الباب الأول

Families of Straight Lines عائلات الخطوط المستقيمة

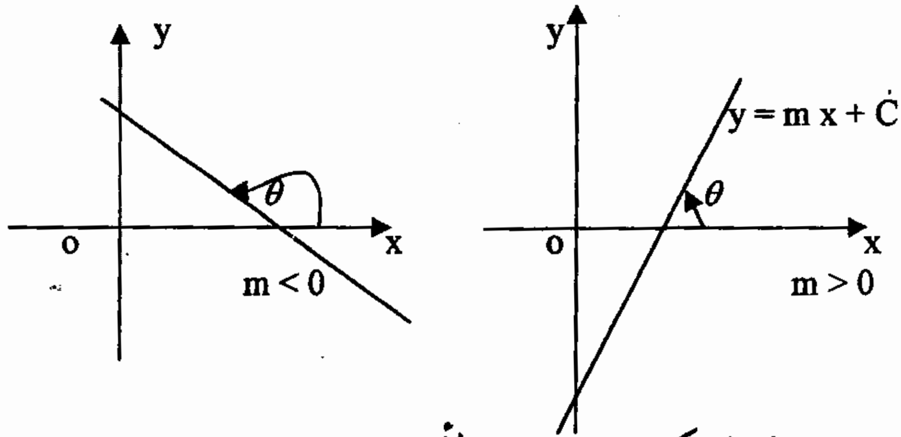
من دراستك السابقة تعلم أن الخط المستقيم يعطى من خلال معادلة من الدرجة الأولى في x, y كالآتي

$$A x + B y + C = 0$$

أو ما يكافئ

$$y = m x + b$$

حيث m ميل الخط المستقيم Slope، b الجزء المقطوع من محور y intercept



(٣ . ١) المستقيم كمنحني من الرتبة الأولى: Linear Curve

نظرية (١): يعرف كل مستقيم في الإحداثيات الكرتيزية بمعادلة من الدرجة الأولى، والعكس تعرف كل معادلة من الدرجة الأولى مستقيما ما.

الإثبات: نثبت أولا الجزء الأول من منطوق النظرية. نفرض أن لدينا مستقيم اختياري، إذا لم يكن هذا المستقيم عموديا على المحور ox فإنه يعرف بمعادلة على الصورة

$y=kx+b$، أي بمعادلة من الدرجة الأولى. وإذا كان المستقيم متعامد مع المحـــور ox، تكون لكل نقطة إحداثيات أفقية متساوية مقدارها وليكن a وتصبح معادلـــة الخـــط المستقيم $x=a$، وهي أيضاً معادلة من الدرجة الأولى.

وبذلك يعرف كل مستقيم في الإحداثيات الكرتيزية بمعادلة من الدرجة الأولى، وهكذا أثبتنا الجزء الأول من منطوق النظرية.

نثبت العكس، فنفرض أنه معطاه معادلة من الدرجة الأولى:

$$A x+B y+C=0, A, B, C \in R \qquad (1)$$

وإذا كانت $B \neq 0$ فإنه يمكن أن تأخذ المعادلة (1) الصورة:

$$y=-\frac{A}{B} x-\frac{C}{B}$$

وهي معادلة مستقيم ميله $-A / B$ ويقطع من محور oy جزء $-C/B$.

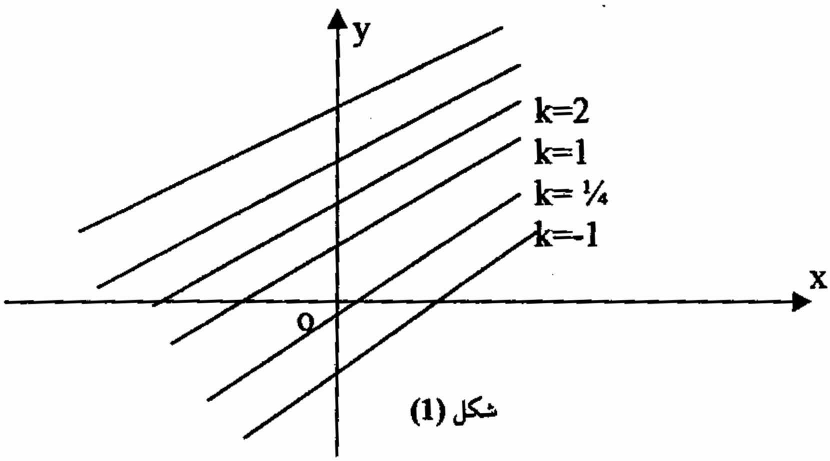
وإذا كانت $B=0$ فإن المعادلة تصبح $x = -C/A$، وهكذا تحدد كـــل معادلـــة مـــن الدرجة الأولى مستقيماً. وبذلك أثبتت النظرية.

وكما نعلم تسمى المنحنيات التي تعرف بمعادلات من الدرجة الأولى بالمنحنيات مـــن الرتبة الأولى، وبالتالي يكون: كل مستقيم هو منحنى من الرتبة الأولى، وكل منحنى من الرتبة الأولى هو مستقيم.

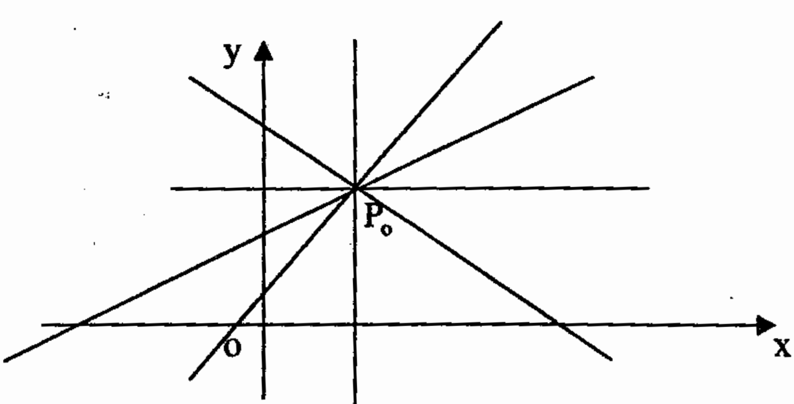
(٣ . ٢): عائلة الخطوط المستقيمة: **Family of lines**

الخط المستقيم $L(m, b)=\{(x, y) \mid y=m x+b\}$ يعتمد على بـــارامترين m, b . في هذه الحالة إذا أعطيت قيمة محددة لأحد البارامترات فإنه لأي قيمة يأخذها البارامتر الثاني يمكن تحديد خط مستقيم. هذه الفئة من الخطوط المستقيمة تسمى عائلة الخطوط المستقيمة.

مثال (١): عائلة الخطوط المستقيمة $L(k)=\{(x,y)\mid y=2x+k\}$ تمثل فئة كــــل المستقيمات المتوازية والتي لها الميل $m=2$ دائماً وتقطع جزء مقداره k مـــن محـــور y حيث k تأخذ كل القيم الممكنة من R ويسمى بارامتر العائلة وتسمى عائلة الخطـــوط المتوازية كما في شكل (1).



شكل (1)



شكل (2)

(٣ . ٣) حزمة المستقيمات: Pencil of lines

تسمى عائلة الخطوط المستقيمة في المستوى التي تمر بنقطة ما $P_o\left(x_o, y_o\right)$ بحزمة مستقيمات مركزها P_o كما في شكل (2)، وكثيراً ما تقابلنا في الهندسة التحليلية ضرورة حل المسألة الآتية: بمعلومية معادلتي مستقيمين من الحزمة، يطلب تعين معادلة مستقيم ثالث من نفس الحزمة، بشرط أن أتجاه هذا المستقيم الثالث محدد بهذه الطريقة أو تلك.

ويمكن حل المسائل من هذا النوع باستخدام المعادلة

$$y - y_1 = k\left(x - x_1\right)$$

حيث بمثابة x_1 , y_1 يجب أخذ الإحداثيين x_o , y_o لمركز الحزمة (الميل k يعين وفقاً للطريقة التي يعطى بها أتجاه المستقيم المطلوب).

غير أننا عند ذلك نضطر مسبقاً إلى حساب إحداثي $\left(x_o, y_o\right)$ مركز الحزمة.

وهنا نعطى نظرية تجنبنا حساب $\left(x_o, y_o\right)$:

نظرية (٢): نفرض أن $A_i\, x + B_i\, y + C_i = 0 , i = 1, 2$ معادلتا مستقيمين متقاطعين في نقطة P_o وأن α, β عددان لا يساويان الصفر في آن واحد، وعندئذ تكون:

$$\alpha\left(A_1\, x + B_1\, y + C_1\right) + \beta\left(A_2\, x + B_2\, y + C_2\right) = 0 \qquad (1)$$

هي معادلة مستقيم يمر بالنقطة $P_o\left(x_o , y_o\right)$.

