الباب الثاني

عائلات الدوائر

الدائرة هي فئة النقاط الهندسية في المستوى التي تبعد مسافة ثابتة عن نقطة ثابتة في المستوى.

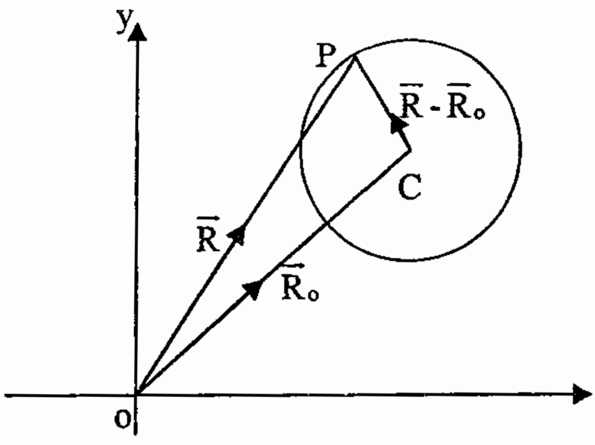
النقطة الثابتة تسمى المركز **Center** والمسافة الثابتة تسمى نصف القطر **radius**.

ومن هذا التعريف يمكن استنباط العلاقة (المعادلة) التي تربط نقاط الدائرة أي معادلة الدائرة في أشكال مختلفة كالأتي:-

Vector equation <u>المعادلة الإتجاهية للدائرة</u>

نعتبر دائرة مركزها C له متجه الموضع $\overline{R}_o = (x_o, y_o)$ ونصف قطرها a

نقطة عامة P نقطة لها متجه الموضع $\overline{R} = (x, y)$ على محيطها



فيكون المتجه $\overline{R} - \overline{R}_o$ على أمتداد نصف القطر أي أن

$$\langle R - R_o, R - R_o \rangle = a^2 \qquad (1)$$

المعادلة (1) تسمى المعادلة الإتجاهية للدائرة أو

$$\overline{R} = \overline{R}_o + a\,\overline{e}$$

حيث e متجه الوحدة في اتجاه نصف القطر.

من (1) نجد أن (خواص الضرب القياسي).

$$\langle R,R\rangle - 2\langle R,R_o\rangle + \langle R_o,R_o\rangle = a^2$$

أو

$$\overrightarrow{R^2} - 2\langle R,R_o\rangle + R_o^2 = a^2$$

أو

$$\overrightarrow{R^2} - 2\left\langle \overline{R},\overline{R}_o\right\rangle = a^2 - R_o^2 \qquad (2)$$

بالتعويض عن $\overline{R} = (x,y), \overline{R}_o = (x_o,y_o)$ نجد أن

$$x^2 + y^2 - 2\,x\,x_o - 2\,y\,y_o = a^2 - x_o^2 - y_o^2$$

أو

$$x^2 + y^2 - 2\,x\,x_o - 2\,y\,y_o + C = 0 \qquad (3)$$

حيث $a^2 = x_o^2 + y_o^2 - C$.

بإكمال المربع في (3) نحصل على

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = a^2 \qquad (4)$$

وهي المعادلة الكرتيزية للدائرة التي مركزها (x_o,y_o) ونصف قطرهاa ومن المعادلة (3) يمكننا تعميم معادلة الدائرة لتأخذ شكل معادلة من الدرجة الثانية على الصورة

$$x^2 + y^2 + 2\,x\,x_o + 2\,y\,y_o + C = 0 \qquad (5)$$

فهي تمثل دائرة مركزها $(-x_o,-y_o)$

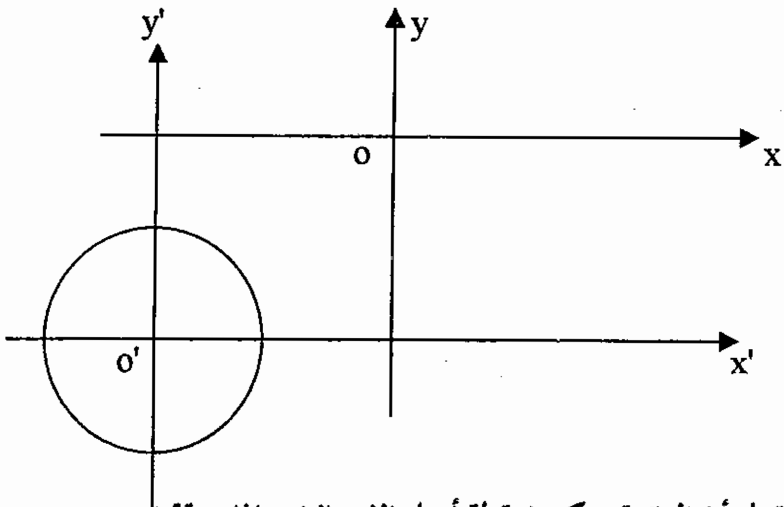
ونصف قطرها $a = \sqrt{x_o^2 + y_o^2 - C}$, $x_o^2 + y_o^2 > C$.

المعادلة (5) هي صورة للمعادلة (4) وذلك بنقل المحاور إلى النقطة $o'(-x_o,-y_o)$ (نقطة أصل الإحداثيات الجديدة) أي أن

$$x' = x + x_o\ ,\ y' = y + y_o$$

تتحول المعادلة (5) إلى

$$x'^2 + y'^2 = a^2$$



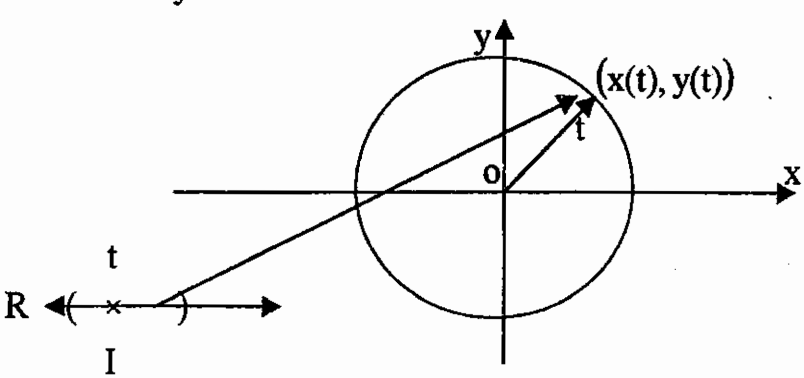
وعموما نقول أن الدائرة مركزها نقطة أصل الإحداثيات إذا حققت

$$x^2 + y^2 = a^2$$

المعادلات البارامترية للدائرة **Parametric equations**

نعتبر الدائرة

$$x^2 + y^2 = a^2 \qquad (6)$$



من هندسة الشكل نجد أن

$$y = a\sin t\ ,\ x = a\cos t\ ,\ 0 \le t < 2\pi \qquad (7)$$

المعادلات (7) تحقق (6) وتسمى المعادلات (7) المعادلات البارامترية للدائـــرة وأن أي نقطة على الدائرة لها متجه الموضع

$$\overrightarrow{R}(t) = (a\cos t\ ,\ a\sin t\ )$$

وإذا كانت الدائرة لها الوضع (4) فإن المعادلات البارامترية لها هي

$$x = x_o + a\cos t\ ,\ y = y_o + a\sin t\ ,\ 0 \le t < 2\pi$$

الشروط العامة لتحديد دائرة في المستوى:.

