+400=0$

(iii) $16x^2+4y^2+32x-16y-32=0$

٢ــ عين معادلة القطع الناقص بحيث يكون

(i) المركز $o'(5,1)$، أحد الرؤوس $(5,4)$ نهاية المحور الأصغر $(3, 1)$.

(ii) أحد الرؤوس $(6, 3)$، البؤرتان $(\pm 4, 3)$.

(iii) رأسان من رؤوسه $(\pm 5, 0)$، طول الوتر البؤري العمودي $\frac{8}{5}$.

٣ــ مثلث طول محيطه 30 ، رأسان من رؤوسه $(-5, 0)$,$(5, 0)$، عين المنحنى الـذي يرسمه الرأس الثالث.

٤ــ عين المحل الهندسي للنقط $P(x, y)$ التي يكون بعدها عن النقطة $(5, 0)$ هو نصف بعدها عن المستقيم $x=20$.

٥ــ إذا كان مدار الأرض حول الشمس (قوانين كبلر لحركـــة الكواكـــب حـــول الشمس) هو قطع ناقص حيث الشمس إحدى بؤرتيه وإذا كان نصـــف طـــول المحور الأكبر لهذا المدار هو 92.9 مليون ميل والإختلاف المركزي لهـــذا القطـــع 0,0168 أوجد أكبر وأصغر بعد للأرض عن الشمس.

٦ــ أوجد معادلة القطع الناقص الذي له $e = \frac{1}{2}$ وأوجد بؤرتيه $F(-4, 1)$ ومعادلـة الدليل القريب من البؤرة المعطاة هي $y+3=0$.

٧ــ أوجد القطع الناقص الذي يحقق أن $M_1(2, -1)$ تقع عليه وبؤرتـــه $F(1, 0)$ والدليل المناظر للبؤرة F هو $2x - y - 10=0$.

٨ــ أوجد معادلة القطع الناقص الذي محاورة تنطبق على محاور الإحداثيات ويمس كل من المستقيمين $x + 6y - 20 = 0$, $3x-2y-20=0$.

٩ــ أوجد نقاط تقـــاطع الخـــط المســـتقيم $x + 2y - 7 = 0$ والقطـــع النـــاقص $x^2 + 4y^2 = 25$.

١٠ـ أوجد قيم m التي تجعل الخط y = -x + m يقطع أو يمس القطع الناقص $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{5}=1$ أو خلاف ذلك.

١١ـ بين أن المعادلة $r=\frac{144}{13-5\cos\theta}$ تمثل قطع ناقص وأوجد أنصاف محاوره.

١٢ـ بين أن المعادلة $r=\frac{21}{5-2\cos\theta}$ تمثل قطع ناقص وأوجد المعادلات القطبية للأدلة

١٣ـ على القطع الناقص $r=\frac{12}{3-\sqrt{2}\cos\theta}$ أوجد النقاط التي لها متجه الوضع $r=6$.

١٤ـ أوجد قيم a,b,C التي تجعل القطع الناقص $4x^2+y^2+ax+by+C=0$ يمس محور السينات عند نقطة الأصل ويمر بالنقطة (-1, 2).

١٥ـ أوجد طول وتر القطع الناقص الذي يصنع زاوية $\frac{\pi}{4}$ مع المحور الأكبر للقطع.

١٦ـ أثبت أن الاختلاف المركزي للقطع الناقص $2abx^2+(a^2+b^2)y^2=(a+b)^2$ يساوي $\frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}}$.

١٧ـ عين نوع كل من القطاعات المخروطية الأتية:ـ

$r=\frac{12}{4+3\cos\theta}, r=\frac{6}{2-\sin\theta}$ وأوجد طول كل من محورية.