الاثبات: نثبت أولاً أن العلاقة (1) هي بالفعل عبارة عن معادلة خط مستقيم، ولهذا نكتبها في الصورة:

$$\left(\alpha A_1 + \beta A_2\right)x + \left(\alpha B_1 + \beta B_2\right)y + \left(\alpha C_1 + \beta C_2\right) = 0 \qquad (2)$$

ثم نثبت أن المقدارين $\alpha A_1 + \beta A_2 , \alpha B_1 + \beta B_2$ لا يمكن أن يساويا الصفر معا في آن واحد. نفرض العكس، أي أن

$$\alpha A_1 + \beta A_2 = 0, \alpha B_1 + \beta B_2 = 0$$

ولكن عندئذ يكون

$$\frac{A_1}{A_2} = -\frac{\beta}{\alpha}, \frac{B_1}{B_2} = -\frac{\beta}{\alpha}$$

وحيث α, β لا يمكن أن يساويا الصفر في آن واحد، فإن العلاقة β/α لا يمكن أن تكون غير محددة. ولذا ينتج من المتساويتين السابقتين التناسب $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ غير أن المعاملين A_1, B_1 لا يمكن أن يتناسبا مع المعاملين A_2, B_2 لأن المستقيمين المعطيين يتقاطعان. وهكذا نضطر إلى رفض ما افترضناه. وهكذا فإن المقدارين $\alpha A_1 + \beta A_2, \alpha B_1 + \beta B_2$ لا يمكن أن يعدما في آن واحد، وهذا يعني أن المعادلة (2) هي معادلة خطية في المتغيرين (x, y) . وبعد ذلك فمن الواضح مباشرة أنها معادلة من الدرجة الأولى، وبالتالي فهي تعرف مستقيماً ما. ويبقى علينا أن نثبت أن هذا المستقيم يمر بالنقطة P_o. وحيث أن كلاً من المستقيمين المعطيين يمر بالنقطة P_o فإن

$$A_i x_o + B_i y_o + C_i = 0, i = 1, 2$$

ومن هنا نجد أن

$$\alpha(A_1 x_o + B_1 y_o + C_1) + \beta(A_2 x_o + B_2 y_o + C_2) = 0$$

وبهذا نرى أن احداثي النقطة P_o يحققان المعادلة (1)، وبالتالي يمر المستقيم المعرف بالمعادلة (1) بالنقطة P_o وبذلك نكون قد توصلنا إلى إثبات النظرية.

وهكذا فإن المعادلة (1) بأية قيمتين $\alpha, \beta \in R$ حيث $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ تصف مستقيمات الحزمة التي مركزها P_o.

الآن نثبت أنه يمكن دائماً في المعادلة (1) اختيار العددين α, β بحيث تعرف المعادلة أي مستقيم (محدد مسبقاً) من مستقيمات الحزمة التي مركزها P_o . حيث أن أي

مستقيم من الحزمة ذات المركز P_o يتحدد علاوة على النقطة P_o بنقطة أخرى على هذا المستقيم.

فيكفي لإثبات الحقيقة السابقة أن نثبت أن في المعادلة(1) يمكن دائماً اختيار العددين α, β بحيث يمر المستقيم المحدد بالمعادلة (1) بأية نقطة معطاه مسبقاً $P_1(x_1, y_1)$.

يمر المستقيم المعرف بالمعادلة (1) بالنقطة P_1، إذا حققت إحداثيات النقطة P_o هذه المعادلة، أي إذا كان:

$$\alpha\left(A_1 x_1+B_1 y_1+C_1\right)+\beta\left(A_2 x_1+B_2 y_1+C_2\right)=0 \qquad (3)$$

وسنعتبر أن النقطة P_1 لا تنطبق على النقطة P_o أي أن $(x_o, y_o) \neq (x_1, y_1)$ عندئذ يكون ولو واحد من العددين

$$A_1 x_1+B_1 y_1+C_1 \quad , A_2 x_2+B_2 y_2+C_2$$

لا يساوي صفرا، وبالتالي لا تعتبر المتساوية (3) متطابقة، وإنما معادلة، وبالذات معادلة من الدرجة الأولى في مجهولين α, β، ولتعيين α, β يجب إعطاء أحدهما قيمة عددية اختيارية ثم حساب الآخر من المعادلة السابقة (3)، فعلى سبيل المثال، إذ كان $A_2 x_1+B_2 y_1+C_2 \neq 0$ فإن α يمكن أن تؤخذ إختياريا بأية قيمة غير مساوية للصفر، أما β فتحدد وفقا للمتساوية

$$\beta=-\alpha\left(A_1 x_1+B_1 y_1+C_1\right)/\left(A_2 x_1+B_2 y_2+C_2\right)$$

وهكذا يمكن بمعادلة على الصورة (1) تحديد المستقيم المار بأية نقطة في المستوى مذكورة مسبقا، وهذا يعنى تحديد أي مستقيم من مستقيمات الحزمة ذات المركز P_o. ولهذا تسمى المعادلة (1) بمعادلة حزمة المستقيمات التي مركزها P_o.

إذا كان $\alpha \neq 0$ فيوضع $\lambda=\beta / \alpha$ نحصل من المعادلة (1) على:

$$A_1 x+B_1 y+C_1+\lambda\left(A_2 x+B_2 y+C_2\right)=0 \qquad (4)$$

وحيث أننا عند الانتقال من المعادلة (1) إلى المعادلة (4) نستثني حالة $\alpha = 0$، فإن المعادلة (4) لا يمكن أن تحدد المستقيم $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ ، أي أن المعادلة على الصورة (4) عند قيم λ المختلفة، تحدد جميع مستقيمات الحزمة فيما عدا واحد (الثاني من المستقيمين المعطيين). ناقش الحالة التي فيها $\lambda \longrightarrow \infty$ ؟

مثال (٢): كون معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين

$$7 x + 15 y + 1 = 0, \; 2 x + 3 y - 5 = 0$$

وعمودياً على المستقيم $12 x - 5 y - 1 = 0$.

الحل: قبل كل شئ نتحقق من أن المستقيمان المعطيان يتقاطعان بالفعل، لأن $2/7 \neq 3/15$ ، وبعد ذلك نكون معادلة حزمة مستقيمات التي مركزها P_o:

$$2 x + 3 y - 5 + \lambda (7 x + 15 y + 1) = 0 \qquad (5)$$

ولكي نعين من هذه الحزمة المستقيم المطلوب، نحسب λ وفقاً لشروط تعامد هذا المستقيم مع المستقيم $12 x - 5 y - 1 = 0$

ونكتب المعادلة (5) على الصورة

$$(2 + 7 \lambda) x + (3 + 15) y + (-5 + \lambda) = 0 \qquad (6)$$

ومن شرط تعامد المستقيم (6) مع المستقيم المعطى نحصل على $\lambda = -1$ وبالتالي المستقيم (6) المطلوب هو

$$5 x + 12 y + 6 = 0$$

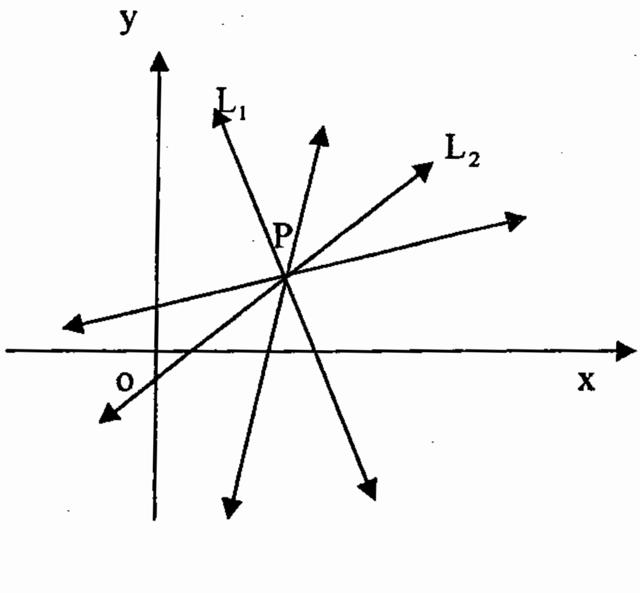
مثال (٣): عائلة الخطوط المستقيمة $y - 1 = m(x - 2), m \in R$ تمر بالنقطة $(2,1)$ لجميع قيم $m \in R$ لهذا المعادلة $y - 1 = m (x-2)$ تحدد كل الخطوط المستقيمة التي تمر بالنقطة $(2, 1)$ فيما عدا المستقيم $x=2$.