المعادلة (4) أو (5) تحتوى على ثلاثة بارامترات a, x_o, y_o ولتحديد دائـــرة يلزم معرفة الثلاث بارامترات هذه ولذلك نحتاج ثلاث شروط مثلاً، نصـــف القطـــر وإحداثيات المركز أو ثلاث نقط على محيطها وهكذا وبالتعويض في المعادلـــة العامـــة للدائرة

$$x^2 + y^2 + 2fx + 2gy + C = 0 \qquad (8)$$

نحصل على ثلاث معادلات في ثلاث مجاهيل نقوم بحلها بأي طريقة جبريـــة (طريقـــة كرامر أو الحذف لجاوس).

مثال: عين معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط الثلاث

$(1, 5), (-2, 3), (2, -1)$

الحل: بالتعويض بالنقاط الثلاث في المعادلة (8) نحصل على

$$2f + 10y + C = -26$$
$$-4f + 6y + C = -13$$
$$4f - 2y + C = -5$$

وحلها هو $f = -\frac{9}{10}, g = -\frac{19}{10}, C = -\frac{26}{5}$.

وتصبح الدائرة المطلوبة في الصورة

$$x^2+y^2-\frac{9}{5}x-\frac{19}{5}y-\frac{16}{5}=0$$

وعموما يمكن إعطاء النظرية الآتية:ـــ

نظرية (١): الدائرة التي تمر بالنقاط $(x_i, y_i), i=1,2,3$ غير الواقعة على إســتقامة واحدة تعطى من

$$\left(x^2+y^2\right)-\frac{\Delta_1}{\Delta}x+\frac{\Delta_2}{\Delta}y-\frac{\Delta_3}{\Delta}=0$$

حيث

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\neq 0,\quad \Delta_1=\begin{vmatrix} L_1 & y_1 & 1 \\ L_2 & y_2 & 1 \\ L_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} L_1 & x_1 & 1 \\ L_2 & x_2 & 1 \\ L_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix},\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} L_1 & x_1 & y_1 \\ L_2 & x_2 & y_2 \\ L_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

حيث $L_i=x_i^2+y_i^2, i=1,2,3$

البرهان: بالتعويض بالنقاط الثلاث في المعادلة العامة للدائرة نحصل على ثلاث معادلات في ثلاث مجاهيل نقوم بحلها بطريقة كرامر لتعيين المجاهيل f, y, C.

مثال: عين معادلة الدائرة التي تمر بالنقط

(1, -2), (5, 4), (10, 5)

الحل: من النظرية السابقة وحساب Δ, Δ_i يكون

$$\Delta=-26, \Delta_1=-468, \Delta_2=-156, \Delta_3=650$$

إذن معادلة الدائرة المطلوبة هي

$$x^2 + y^2 - 18x + 6y + 25 = 0$$

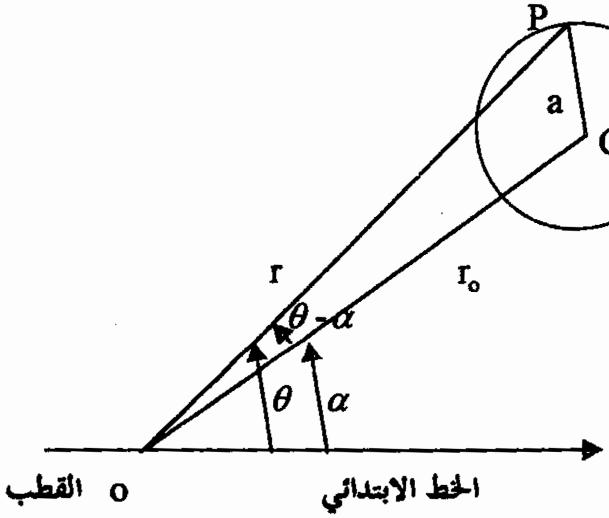
أو بإكمال المربع

$$(x-9)^2 + (y+3)^2 = 65$$

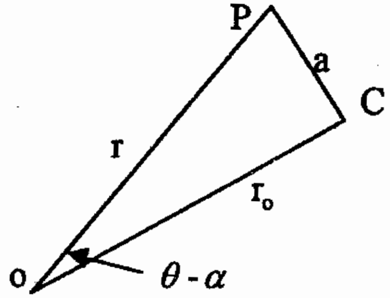
وهي دائرة مركزها C(9,-3) ونصف قطرها $a = \sqrt{65}$.

معادلة الدائرة في الصورة القطبية Polar equation

نفرض أن لدينا دائرة مركزها C له الإحداثيات القطبية (r_o, α) ونصف قطرها a، نأخذ نقطة عامة (r, θ) على محيط الدائرة ومن الشكل



من هندسة الشكل يكون



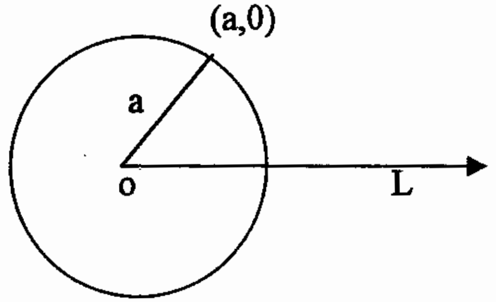
$$a^2 = r^2 + r_o^2 - r\,r_o \cos(\theta - \alpha) \qquad (١)$$

<u>حالات خاصة:</u> بأخذ قيم خاصة للمقادير α, r_o في المعادلة (1) نحصل على :ـــ

المركز عند القطب

(i) $r_o = 0, r^2 = a^2$

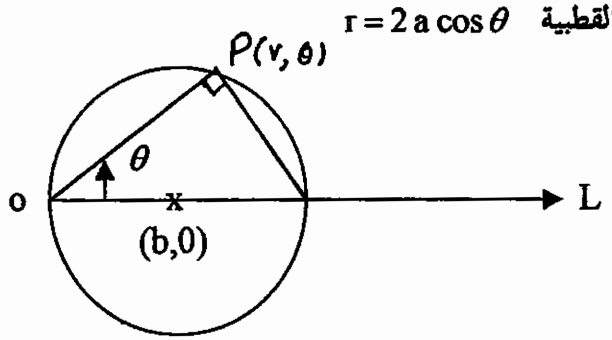
وتكون المعادلة القطبية r=a



مركز الدائرة على الخط القطبي

(ii) $r_o = a, \alpha = 0$

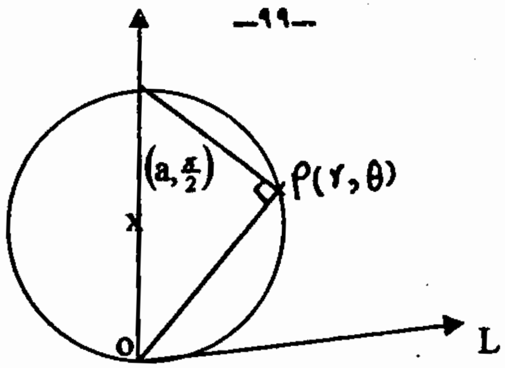
ونكون المعادلة القطبية $r = 2a\cos\theta$