مثال (٤): عائلات المستقيمات $\forall k \in R , x-2y=k , 2x+y=k$ تمثل شبكة من الخطوط المستقيمة في المستوى. وذلك لأن العائلة $2x+y=k$ تمثل مجموعة المستقيمات المتوازية والتي لها الميل يساوي -2 والعائلة $x-2y=k$ تمثل مجموعة المستقيمات المتوازية والتي لها الميل يساوي ½. وكل من هذه العائلات متعامدة مع الأخرى.

مثال (٥): حزمة الخطوط $2x+y-7+k(3x-y-3)=0, k \in R$ معرفة من خلال زوج الخطوط المستقيمة L_1, L_2 حيث

$$L_1 : 2x+y-7=0 , \; L_2 : 3x-y-3=0$$

ونفرض أن (a, b) هي نقطة تقاطعهما. إذن $x = a$, $y = b$ تحقق كل منهم وبالتالي تكون رأس الحزمة هي $P(2, 3)$.



نظرية (٣): الشرط الضروري والكافي كي تتقاطع المستقيمات

$$L_i = a_i\, x + b_i\, y + c_i = 0, i = 1, 2, 3 \qquad (*)$$

الثلاث في نقطة هو أن

$$D \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

بحيث لا يكون خطين منهم متوازيين وهذا يعنى أن مرتبة **(Rank)** مصفوفة المعاملات تساوي 2.

الشرط الضروري: إذا تقاطع المستقيمات الثلاث في نقطة فإن الحل المشترك لمعـــادلتين يحقق المعادلـــة الثالثـــة، أي أن إحداثيـــات نقطـــة التقــاطع (x, y) للمســـتقيمين $L_\alpha\,, \alpha = 1, 2$.

$$L_\alpha : a_\alpha\, x + b_\alpha\, y + c_\alpha\,,\ \alpha = 1, 2$$

أي أن

$$x = -\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}\,,\quad y = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad \text{(طريقة Cramar)}$$

يجب أن يحقق المعادلة $a_3\, x + b_3\, y + c_3 = 0$ إذن

$$-a_3 \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (**)$$

وهذا هو مفكوك المحدد D أي أن D=0 أي أن المصفوفة التي تتبع هذا المحدد لها المرتبة 2. وهذا يعنى أن النظام (*) متفق أو متوافق **(Consistant)**.

<u>الشرط الكافي:</u> نفرض أن $D = 0$ إذن

$$a_3\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} + b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

وحيث أن $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ فإننا نحصل على المعادلة (**) وهي شرط أن إحداثيات نقطة تقاطع مستقيمين تحقق معادلة المستقيم الثالث ولهذا المستقيمات الثلاثة متلاقية **Concurrent**. على الطالب أن يبرهن هذه النظرية باستخدام مرتبة المصفوفة.

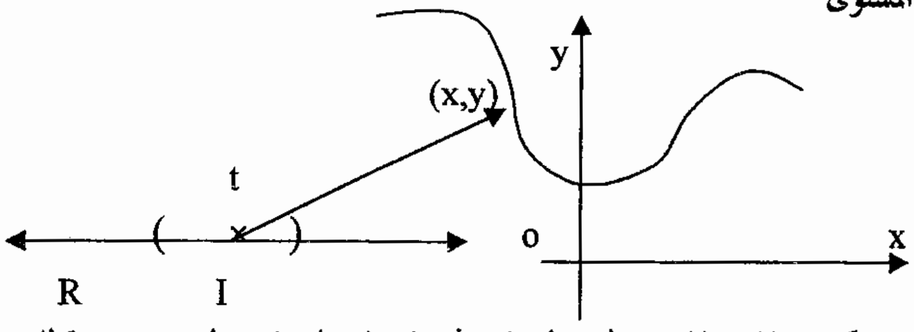
<u>(٣ . ٤) المعادلات البارامترية للخط المستقيم</u> : Parametric equations

نفرض أن لدينا معادلة خط مستقيم $y = m\,x + c$ وفرضنا أن $x = t, t \in R$ ولجميع قيم t الحقيقية نحصل على $y = m\,t + c$ وبالتالي لأي قيمة t تنتمي إلى R أو جزء من R توجد نقطة $(t, m\,t + c)$ على الخط المستقيم وبالتالي زوج المعادلات

$$x = t\,,\, y = m\,t + c\,,\, \forall\, t \in R \qquad \textbf{(1)}$$

تعرف خط مستقيم والمعادلات **(1)** تسمى المعادلات البارامترية.

وعموما المعادلات $y = y(t), x = x(t), t \in R$ تعرف معادلات بارامترية لمنحنى في المستوى



وإذا كانت $y(t), x(t)$ دوال خطية في t نحصل على المعادلات البارامترية للخط المستقيم.

فمثلا إذا كانت

$$\begin{cases} x = a_1 + b_1 t \\ y = a_2 + b_2 t \end{cases}, \quad t \in R \qquad (2)$$

فإن

$$\frac{x - a_1}{b_1} = \frac{y - a_2}{b_2} = t \qquad (3)$$

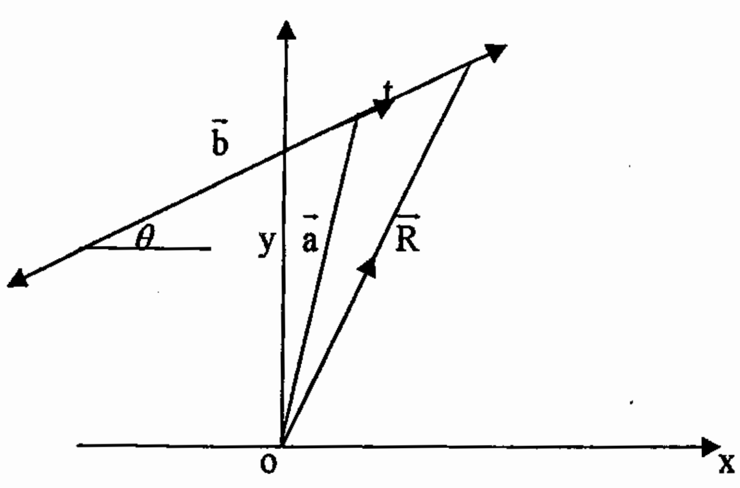
المعادلات (3) تسمى المعـــادلات القانونيـــة **(Canonical equations)** للخـــط المستقيم وإذا فرضنا

$$\bar{a} = (a_1, a_2), \bar{b} = (b_1, b_2), \bar{R} = (x, y)$$

تمثل متجهات في المستوى فإن العلاقات (2) تكتب في الصورة الإتجاهية

$$\bar{R} = \bar{a} + t\,\bar{b}$$

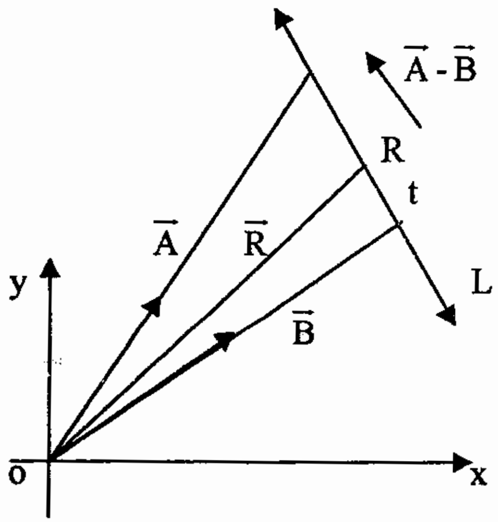
أو المتجه $\bar{R} - \bar{a}$ يوازي المتجه $\bar{b}$ و $\bar{a}$ متجه الموضع لنقطة عليه والمتجه $\bar{b}$ يســـمى إتجاه الخط المستقيم حيث $\theta, \tan\theta = \dfrac{b_2}{b_1}$ الزاوية التي يصنعها الخط المستقيم مـــع الإتجاه الثابت وليكن محور x كما هو موضح بالشكل.



من هذا العرض يتبين أن الخط المستقيم يتحدد تماما بمعلومية نقطة عليه واتجاه يوازيـــة.
وأي اتجاه يتحدد إذا علمت عليه نقطتين وبذلك نكون قد توصلنا إلى الآتي:
الخط المستقيم يتحدد تحديدا تاما إذا علمت عليه نقطتين.