مركز الدائرة على الخط العمودي على الخط الابتدائي عند القطب

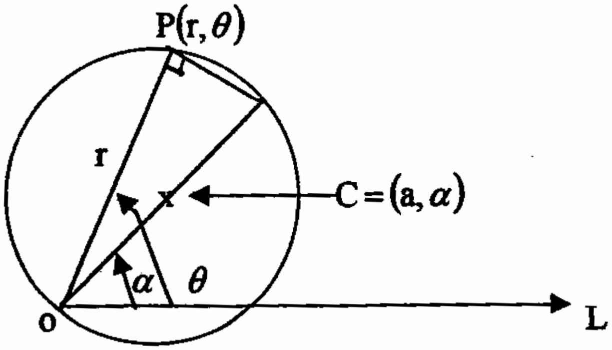
(iii) $r_o = a, \alpha = \frac{\pi}{2}$

وتكون المعادلة $r = 2a\sin\theta$



القطب على المحور

(v) $r = 2a\cos(\theta - \alpha)$



بالنسبة للمعادلة (1) يمكن كتابتها على الصورة

$$r^2 - 2 r r_o \cos(\theta - \alpha) + k = 0$$

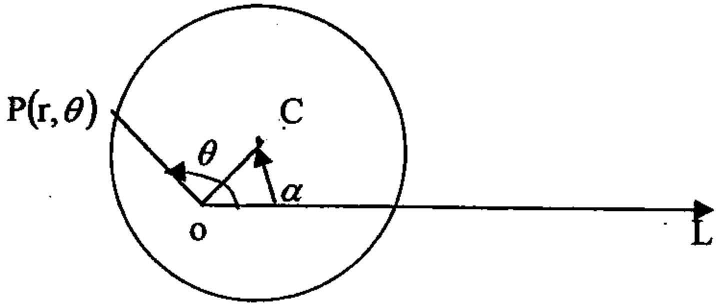
$$k = r_o^2 - a^2$$

القطب يقع خارج الدائرة

(vi) $k > 0, r_o > a$

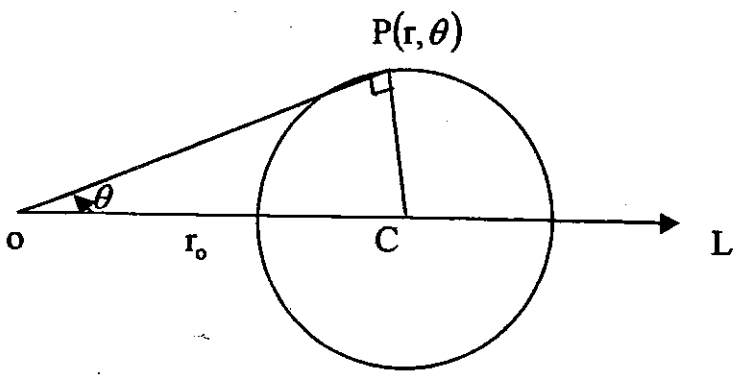
القطب يقع داخل الدائرة

(vii) $k < 0, r_o < a$



الخط الابتدائي يمر بمركز الدائرة

(viii) $\alpha = 0$



وتؤول معادلة الدائرة إلى الصورة

$$r^2 - 2\,r\,r_o \cos\theta + k = 0$$

مثال (١) : أثبت أن المعادلة

$$r = C_1 \cos\theta + C_2 \sin\theta$$

تمثل دائرة وأوجد مركزها ونصف قطرها.

الحل: نحاول جعل المعادلة (1) في صورة معادلة الدائرة (١) وذلك بضرب والقسمة على $\sqrt{C_1^2+C_2^2}$ في الطرف الأيمن تتحول المعادلة إلى (استخدام متطابقات حساب المثلثات).

$$r=\sqrt{C_1^2+C_2^2}\cos(\theta-\alpha)$$

حيث $\alpha=\tan^{-1}\dfrac{C_2}{C_1}$ ، ونصف قطرها $a=\dfrac{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}{2}$ والقطب يقع على المحيط أي أن المركز هو (a,α) .

مثال (٢) : رسم من نقطة o مستقيم يقطع دائرة معلومة في P_2, P_1 إوجد المحل الهندسي للنقطة P على P_1P_2 بحيث يكون

$$\frac{2}{oP}=\frac{1}{oP_1}+\frac{1}{oP_2}$$

الحل: نأخذ o القطب والقطر المار بالنقطة o خطا إبتدائيا وبالتالي فإن معادلة الدائرة تأخذ الصورة

$$r^2-2ar\cos\theta+k=0 \qquad (*)$$

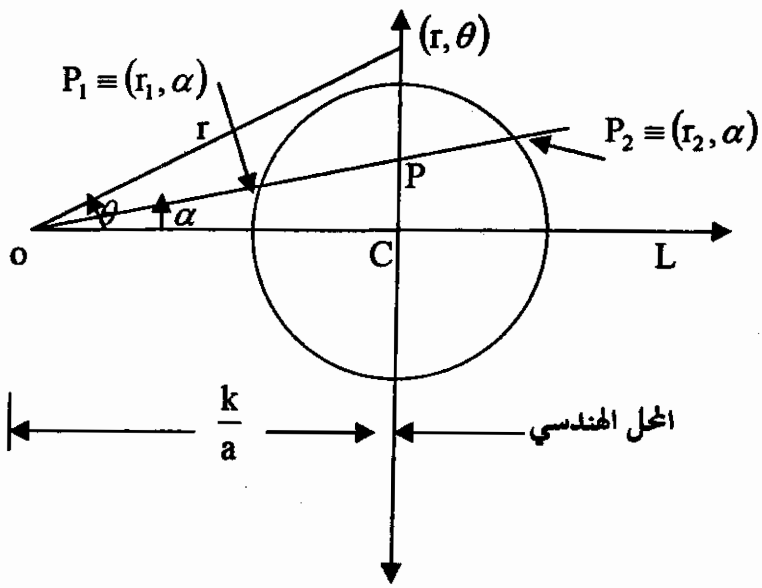
نفرض أن موضعا متغير للمستقيم الذي يمر بالنقطة o يعطى من $\theta=\alpha$ ، لذلك يمكن إيجاد النقطتين P_1P_2 اللتين يقطع فيهما المستقيم الدائرة (*).

في المعادلة (*) (معادلة من الدرجة الثانية في r) يكون

(من نظرية المعادلات) $r_1+r_2=2a\cos\alpha \;, r_1r_2=k$

حيث $r_1=oP_1 , r_2=oP_2$ ، ولكن

$$\frac{2}{oP}=\frac{1}{oP_1}+\frac{1}{oP_2}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\frac{r_1+r_2}{r_1r_2}$$



$$\therefore\ \frac{2}{oP} = \frac{2\,a\cos\alpha}{k}$$

$$\therefore\ oP\cos\alpha = \frac{k}{a}$$

وبذلك يكون المحل الهندسي للنقطة P هو المستقيم :

$$r\cos\theta = \frac{k}{a}\ ,\ P \equiv (r, \theta)$$

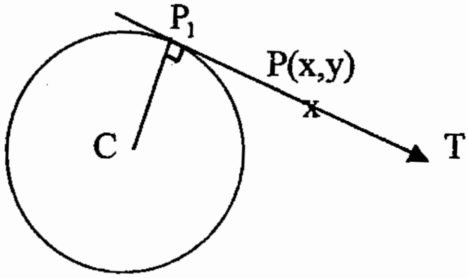
ويكون عموديا على القطر الذي يمر بالنقطةo ويبعد مسافة $\frac{k}{a}$ عن القطب.

Tangent to a circle المماس للدائرة

نعتبر الدائرة

$$\Phi(x, y) = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + C = 0$$

المماس T للدائرة عند النقطة $P_1\left(x_1, y_1\right)$ للدائرة التي مركزها $C(-g, -f)$ هو خـط مستقيم عمودي على اتجاه نصف القطر عند النقطة P_1 وذلك من الهندسة المســتوية للدائرة.



ميل المماس m هو سالب مقلوب ميل متجه على أمتداد نصف القطر CP_1 وبذلــك تكون معادلة المماس هي

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{g + x_1}{f + y_1}$$

(أو بحساب $m = \frac{dy}{dx}$ من معادلة الدائرة)

ومنها تكون معادلة المماس

$$x x_1 + y y_1 + g\left(x + x_1\right) + f\left(y + y_1\right) + C = 0$$

أو

$$\left(x_1 + g\right)x + \left(y_1 + f\right)y + g x_1 + f y_1 + C = 0$$

أو

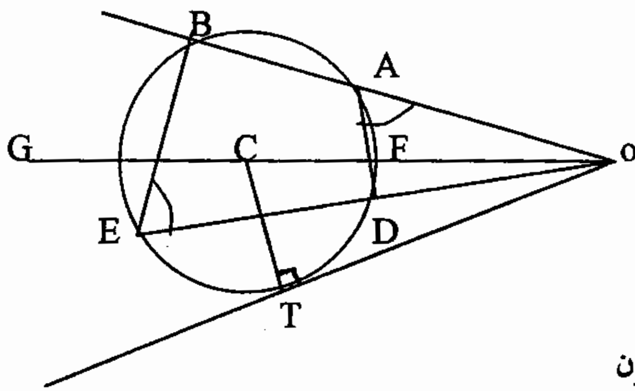
$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{P_1} x + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{P1} + g x_1 + f y_1 + C = 0$$

<u>مثال (٣) :</u> أوجد معادلة العمودي على المماس للدائرة عند $P_1\left(x_1, y_1\right)$.

<u>الحل:</u> متروك للقارئ.

قدرة النقطة: Power of a point

نعتبر الدائرة التي مركزها C ونصف قطرها R ونقطة خارجـــها o، نرســـم مستقيمات اختيارية تقطع الدائرة عند E, D, B, A وبالتالي يكون لدينا شكل ربـاعي ABED مرسوم داخل الدائرة ولذلك يكون



ولذلك يكون

$$\measuredangle oAD = \measuredangle oEB$$

والمثلث oAD يشابه المثلث oEB.

إذن

$$\frac{oA}{oD} = \frac{oE}{oB}, \text{or } (oA)(oB) = (oD)(oE)$$

∴ لأي نقطة في مستوى الدائرة، يكون حاصل ضرب القواطع التي على خط مستقيم واحد للدائرة ثابت. نسمى هذا الثابت قدرة النقطةo بالنسبة للدائرة ونرمز له بـالرمز P.

لحساب P، نرسم القاطع oC الذي يمر بمركز الدائرة وتكون قواطعها لها الأطوال

$$oF = oC - R, \quad oG = oC + R$$

يكون حاصل ضربهم هو P حيث

$$P = (oC)^2 - R^2$$

ملاحظة: يجب أن نلاحظ أن P يكون موجب إذا كانت o خارج الدائـــرة ويكـــون سالب إذا كانت o داخل الدائرة وينعدم إذا كانت o على محيط الدائرة.

وإذا رسم المماس من o للدائرة عند T فإن

$$P=(oC)^2-(CT)^2=t^2$$

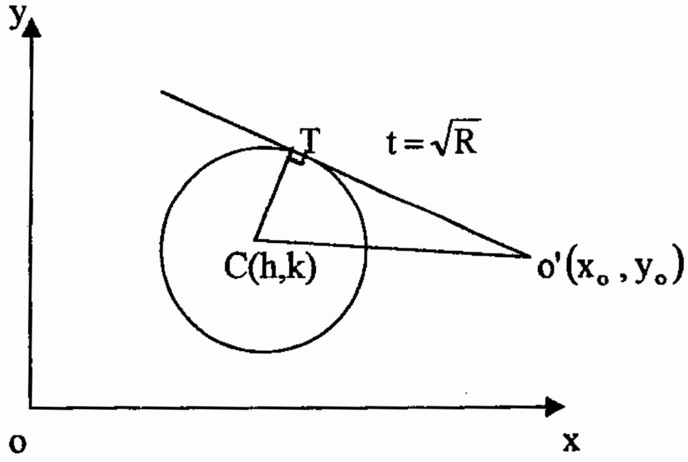
حيث t طول المماس للدائرة عند T أي $t = oT$.

وبأسلوب الهندسة التحليلية تكون قدرة النقطة $(x_o\,,y_o)$ بالنسبة للدائرة هي مربـع طول المماس للدائرة المرسوم من النقطة.

للمناقشة التحليلية في الإحداثيات الكرتيزية، نعتبر الدائرة

$$(x-h)^2+(y-k)^2=R^2$$

$$\therefore \quad P=(x_o-h)^2+(y_o-k)^2-R^2$$



حيث $(x_o\,,y_o)$ هي أي نقطة في المستوى.

بالنسبة للمعادلة العامة للدائرة

(*) $$x^2+y^2+A\,x+B\,y+C=0$$

يكون $$P=x_o^2+y_o^2+A\,x_o+B\,y_o+C$$

كمثال، مربع المماس من نقطة الأصل $(x_o , y_o) = (0,0)$ للدائرة (*) يكون C. ومن ثم لاحظ أنه إذا كانت C سالب فإن الدائرة تحتوي نقطة الأصل.

تمارين

١ــ أثبت أن المسافة d بين النقطتين $(r_1 , \theta_1), (r_2 , \theta_2)$ تعطى من

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

ومن ثم إوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطة $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ ومركزها $C\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ موضحاً ذلك بالرسم.

٢ــ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها $\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$، ونصف قطرها يساوي 5.

٣ــ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها النقطة $\left(8, \frac{2\pi}{3}\right)$ وتمر بالنقطة $\left(4, \frac{\pi}{4}\right)$.

٤ــ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها $\left(8, \frac{\pi}{4}\right)$ وتمس المحور القطبي.

٥ــ أوجد مركز ونصف قطر الدوائر الآتية:ــ

(i) $r^2 - 4 r \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

(ii) $r = 5 \cos\theta - 5\sqrt{3} \sin\theta$

(iii) $r^2 + 3 r \cos\theta + 3 r \sqrt{3} \sin\theta = 0$

٦ــ حدد فيما إذا كانت النقطة o' تقع داخل أو خارج أو على محيط الدائرة في الحالات الآتية:ــ

(i) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0, o'(1,-1)$

(ii) $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 9 = 0, o'(0,2)$

عائلات الدوائر Family of Circles

نفرض أن لدينا دائرتين $\Phi_\alpha = 0, \alpha = 1,2$ حيث

(i) $\Phi_1(x,y) \equiv x^2 + y^2 + a_1 x + b_1 y + C_1 = 0$

(ii) $\Phi_2(x,y) \equiv x^2 + y^2 + a_2 x + b_2 y + C_2 = 0$

والتي يمكن أن نرمز لها بالرمز $\Phi_2 = 0, \Phi_1 = 0$ ونفرض أنهما يتقاطعان فإن المعادلة

(iii) $\Phi_1 + \lambda\, \Phi_2 = 0 \; (\lambda \neq -1)$

تمثل أيضاً دائرة كذلك المعادلة

(iv) $\mu \Phi_1 + \Phi_2 = 0 \quad (\mu \neq -1)$

تمثل دائرة (تحقق من هذا).