مثال (١): نفرض أن A,B نقطتين على خط مستقيم لهما متجهات الموضـــع $\vec{A}, \vec{B}$
أوجد معادلة الخط المستقيم.

الحل: إتجاه الخط المستقيم هو $\vec{A}-\vec{B}$ أو $\vec{B}-\vec{A}$.



من هندسة الشكل يكون

$$\vec{R}=\vec{B}+t\left(\vec{A}-\vec{B}\right)$$

وإذا كانت $A=(1,-2)$, $B=(-5,3)$ فإن $\vec{R}=(x,y)$ تعطى من

$$(x,y)=(-5,3)+t\,(6,-5)$$

أو

$$x=-5+6t$$

$y = 3 - 5\,t$

وهما المعادلات البارامترية للخط المستقيم L.

بحذف t نحصل على

$$\frac{x+5}{6} = \frac{y-3}{-5}$$

أو

$5\,(x+5) + 6(y-3)$

أو

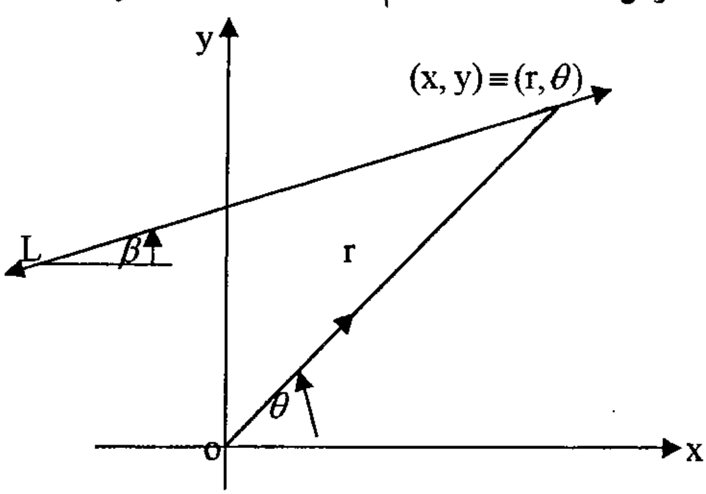
$5\,x + 6\,y + 7 = 0$

وهي المعادلة الكرتيزية للخط المستقيم.

(٣ . ٥) معادلة الخط المستقيم في الصورة القطبية في الحالة العامة:

Polar equation of straight line

نفرض أن لدينا خط مستقيم معادلته $L : A\,x + B\,y + C = 0$



من العلاقات التي تربط الإحداثيات القطبية (r,θ) بالإحداثيات الكرتيزية (x,y) يكون لدينا

$$r\left(A\cos\theta + B\sin\theta\right) + C = 0$$

أو

$$r = \frac{-C}{A\cos\theta + B\sin\theta}$$

بالقسمة على $\sqrt{A^2+B^2}$ كل من البسط والمقام يكون لدينا

$$r = \frac{-C/\sqrt{A^2+B^2}}{\cos\alpha\ \cos\theta + \sin\alpha\sin\theta} = \frac{\ell}{\cos(\theta-\alpha)}$$

أو

$$\ell = r\cos(\theta-\alpha) \qquad (*)$$

حيث $\ell = -C/\sqrt{A^2+B^2}\ ,\alpha = \tan^{-1}\frac{B}{A}$

العلاقة (*) حصلنا عليها بمعرفة معادلة الخط في الصيغة الكرتيزية ومن معادلة الخط المستقيم (1) نجد أن

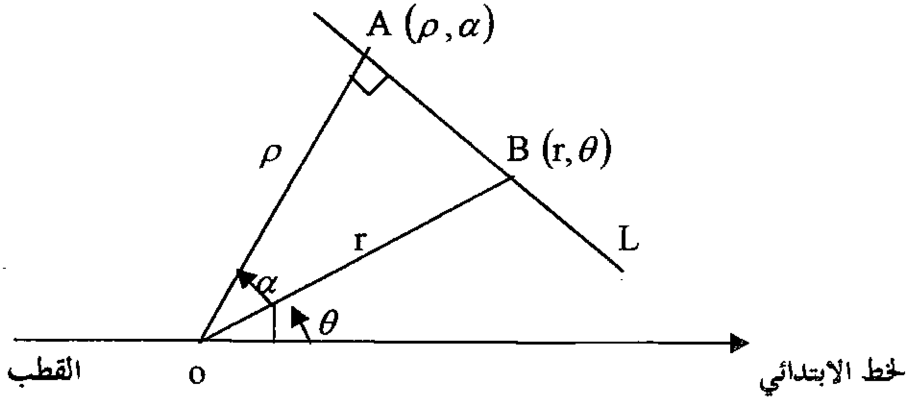
$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

ميله $\tan\beta = \frac{-A}{B} = \frac{-1}{\tan\alpha} = \cot\alpha$ أو $\tan\alpha\tan\beta = -1$

حيث β زاوية ميل الخط على محور السينات و α زاوية ميل خط مستقيم عمودي $\vec{n}$ **normal line** على الخط L.

(٣ . ٦) معادلة الخط المستقيم بدلالة طول العمود الساقط عليه من القطب:

نفرض أن A موقع العمود الساقط من القطب على الخط وأن إحداثياتها القطبية (ρ,α)، نأخذ نقطة عامة $B(r,\theta)$ على الخط L ومن هندسة الشكل يكون لدينا :



$$\cos(\alpha - \theta) = \cos(\theta - \alpha) = \frac{\rho}{r}$$

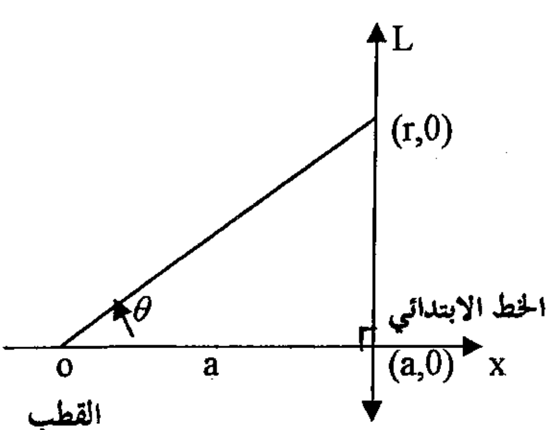
أو $\rho = r\cos(\theta - \alpha)$ أو $r = \rho\sec(\theta - \alpha)$

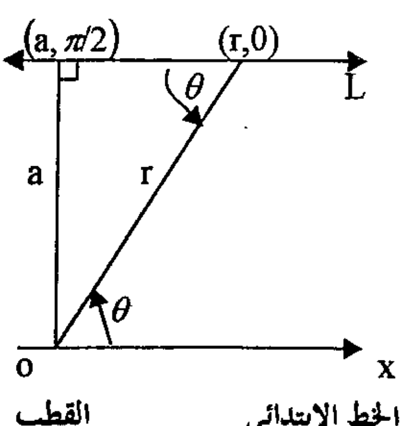
وهي نفس المعادلة (*) ولكن حصلنا عليها من خلال معرفة موقع العمود الساقط عليه من نقطة الأصل.

حالات خاصة:

خط يوازي الخط القطبي $\quad$ (i) $r = a\,\mathrm{cosec}\,\theta \;, \alpha = \frac{\pi}{2}$

خط عمودي على الخط القطبي $\quad$ (ii) $r = a\sec\theta ,\; \alpha = 0$





(٣ . ٧) الصورة العمودية للخط المستقيم:

نفرض أن لدينا مستقيم $A\,x + B\,y + C = 0$ بالقسمة على $\sqrt{A^2 + B^2}$ نحصل على

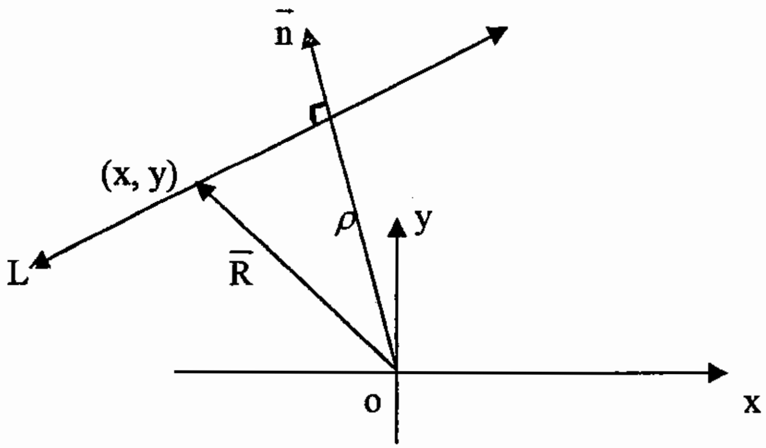
$$\cos\alpha\;x + \sin\alpha\;y = \rho$$

$$\rho = \frac{|-C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}\;,\; \tan\alpha = \frac{B}{A}$$

أو

$$\ell\,x + m\,y = \rho \qquad (*)$$

حيث $\ell^2 + m^2 = 1$ أي (ℓ, m) جيوب تمام اتجاه العمودي $\overline{n}$ على الخط المستقيم وبالتالي ρ تصبح طول العمود الساقط على الخط L من نقطة الأصل كما هو موضح بالرسم.