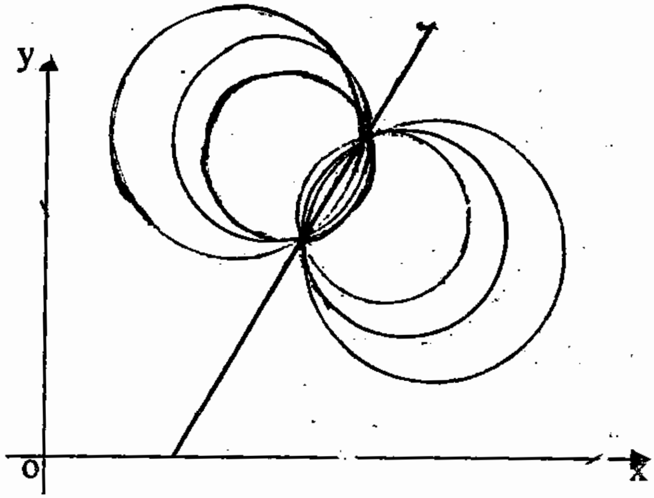
فإذا كانت احدى نقطتي التقاطع إحداثياها هي (x_1, y_1) فإن

$$\Phi_1(x_1,y_1) = 0 \;,\; \Phi_2(x_1,y_1) = 0$$

وعليه فإنه من (iii), (iv) نجد أن

$$\Phi_1(x_1,y_1) + \lambda\, \Phi_2(x_1,y_1) = 0$$
$$\mu \Phi_1(x_1,y_1) + \Phi_2(x_1,y_1) = 0$$

وهذا يعني أن أي دائرة تمر بنقطتي تقاطع الدائرتين (i), (ii) تكون على الصـورة (iii) أو الصورة (iv). بمعنى آخر نستنتج أن المعادلة (iii) أو المعادلة (iv) تمثل كل منـهما ما يسمى بعائلة الدوائر Family of circles والموضحة بالشكل التالي



مثال (١):

أوجد الدائرة التي تمر بالنقطة (1,5) ، ونقطتي تقاطع الدائرتين

$$\Phi_1(x,y)\equiv x^2+y^2-25=0,$$
$$\Phi_2(x,y)\equiv (x-6)^2+y^2-9=0$$

الحل: المعادلة

$$\lambda\Phi_1+\Phi_2=0$$

تمثل عائلة الدوائر المتقاطعة ولإيجاد أحد دوائر هذه العائلة والتي تمر بالنقطة (1,5) نعوض في هذه المعادلة عن Φ_α ، النقطة (1, 5) نحصل على

$$\lambda\left(1^2+5^2-25\right)+(1-5)^2+5^2-9=0$$
$$\therefore\ \lambda=-41$$

وبذلك تكون الدائرة المطلوبة هي :

$$10x^2+10y^2+3x=253 \qquad (*)$$

ملحوظة: يمكن أيضا إيجاد قيمة μ من المعادلة $\Phi_1+\mu\Phi_2=0$ بالتعويض بالنقطة (1,5) فنحصل على $\mu=-\frac{1}{41}$ وبهذه القيمة نحصل على نفس المعادلة (*)

المحور الأساسي لدائرتين Radical axis

المحور الأساسي لدائرتين هو المحل الهندسي للنقطة التي لها قـــدرات متســـاوية بالنسبة لدائرتين.

فإذا كان لدينا دائرتين Φ_2 , Φ_1 فإن المحور الأساسي يعطى من المعادلة

$$P_1(x, y)=P_2(x, y)$$

حيث P_α قدرة النقطة بالنسبة للدائرة $\Phi_\alpha , \alpha=1,2$.

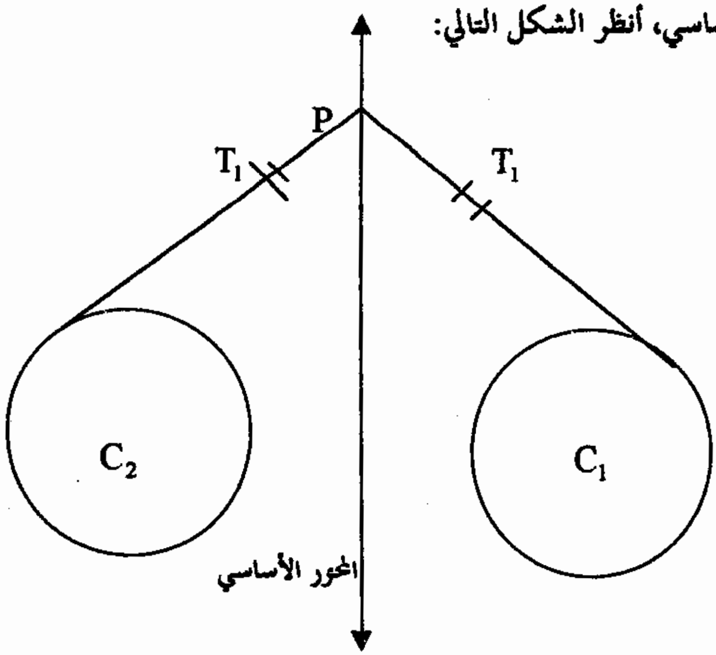
أو

$$2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y + C_1 - C_2 = 0$$

أو

$$2\langle R_o^1 - R_o^2 , R\rangle + C_1 - C_2 = 0$$

$R_o^\alpha = (a_\alpha , b_\alpha)$ إحداثيات المراكز للدائرتين $\Phi_\alpha , \alpha=1,2$ ، R نقطة عامـــة على المحور الأساسي، أنظر الشكل التالي:



ويعرف المحور الأساسي لدائرتين بأنه المحل الهندسي للنقطة التي لها قـــدرات متســـاوية للدائرتين.

نعتبر عائلة الدوائر

$$\Phi_1 + k\,\Phi_2 = 0$$

ونفرض أن الدائرتين يتقاطعان عند (a, b) ,(c, d).

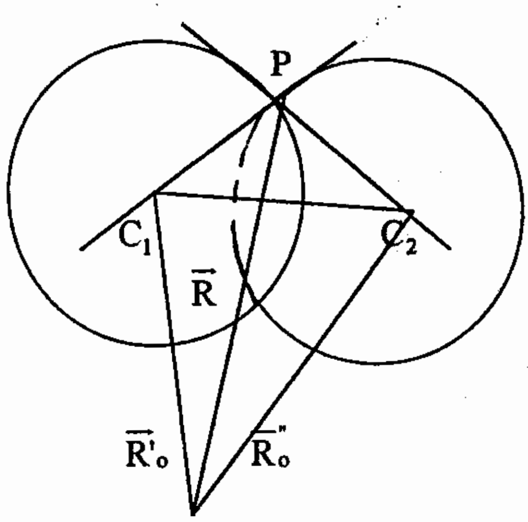
$$\therefore\ \Phi_1(a,b) = 0,\ \Phi_2(a,b) = 0,\ \Phi_1(c,d) = 0,\ \Phi_2(c,d) = 0$$

وطبقا لذلك، لجميع قيم $k \in R$ المعادلة $\Phi_1 + k\,\Phi_2 = 0$ تتحقق بالنقط (c, d), (a, b). إذن كل أعضاء العائلة يمر خلال نقط التقاطع هذه.

العنصر المتحلل Degenerate من العائلة هو ذلك الذي له $k = -1$ أي أنه هو المحور الأساسي. وهو أيضا يحتوي نقط التقاطع. ولهذا إذا تقاطع دائرتين فإن المحور الأساسي لهما ينطبق على الوتر المشترك بينهما.

الدوائر المتعامدة Orthogonal circles

نفرض أن لدينا دائرتين $\Phi_\alpha = 0, \alpha = 1, 2$ يقال أنهما متعامدان أي تتقاطعان علـى التعامد إذا كان المماس لكل منهما يحصران بينهما زاوية قائمة كما هو موضح بالشكل



واضح أن $\overrightarrow{PC_1} \perp \overrightarrow{PC_2}$ وباستخدام جبر المتجهات

$$\left\langle R - R_o', R - R_o'' \right\rangle = 0$$

$$R^2 + \left\langle R_o', R_o'' \right\rangle - \left\langle R, R_o' \right\rangle - \left\langle R, R_o'' \right\rangle = 0 \qquad (1)$$

و $\overline{R}$ متجه الموضع للنقطة P الواقعة على كل من الدائرتين Φ_1, Φ_2.

إذن

$$R^2 - \left\langle R, R_o' \right\rangle = -\frac{C_1}{2}$$

$$R^2 - \left\langle R, R_o'' \right\rangle = -\frac{C_2}{2}$$

وبالتعويض في (1) يكون

$$\left\langle R_o', R_o'' \right\rangle = \frac{C_1 + C_2}{2}$$

وهو شرط تقاطع دائرتين على التعامد أو يكافئ

$$2 a_1 a_2 + 2 b_1 b_2 = C_1 + C_2$$

حيث

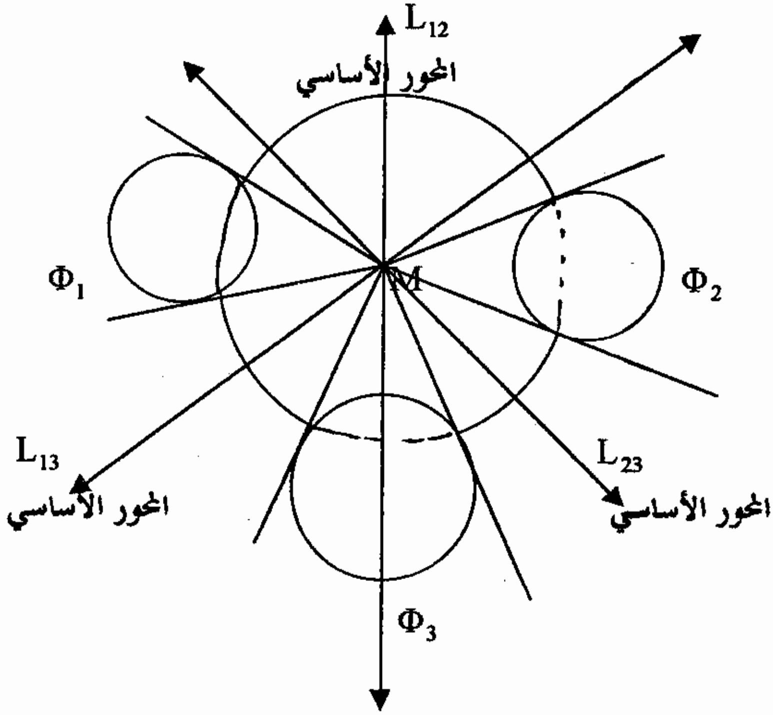
$$R_o' = (-a_1, -b_1), \; R_o'' = (-a_2, -b_2)$$

C_α هو الحد المطلق في الدائرة Φ_α.

لثلاث دوائر ليست متحدة المركز **non-concentric**

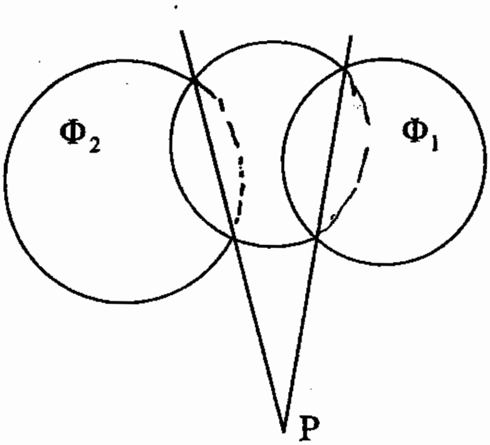
$$\Phi_i(x, y) = 0, \; i = 1, 2, 3$$

يوجد ثلاث محاور أساسية تلتقي في نقطة تسمى المركز الأساسي. وإذا كانت هذه النقطة خارجة عن الدوائر الثلاث فإن أطوال المماسات لهذه الدوائر تكون متساوية.



ويكون هذا المركز هو مركز للدائرة التي تقطع الثلاث دوائر على التعامد (تتقـاطع في زوايا قائمة) كما هو موضح بالشكل السابق.

المناقشة الأخيرة تقودنا إلى بناء بسيط للمحور الأساسي لدائرتين $\Phi_i = 0, i = 1, 2$ نرسم دائرة اختيارية تتقاطع مع Φ_1 , Φ_2 . الأوتار المشتركة بين دائرتين متقـاطعتين تلتقي عند نقطة P وهي المركز الأساسي للدوائر الثلاث وهذه النقطة تقع على المحـور الأساسي المطلوب كما هو موضح بالشكل التالي:



مثال (١) : أوجد الدائرة التي تمر بالنقطة $(0,6)$ وتمس القطع المكافئ $y=x^2$ عند النقطة $(2,4)$.

الحل: إحداثيات النقطة $(0,6)$,$(2,4)$ يجب أن تحقق المعادلة العامة للدائرة ولتكن هي:

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$
$$\therefore\ 2A+2B+C=-20$$
$$6B+C=-36$$

ومن هذه المعادلات يكون

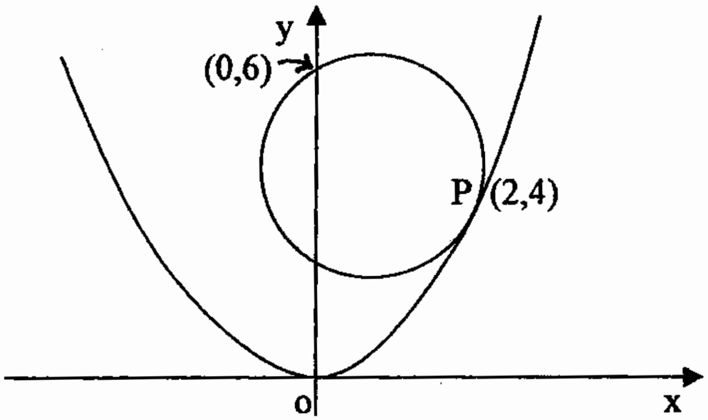
$$\therefore\ C=-36-6B\ ,\ A=B+B$$

ومعادلة الدائرة تكتب في الصورة

$$x^2+y^2+(B+B)x+By-6(6+B)=0$$

وهي تمثل عائلة من الدوائر التي تمر بالنقطة المعطاه. ونحن نعنى دائرة بعينها من هذه العائلة لها الميل عند النقطة $P(2,4)$ هو نفسه للقطع المكافئ. الميل من معادلة العائلة هو (انظر الشكل التالي).