المعادلة (*) تسمى الصورة العمودية لمعادلة الخط المستقيم **normal form** حيث

$$\rho = \langle \underline{R}, \underline{n} \rangle = Pr_{\overline{n}}\,\overline{R}$$

وعموما يكون لدينا النظرية الآتية:

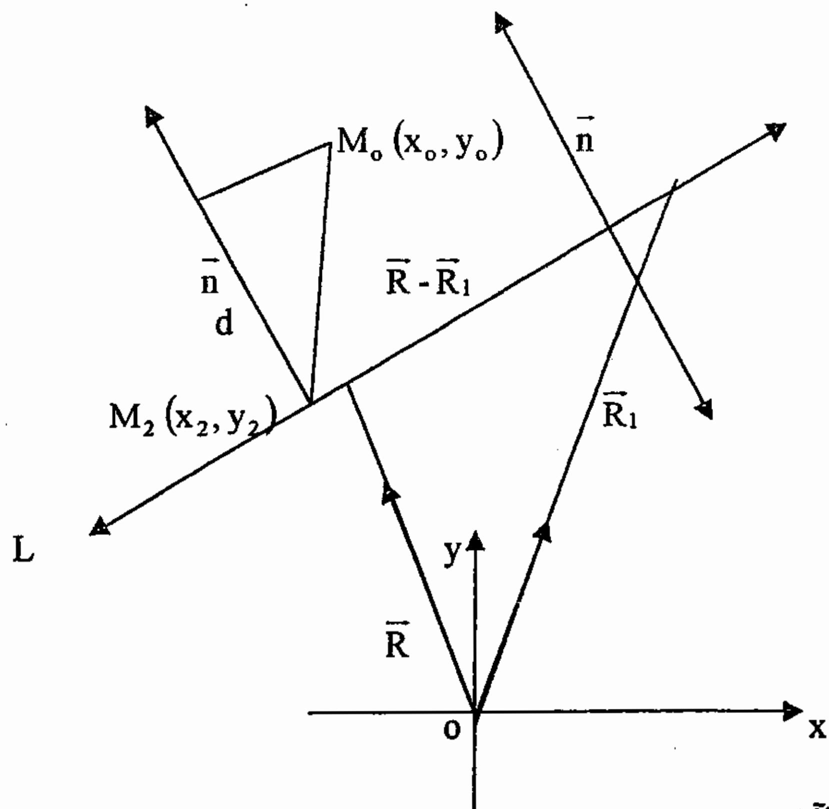
نظرية (٤): طول العمود الساقط d من النقطة $\vec{R}_o\,(x_o, y_o)$ على المستقيم

$$L : A\,x + B\,y + C = 0$$

يعطى من العلاقة

$$d = \frac{|A\,x_o + B\,y_o + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

البرهان: نفرض أن المستقيم $L : A\,x + B\,y + C = 0$ والعمــودي عليــه $\underline{n} = (A, B)$ وتعين نقطة على L ولتكن $\vec{R}_1\,(x_1, y_1)$ ، ونقطة عامــة $\vec{R}\,(x, y)$ ومن هندسة الشكل يمكن كتابة معادلة الخط المستقيم L في صورة إتجاهية



كالآتي:

$$\left\langle \vec{R} - \vec{R_1}, \vec{n} \right\rangle = 0$$

حيث $\vec{R} - \vec{R}_1$ متجه يوازي L.

أو ما يكافئ

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$$

أو

$$Ax + By - Ax_1 - By_1 = 0$$

أو

$$L : Ax + By + C = 0$$

إذن معاملات x , y هي نسب اتجاه العمودي على الخط L.

متجه الوحدة في اتجاه n هي
$$\underline{e} = \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)$$

وتكون d هي مسقط المتجه $\overline{M_2 M_o}$ على $\vec{e}$ حيث M_2 أي نقطة معلومة على L

وعليه فإن d تعطى من

$$d = \left| \left\langle \overline{M_2 M_o}, \underline{e} \right\rangle \right|$$
$$= \left| \left\langle (x_o - x_2 , y_o - y_2), \underline{e} \right\rangle \right|$$
$$= \frac{\left| A(x_o - x_2) + B(y_o - y_2) \right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$
$$d = \frac{\left| Ax_o + By_o - (Ax_2 + By_2) \right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

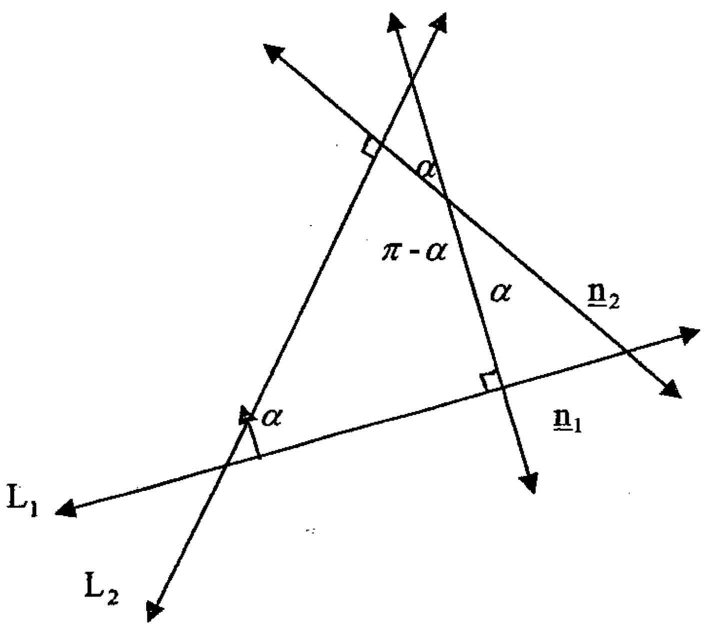
ولكن $M_2 \in L$ إذن (x_2 , y_2) تحقق معادلة L أي أن

$$Ax_2 + By_2 = -C$$
$$d = \frac{\left| Ax_o + By_o + C \right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

وهو المطلوب.

(٣ . ٨) الزاوية بين خطين مستقيمين The angle between two lines

الزاوية بين الخطين L_1 , L_2 تعرف بإستخدام حاصل الضرب القياسي Inner product على أنها الزاوية بين العمودين n_1 , n_2 على الخطين L_1 , L_2 على الترتيب كما هو موضح بالرسم:



نظرية (٥): الزاوية α بين $L_1 L_2$ تعطى من

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{\langle \vec{n}_1 , \vec{n}_2 \rangle}{\|\vec{n}_1\| \ \|\vec{n}_2\|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\ \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

البرهان: نفرض أن لدينا خطين $L_\alpha , \alpha = 1, 2$ لهما المعادلات

$$L_\alpha : A_\alpha x + B_\alpha y + C_\alpha , \ \alpha = 1, 2$$

تكون الأعمدة $\bar{n}_\alpha$ في الصورة

$$\vec{n}_\alpha = (A_\alpha , B_\alpha), \alpha = 1, 2$$

طول $\overline{n}_\alpha$ يعرف من

$$\left\|\vec{n}_\alpha\right\| = \sqrt{A_\alpha^2 + B_\alpha^2} \ , \alpha = 1, 2$$
$$\left\langle \vec{n}_1 , \vec{n}_2 \right\rangle = A_1 A_2 + B_1 B_2$$
$$\left\langle \vec{n}_1 , \vec{n}_2 \right\rangle = \left\|\vec{n}_1\right\| \left\|\vec{n}_2\right\| \cos\alpha$$

ومنها نحصل على المطلوب.

نتيجة: يقال أن الخطان L_α متعامدان **Perpendicular** $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$ إذا تحقق $\left\langle \vec{n}_1 , \vec{n}_2 \right\rangle = 0$ أو $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$.