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{8+B+2x}{2y+B}$$



ومن معادلة القطع المكافئ يكون الميل

$$\frac{dy}{dx}=2x$$

وعند النقطة (2, 4) يكون

$$-\frac{8+B+4}{8+B}=4,\quad \text{or}\quad B=-\frac{44}{5}$$

وطبقا لذلك تكون معادلة الدائرة المطلوبة هي:

$$x^2+y^2-\frac{4}{5}x-\frac{44}{5}y+\frac{84}{5}=0$$

<u>مثال (٢):</u> أوجد معادلة المحور الأساسي للدائرتين

$$(x-2)^2+(y+3)^2=25\ ;x^2+y^2=16$$

<u>الحل:</u> معادلة المحور الأساسي هي:

$$2(a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y+c_1-c_2=0$$

حيث هنا:

$$a_1=-2,\ b_1=3,c_1=-12$$
$$a_2=0,\ b_2=0,c_2=-16$$

وبالتعويض في المعادلة السابقة نحصل على:

$$2x-3y=2$$

وهذه هي المعادلة المطلوبة.

مثال(٣): أوجد المعادلة العامة للدوائر المتحدة المحور مع كل من الدائرتين

$$x^2+y^2-4x-1=0,\ \ x^2+y^2-8x+11=0$$

وأوجد معادلة الدوائر في هذه المجموعة التي تمر بالنقط (8,3).

الحل: المعادلة العامة للدوائر المتحدة المحور مع الدائرتين المعلومتين هي

$$x^2+y^2-4x-1+\lambda\left(x^2+y^2-8x+11\right)=0$$

أي

$$x^2\left(1+\lambda\right)+y^2\left(1+\lambda\right)-4x\left(1+2\lambda\right)-\left(1-11\lambda\right)=0$$

إذا مرت إحدى الدوائر بالنقطة (8,3) ينتج أن

$$4+9-32-1+\lambda\left(64+9-64+11\right)=0$$
$$\therefore\lambda=-2$$

وتكون معادلة الدائرة المطلوبة هي

$$x^2+y^2-12x+23=0$$

مجموعة الدوائر متّحدة المحور: Co-axil circles

للسهولة نأخذ المحور الأساسي لدوائر المجموعة محور الصادات.

ونظرا لأن المستقيم الواصل بين مركزي أي دائرتين من دوائر المجموعة عمودي على المحور الأساسي لهاتين الدائرتين لذلك مراكز الدوائر المتحدة المحور تقع جميعها على

مستقيم واحد عمودي على المحور الأساسي لمجموعة الدوائر ونأخذ هذا المستقيم محوراً للسينات.

المعادلة العامة لدائرة مركزها يقع على محور x هي:

$$x^2+y^2+2ax+C=0$$

ويمكن أن نثبت أن C ثابتة لجميع دوائر المجموعة وعلى ذلك يمكن كتابة معادلة أي دائرة من دوائر المجموعة على الصورة

$$x^2+y^2-2\lambda x+C=0$$

حيث C مقدار ثابت لجميع دوائر المجموعة وتتغير λ بتغير الدائرة.

توجد ثلاث حالات للدوائر المتحدة المحور:

الحالة الأولى: إذا تقاطعت الدائرتين $\Phi_2=0, \Phi_1=0$ كما في الشكل الأول فإن كل دائرة من مجموعة الدوائر المتحدة المحور الممثلة بالمعادلة $\Phi_1+K\Phi_2=0$ تمر بنقطتي تقاطع الدائرتين. لذلك تحتوي مجموعة الدوائر المتحدة المحور على دوائر تمر كلها بنقطتين ثابتتين وتسمى هذه المجموعة بالدوائر المتحدة المحور المتقاطعة.

نظراً لأن أي دائرتين تتقاطعان على المحور الأساسي وهو محو y الذي معادلته x=0، بوضع x=0 في المعادلة

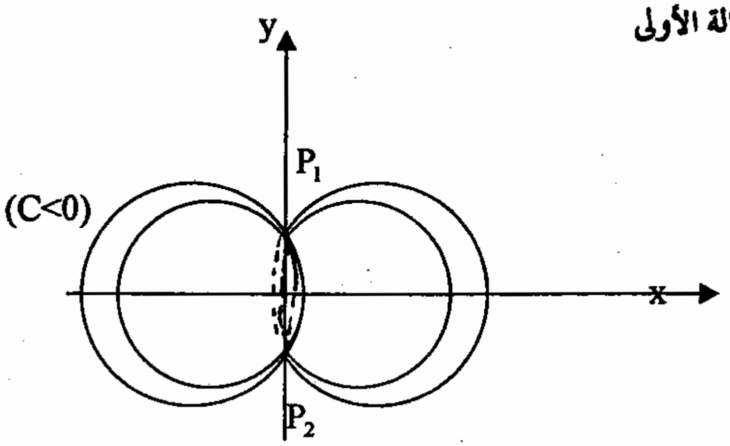
$$x^2+y^2-2\lambda x+C=0$$

ينتج أن $y^2+C=0$ أي $y=\pm\sqrt{-C}$.

وتكون نقطتي التقاطع هما $P_1\left(0,\sqrt{-C}\right), P_2\left(0,-\sqrt{-C}\right)$.

ولذلك يجب أن تكون C سالبة حتى تتقاطع دوائر المجموعة (انظر الشكل التالي)

الحالة الأولى



الحالة الثانية: إذا كانت C موجبة لا تتقاطع الدائرتان وبذلك لا تتقاطع أي دائرتين من دوائر المجموعة وتسمى هذه المجموعة بالدوائر المتحدة المحور الغير متقاطعة.

معادلة أي دائرة من دوائر المجموعة هي

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x + C = 0, C > 0$$

نصف قطر هذه الدائرة يساوي $\sqrt{\lambda^2 - C}$ ومركزها $(\lambda, 0)$ وتؤول الدائرة إلى نقطة إذا كان $\lambda^2 - C = 0$ أي $\lambda = \pm\sqrt{C}$.

وتنطبق الدائرة على مركزها وعلى ذلك فهناك دائرتان من دوائر المجموعة هما في الحقيقية نقطتان وإحداثياهما هي:

$$P_1(\sqrt{C}, 0),\ P_2(-\sqrt{C}, 0)$$

ونسمي هاتان النقطتان بالنقطتين النهائيتين لمجموعة الدوائر المتحدة المحور.

مثال: عين معادلة الدائرة (أو الدوائر) التي نصف قطرها $r = 4$ ويقع مركزها على المستقيم $4x + 3y + 7 = 0$ وتمس المستقيم $3x+4y+34=0$.

الحل: متروك للطالب كتمرين.