والخطان متوازيان **Parallel** $(\alpha = 0)$ إذا تحقق $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 1$

(٣ . ٩) أزواج الخطوط المستقيمة **Pairs of straight lines**

دعنا نلتقط زوج من عائلات الخطوط المستقيمة الموجودة في المستوى وأعضاء الزوج ترتبط بعلاقة ما مثل التقاطع في نقطة أو متعامدين أو متوازيين فمثلاً للمعادلة $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 0$ تمثل خطين مستقيمين $y = \pm x$.

والمعادلة

$$x^2 + y^2 + 2xy + x + 2y + 2 = (x + y + 1)(x + y + 2) = 0$$

تمثل خطين مستقيمين متوازين.

إذن يمكننا أن نخلص القول ونقول أن معادلة الدرجة الثانية في x, y في المستوى من الممكن أن تكون زوج من الخطوط المستقيمة (قطع مخروطي محلل **degenerate conic section**).

ولمعالجة هذا الموضوع نتبع أسلوب الجبر الخطي **Linear Algebra** كالآتي:ـ

نفرض أن مصفوفة صف $(x, y) = (x_1 , x_2) = X$

ويكون X^t مصفوفة عمود، t مؤثر يبدل العمود بـــالصف ونقــول أن A^t هـــي المصفوفة البديلة للمصفوفة A من درجة $m\times n$ فإن A^t مـــن درجـــة $n\times m$.
ونفــرض أن $b=(b_1 , b_2)$ وأن A مصفوفـــة متماثلـــة مـــن درجـــــة 2×2 **Symmetric matrix** على الشكل $A=(a_{ij})$ وعليه يمكن كتابة معادلة الدرجة الثانية في الحالة العامة كالآتي:

$$P_2 (x, y)=a_{11} x_1^2 +2 a_{12} x_1 x_2 +a_{22} x_2^2 +2 b_1 x_1 +2 b_2 x_2 +c=0$$

أو في الشكل المصفوفي

$$P_2 (x , y)=X^t A X+2 b X^t +C=0$$

ونناقش متى يمكن تحليل كثيرة الحدود $P_2 (x , y)$ **Polynomial of degree two** إلى عاملين من الدرجة الأولى.

نعتبر أولاً الجزء التربيعي **quadratic term**

$$X^t A X=a_{11} x_1^2 +2 a_{12} x_1 x_2 +a_{12} x_2^2$$

وبأسلوب الجبر الخطي نجد أن هذا المقدار يمكن تحليله إلى عاملين خطيين إذا كان مميـز **discreminant** كثيرة الحدود $X^t A X$ يساوي صفـر أي $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 =0$ أو ما يكافئ أن

$$\text{Det } A=\text{Det }(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}=0$$

أو نقول أن مرتبة **Rank** المصفوفة $A=(a_{ij})$ تساوي واحد.

ولدراسة تحليل كثيرة الحدود $P_2 (x, y)$ نعتـبر المصفوفـة الموسـعة **agumented matrix**

$$A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{bmatrix} \qquad \text{(مصفوفة متماثلة)}$$

فإذا كانت مرتبة المصفوفة A^* تساوي 2 أي محدد A^* يساوي صفر فإن كثيرة الحدود $F_2(x, y)$ يمكن تحليلها إلى عاملين من الدرجة الأولى.
وبالتالي يمكن صياغة هذه النتيجة بأسلوب الهندسة كالآتي:-

نظرية (٦): المعادلة $P_2(x, y)=0$ تمثل زوج من الخطوط المستقيمة إذا تحقق أن

$$\operatorname{Det}\left(A^*\right)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{vmatrix}=0$$

وهو شرط أن تمثل المعادلة $P_2(x, y)=0$ زوج من الخطوط المستقيمة.

(٣ . ١٠) الزاوية بين المستقيمين $P_2(x, y)=0$

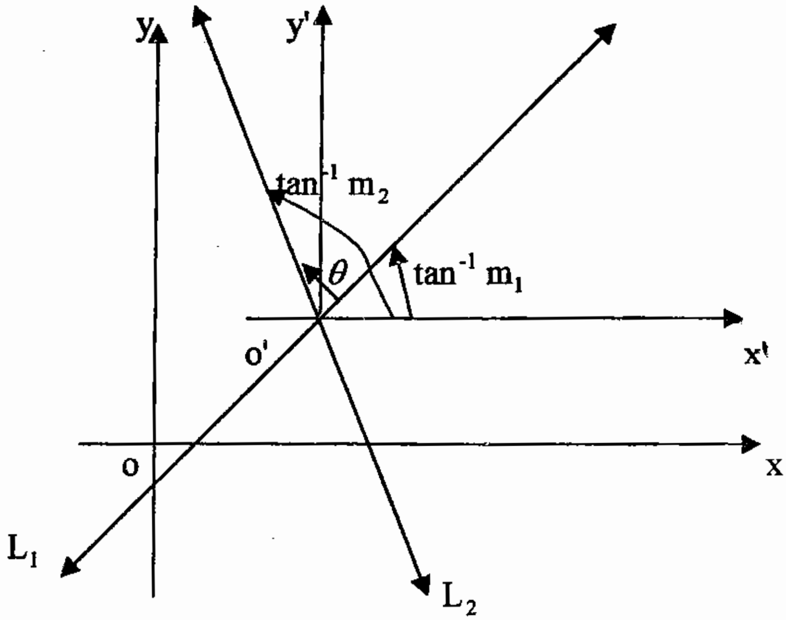
المعادلة $P_2(x, y)=0$ تحتوي على جزء تربيعي **quadratic term** $X^t A X$ وجزء خطي **linear term** $b X^t + C$ وباستخدام تحويل الانتقال **Translation** ويمكن إيجاد نقطة أصل جديدة $o'(a, b)$ بالتحويل $x=x'+a, y=y'+b$ بحيث يصبح الحد $b X^t + C$ يساوي صفراً وتتحول المعادلة $P_2(x, y)=0$ إلى شكل جديد $P'_2(x', y')=X'^t A' X$ يمكن تحليله بسهولة وبالتالي تتعين الزاوية بين الخطين ولذلك نضع المعادلة

$$a_{11} x_1^2+2 a_{12} x_1 x_2+B x_2^2=0$$

أو

$$A x^2+2 h x y+B y^2=0$$

والانتقال المتوازي للمحاور يحافظ على الزوايا أي أن الزاوية بين الخطين المعطيان بالمعادلة $P_2(x, y)=0$ هي نفسها الزاوية في نظام الإحداثيات x', y' ونوضح ذلك بالرسم.



حيث $o' \in L_1 \cap L_2$ وهي نقطة أصل الإحداثيات $x'y'$

$$\theta = \tan^{-1} m_2 - \tan^{-1} m_1$$

والآن نبحث المعادلة

$$P'_2(x, y) = A x^2 + 2 h x y + B y^2 = 0 \qquad (1)$$

وهي متجانسة من الدرجة الثانية في x, y ونحاول إيجاد الشرط اللازم توافره حتى تمثل هذه المعادلة خطين مستقيمين يمران بنقطة الأصل

إذا $B = 0$ فإن $A x^2 + 2 h x y = 0$ أي $x(Ax + 2hy) = 0$ وهي تمثل المستقيمين $A x + 2 h y +0, x = 0$ وكل منهم يمر بنقطة الأصل، نفرض أن $B \neq 0$ وبقسمة المعادلة (1) على B ينتج أن

$$y^2 + \frac{2h}{B} x y + \frac{A}{B} x^2 = 0 \qquad (2)$$

فإذا مثلت المعادلة (1) مستقيمين يمران بنقطة الأصل فإن المعادلة (2) تأخذ الصورة

$$y^2+\frac{2h}{B}xy+\frac{A}{B}x^2=(y-m_1x)(y-m_2x)=0 \qquad (3)$$

وبقسمة (3) على x^2 ووضع $\frac{y}{x}=m$ ينتج أن

$$y^2+\frac{2h}{B}xy+\frac{A}{B}x^2=(y-m_1x)(y-m_2x)=0 \qquad (4)$$

$$\therefore\ m_1،\ m_2=\frac{-b\pm\sqrt{h^2-AB}}{B}, \qquad (5)$$

$$m_1+m_2=-\frac{h}{B},m_1m_2=\frac{A}{B} \qquad (6)$$

ويكون جذرا المعادلة حقيقيين ومختلفين إذا كان $h^2-AB>0$ وهو الشرط اللازم لكي تمثل المعادلة خطين مستقيمين. ويكون الجذران متساويين إذا كان $h^2-AB=0$ وفي هذه الحالة المعادلة (1) تمثل خط مستقيم واحد هو Ax+hy=0 ويقال في بعض الأحيان أنها تمثل مستقيمين منطبقين.

الزاوية المحصورة بين المستقيمين الذين تمثلهما المعادلة

$$P'_2(x,y)=Ax^2+2hxy+By^2=0,h^2>AB$$

وهما المستقيمين

$$y-m_1x=0,y-m_2x=0$$

حيث m_1,m_2 يعطيان من (5) يمكن تعيينهما من القوانين المعروفة، وإذا كانت θ هي الزاوية المحصورة (احدى الزاويتين) بين المستقيمين فإن:

$$\cos\theta=\frac{1+m_1m_2}{\sqrt{1+m_1^2}\sqrt{1+m_2^2}} \qquad \text{(من نظرية (٥))}$$

أو

$$\tan\theta=\pm\frac{m_1+m_2}{1+m_1m_2}=\pm\frac{2\sqrt{h^2-AB}}{A+B}$$

(٣ . ١١) معادلة منصفي الزاويتين المحصورتين بين المستقيمين Bisecting lines

المعرفان بالمعادلة:ـــ

$$P'_2(x,y) = A x^2 + 2 h x y + B y^2 = 0 \qquad (1)$$

نفرض أن L_1 , L_2 هما المستقيمان

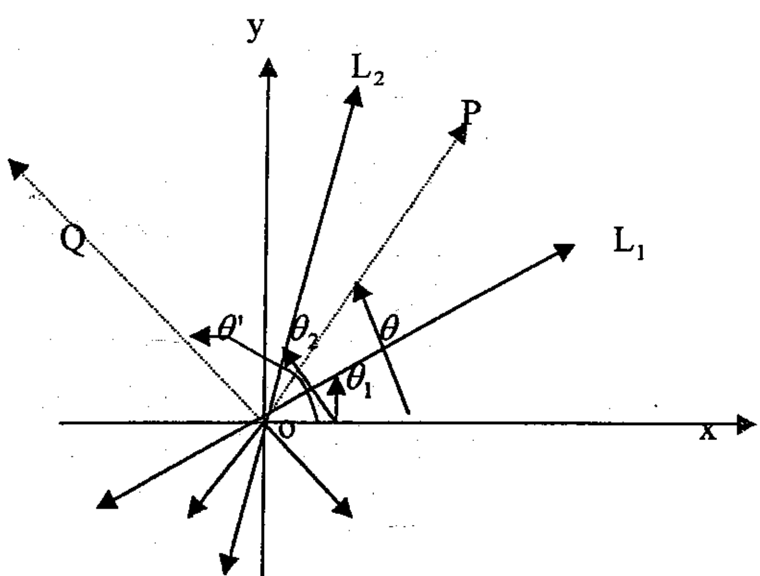
$$y - m_1 x = 0, \; y - m_2 x = 0$$

الذان تمثلهما المعادلة **(1)**

$$\therefore A x^2 + 2 h x y + B y^2 = B(y - m_1 x)(y - m_2 x)$$

$$\therefore m_1 + m_2 = -\frac{2h}{B}, \; m_1 m_2 = \frac{A}{B} \qquad \text{(من نظرية المعادلات)}$$

نفرض أ ن θ_1 , θ_2 $(\theta_2 > \theta_1)$ هما الزاويتان اللتان يصنعهما المستقيمان L_1 , L_2 مع الاتجاه الموجب لمحور x كما هو مبين في الشكل التالي:



$$\tan\theta_1 = m_1 \;, \; \tan\theta_2 = m_2$$

نفرض أن oP , oQ هما منصفا الزاويتين بين L_1 , L_2 ونفرض أن θ, θ' هما على الترتيب الزاويتان اللتان يصنعهما $\overline{oP}, \overline{oQ}$ مع الاتجاه الموجب لمحور x.

$$\theta = \measuredangle xoP = \measuredangle xoA + \frac{1}{2}\measuredangle AoB$$
$$= \theta_1 + \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) = \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)$$
$$\therefore \ 2\theta = \theta_1 + \theta_2$$

ونظراً لأن المنصفين $\overline{oP}, \overline{oQ}$ متعامدان فإن $\theta' = \frac{\pi}{2} + \theta$ (نظريـــات الهندســة المعروفة سابقاً).

$$\therefore \ 2\theta' = \pi + 2\theta = \pi + \theta_1 + \theta_2$$

وبما أن

$$\tan\phi = \tan(\pi + \phi)$$
$$\therefore \ \tan 2\theta = \tan 2\theta' = \tan(\theta_1 + \theta_2)$$

لذلك إذا مثلت θ زاوية ميل أحد المنصفين على محور السينات فإن

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{1-\tan\theta_1 \tan\theta_2}$$
$$= \frac{m_1 + m_2}{1 - m_1 m_2}$$

ولكن من (6) يكون

$$\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = -\frac{2h}{B-A} \qquad (*)$$

فإذا كانت (x,y) هي نقطة على أحد المنصفين فإن

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

إذن المعادلة (*) تأخذ الصورة

$$h\left(x^2-y^2\right)+(B-A)x\,y=0$$

وهي المعادلة المشتركة للمنصفين ويلاحظ أنها تحقق شـــرط تعـــامد المســـتقيمين لأن معامل x^2 + معامل y^2 يساوي صفراً وهذا متوقع لأن منصفي الزاويتين الداخلـــة والخارجة يتعامدان على بعضهما. وبالتالي نكون قد توصلنا إلى النظرية الآتية:

نظرية (٧): منصفي الزاوية الداخلة والخارجة للمستقيمين $P'_2(x,y)=0$ يعطيان من خلال المعادلة

$$h\left(x^2-y^2\right)+(B-A)x\,y=0$$

أمثلة متنوعة

مثال (١): أوجد الزاوية بين المستقيمين اللذين تمثلهما المعادلة

$$6x^2-x\,y-y^2=0$$

وأوجد أيضاً المعادلة المشتركة لمنصفي الزاويتين المحصورتين بينهما.

الحل: الزاوية θ بين الخطين تعطى من:

$$\tan\theta=\pm\frac{\sqrt{h^2-AB}}{A+B}$$

$$=\pm\frac{\sqrt{\frac{1}{4}+6}}{6-1}=\pm 1$$

$$\therefore \theta=\frac{\pi}{4}\ \text{or}\ \theta=\frac{3\pi}{4}$$

حيث θ الزاوية المطلوبة.

المعادلة المشتركة لمنصفي الزاويتين بين المستقيمين هي

$$\frac{x^2-y^2}{A-B}=\frac{x\,y}{h}$$

أو

$$\therefore \frac{x^2 - y^2}{7} = \frac{x\,y}{-\frac{1}{2}}$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة

$$x^2 + 14\,x\,y - y^2 = 0$$

مثال (٢): أوجد معادلة المستقيمين اللذين يمران بنقطة الأصل ويتعامدان على المستقيمين الذين تمثلهما المعادلة

$$L_\alpha : A\,x^2 + 2\,h\,x\,y + B\,y^2 + C = 0 \;, \alpha = 1, 2$$

الحل: إذا كانت (x, y) نقطة ما على أحد المستقيمين المطلوبين فإن النقطة $(-ky, kx)$ أو $(ky, -kx)$ تقع على أحد المستقيمين المعلومين وذلك من شرط التعامد. فإذا وقعت النقطة $(-ky, kx)$ على أحد المستقيمين المعلومين فيجب أن تحقق المعادلة

$$A\,x^2 + 2\,h\,x\,y + B\,y^2 = 0$$

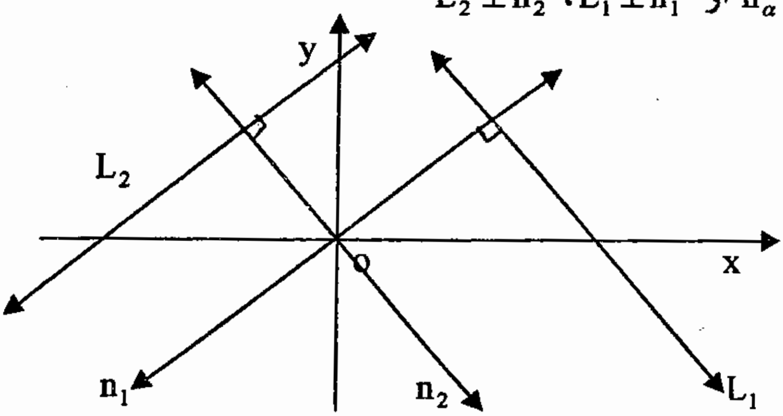
$$\therefore\; A\,k^2\,y^2 - 2\,h\,k^2\,x\,y + b\,k^2\,x^2 = 0$$

وبالقسمة على k^2 نحصل على

$$n_\alpha : B\,x^2 - 2\,h\,x\,y + A\,y^2 = 0$$

وهي المعادلة المشتركة للمستقيمين المطلوبين n_α .