الحالة الثالثة: إذا كان C=0 فإن معادلة أي دائرة من دوائر المجموعة تؤول إلى

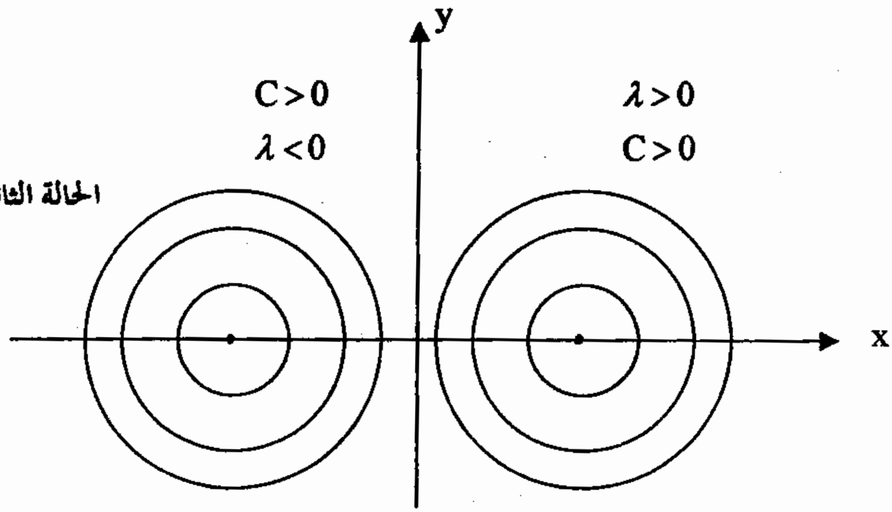
$$x^2 + y^2 - 2\lambda x = 0$$

أي

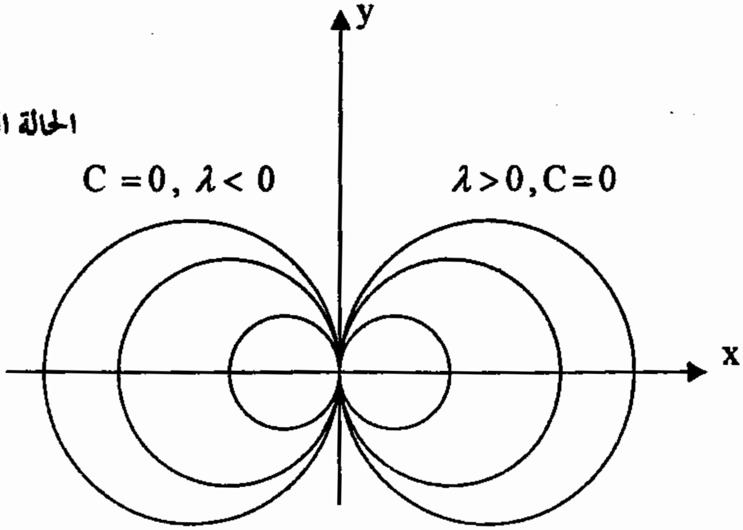
$$(x - \lambda)^2 + y^2 = \lambda^2$$

لذلك تمثل المجموعة الدوائر تمس محور y (المحور الأساسي) عند نقطة الأصل كما هو موضح بالرسم.

الحالة الثانية



الحالة الثالثة



<u>مثال:</u> أثبت أن الدائرتين

$$x^2+y^2-12x+50=0,\quad x^2+y^2-25=0$$

متماستان وعين معادلة الدائرة التي تمر بنقطة التماس وبالنقطة (3,1).

<u>الحل:</u> متروك للطالب كتمرين.

تمارين

١ـــ عين نقاط تقاطع الدائرة

$$\langle\vec{R},\vec{R}\rangle-\langle\vec{R},\vec{R}_o\rangle=6\ ,\ \vec{R}_o=(1,3)$$

والمستقيم

$$\langle\vec{R},\vec{R}_1\rangle=9,\ \vec{R}_1=(4,-1),\vec{R}=(x,y)$$

٢ـــ عين نقاط تقاطع الدائرتين

$$\langle\vec{R},\vec{R}\rangle+\langle\vec{R},\vec{R}_1\rangle=15$$

$$\langle\vec{R},\vec{R}\rangle+\langle\vec{R},\vec{R}_2\rangle=26$$

حيث $\vec{R}_1=(2,-1),\vec{R}_2=(5,1)$

٣ـــ أكتب معادلة الدائرة المرسومة حول المثلث الذي رؤوسه (1,-1) ,(0,5) ,(2,3)

٤ـــ أكتب معادلة الدائرة المرسومة حول المثلث الذي أضلاعه

$x-y=0,\ x+2y=0,\ 4x+y=25$

٥ـــ عين معادلة الدائرة التي تمر بالنقطة (0,4) وتمس المستقيمين

$2x-3y-1=0,\ 2x+3y+13=0$

٦ــ عين معادلة الدائرة التي تمس المستقيمين

$$L_1 : x - y - 6 = 0,\ L_2 : x + y = 0$$

ويقع مركزها على المستقيم $L_3 : 3x - y + 3 = 0$

٧ــ عين معادلة الدائرة التي تمس المستقيم x-3y=0 عند نقطة الأصل ويقع مركزهــا على المستقيم 2x+y+1=0.

٨ــ عين معادلة الدائرة التي تمس الدائرة

$$\overrightarrow{R^2} - 2\left\langle \vec{R}, \vec{R}_o \right\rangle + 112 = 0, \vec{R}_o = (4,11)$$

والمستقيم $\left\langle \vec{R}, \vec{R}_1 \right\rangle + 19 = 0 \quad \vec{R}_1 = (3,4),$ ونصف قطرها 5.

٩ــ عين معادلة عائلة الدوائر التي تمر بتقاطع الدائرتين

$$\overrightarrow{R^2} - 2\left\langle \vec{R}, \vec{R}_1 \right\rangle - 24 = 0$$

$$\overrightarrow{R^2} - 2\left\langle \vec{R}, \vec{R}_2 \right\rangle - 2 = 0$$

حيث $\vec{R}_1 = (1,0), \vec{R}_2 = (-5,-3)$

ثم عين الدائرة التي تمر بنقطة الأصل وتنتمي لنفس العائلة.

١٠ــ عين معادلة الدائرة التي تمر بتقاطع الدائرتين

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0,\ x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$$

وتمر كذلك بالنقطة (1,2).

١١ــ اثبت أن الدائرتين $r = a\cos a$, $r = b\sin a$ يتقاطعان على التعامد.

١٢ــ اثبت أن المحور الأساسي لدائرتين يكون عمودياً على خط المركزين.

١٣ــ اوجد معادلة المحور الأساسي للدائرتين

$$\overline{R^2}-2\left\langle\overline{R},\overline{R}_1\right\rangle-1=0$$
$$\overline{R^2}-2\left\langle\overline{R},\overline{R}_2\right\rangle=3$$

حيث $\overline{R}_2=\left(-1,\frac{3}{2}\right)$, $\overline{R}_1=\left(1,-\frac{3}{2}\right)$.

١٤ــ اوجد إحداثيات المركز الأساسي للدوائر الآتية

a) $x^2+y^2=x, x^2+y^2=y, x^2+y^2-2x+4y-3=0$

b) $x^2+y^2-x-y=0, x^2+y^2-2x+4y-1=0, x^2+y^2-4x-5=0$

١٥ــ اوجد معادلة الدائرة المتعامدة على الثلاث دوائر في 14(a), 14 (b)

١٦ــ أوجد المحل الهندسي للنقطة $P\in R^2$ بحيث أن المسافة من P إلى نقطة الأصل تساوى k مرة المسافة من P إلى (1,0).

١٧ــ بين أن العمودي على الدائرة $x^2+y^2=a^2$ عند أي نقطة يمر خلال نقطة الأصل.