حيث $n_\alpha \perp L_\alpha$ أو $L_1 \perp n_1$ ، $L_2 \perp n_2$



مثال (٣): أوجد كلا من C, A حتى تمثل المعادلة

$$Ax^2+3xy-2y^2-x+3y+C=0$$

خطين مستقيمين متعامدين.

الحل: إذا مثلت المعادلة خطين مستقيمين متعامدين يجب أن يتحقق

$$A+B=0$$

أي

$$A-2=0,\ \therefore\ A=2$$

وتصبح المعادلة المعطاه

$$2x^2+3xy-2y^2-x+3y+C=0$$

ولكي تمثل هذه المعادلة خطين مستقيمين يجب أن يكون

$$\Delta = \therefore ABC+2hfg-Af^2-Bg^2-Ch^2=0$$

$$\therefore\ 2(-2)(0)+2.\frac{3}{2}.\left(-\frac{1}{2}\right)-2\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$-(-2)\left(-\frac{1}{2}\right)^2-C\left(\frac{3}{2}\right)^2=0$$

ومنها ينتج أن C= -1.

مثال (٤): أوجد قيمة C حتى تمثل المعادلة

$$8x^2-6xy+y^2-10x+4y+C=0$$

خطين مستقيمين ـــ أوجد معادلة كل مستقيم ونقطة تقاطعهما والمعادلة المشتركة لمنصفي الزاويتين المحصورتين بين المستقيمين.

الحل: إذا مثلت المعادلة خطين مستقيمين فيجب أن يوازي هذان المستقيمان المستقيمين اللذين تمثلهما المعادلة

$$8x^2-6xy+y^2=0$$

أي (بالتحليل)

$$(2x-y)(4x-y)=0$$

لذلك نفرض أن معادلتي المستقيمين المطلوبين هما

$$2x-y+\alpha=0,\ 4x-y+\beta=0$$

$$(2x-y+\alpha)(4x-y+\beta)\equiv 8x^2-6xy+y^2-10x+4y+0$$

وبمساواة معامل كل من y, x والحد المطلق في الطرفين ينتج أن

$$4\alpha+2\beta=-10 \quad \text{or} \quad 2\alpha+\beta=-5 \qquad (1)$$

$$-\alpha-\beta=4 \quad \text{or} \quad \alpha+\beta=-4 \qquad (2)$$

$$\alpha\beta=C \qquad (3)$$

وبحل المعادلتين (1) ,(2) ينتج أن $\alpha=-1,\ \beta=-3$ وبالتعويض في (3) ينتج أن C = 3 . إذن المستقيمين هما

$$2x-y-1=0,\quad 4x-y-3=0$$

وبحل هاتين المعادلتين بطرق الجبر المعروفة (الحذف أو طريقة كرامر) ينتج أن نقطة تقاطعهما هي $(1, 1)$.

المعادلة المشتركة لمنصفي الزاوية بين المستقيمين

$$8x^2-6xy+y^2=0$$

هي

$$\frac{x^2-y^2}{7}=\frac{xy}{-3}$$

أي

$$3x^2+7xy-3y^2=0$$

وبذلك تكون المعادلة المشتركة لمنصفي الزاوية بين المستقيمين المطلوبين هي:

$$3x'^2+7x'y'-3y'^2=0$$

حيث $x'=x-1, y'=y-1$

(نقل المحاور إلى نقطة تقاطع المستقيمين) وبالتعويض نحصل على:ـــ

$$3(x-1)^2+7(x-1)(y-1)-3(y-1)^2=0$$

أي

$$3x^2+7xy-3y^2-13x-y+7=0$$

وذلك لأن النقطة $(1, 1)$ تقع على المحل الهندسي المطلوب.

مثال (٥): أثبت أن المعادلة

$$x^2-6xy+9y^2-2x+6y+1=0$$

تمثل مستقيمين منطبقين وأن المعادلة

$$9x^2+24xy+16y^2-16=0$$

تمثل مستقيمين متوازيين وأوجد البعد العمودي بينهما.

الحل: من المعادلة الأولى

$$x^2-6xy+9y^2-2x+6y+1=0$$

يكون

$$(x-3y)^2-2(x-3y)+1=0$$

$$(x-3y-1)^2=0$$

لذلك تمثل المعادلة المستقيمين المنطبقين $x-3y-1=0$

والمعادلة

$$9x^2+24xy+16y^2-16=0$$

أو (إكمال المربع)

$$(3x+4y)^2-16=0$$

أو (بالتحليل)

$$(3x+4y-4)(3x+4y+4)=0$$

لذلك تمثل المعادلة المستقيمين

$$L_1: 3x+4y-4=0, L_1: 3x+4y+4=0$$

وهما مستقيمان متوازيان لتساوي ميلهما.

ولإيجاد البعد العمودي بينهما نأخذ أي نقطة على المستقيم الأول مثل النقطة (1 ,0) ويكون طول العمود الساقط من هذه النقطة على المستقيم الثاني هو البعد العمودي بين المستقيمين أي مسقط بعد النقطة (1 ,0) عن L_2 في اتجاه العمودي على L_2 وهو $n_2=(3,4)$.

إذن البعد العمودي بين المستقيمين L_1, L_2 هو

$$\pm\frac{0+4+4}{\sqrt{3^2+4^2}}=\pm\frac{8}{5}$$

(راجع الجزء الذي يحتوي على بعد نقطة عن مستقيم).

تمارين

١ـ أثبت باستخدام مرتبة المصفوفة الموسعة A^* أو مصفوفة الصيغة التربيعية A أن كل من المعادلات الآتية تمثل خطين مستقيمين وأوجد الزاوية بينهما.

(i) $x^2-y^2+x-y=0$

(ii) $6x^2+5xy-6y^2-3x+28y-80=0$

(iii) $15x^2+19xy-10y^2+7x+22y-4=0$

(iv) $xy+3y^2-4x-13y=0$

(v) $xy-3x+y-3=0$

٢ـ أوجد معادلتي المستقيمين المارين بنقطة الأصل ويوازيان المستقيمين الممثلين بالمعادلة

$$6x^2+5xy-9y^2-7x-4y+2=0$$

٣ـ أوجد قيمة C التي تجعل المعادلة

$$6x^2-42xy+60y^2-11x+10y+C=0$$

تمثل خطين مستقيمين. ثم أثبت بعد ذلك أن الزاوية بينهما هي $\arctan\left(\frac{3}{11}\right)$.

٤ـ أثبت أن المعادلة $3x^2-5xy-2y^2+x+5y-2=0$ تمثل خطين مستقيمين وأوجد نقطة تقاطعهما والزاوية بينهما.

٥ـ علم المستقيم $2x+3y+4=0$ كون معادلة المستقيم المار بالنقطة $M_1(2,1)$: بحيث يكون

(a) موازيا للمستقيم المعلوم (b) عموديا على المستقيم المعلوم.

٦ـ لدينا معادلتا ضلعي مستطيل

$$2x-3y+5=0\ ,\ 3x+2y-7=0$$

ورأس من رؤوسه $A(2,-3)$ كون معادلتي الضلعين الأخرين.

٧ـ مستطيل ضلعاه : $x-2y=0,\ x-2y+15=0$ ومعادلة أحد قطرية $7x+y-15=0$.

عين رؤوس المستطيل ومعادلتي الضلعين الآخرين ومعادلة القطر الآخر.

٨ـ عين النقطة Q المتماثلة مع النقطة $P(-5,13)$ بالنسبة إلى المستقيم $2x-3y-3=0$

٩ـ كون معادلات المستقيمات المارة برؤوس المثلث:

$A(5,-4), B(-1,3), C(-3,-2)$ وموازية لأضلاع المثلث المقابلة لهذه الرؤوس.

١٠ـ كون معادلة المستقيم الذي تكون النقطة $P(2,3)$ فيه قاعدة للعمود الساقط عليه من نقطة الأصل (موقع العمود الساقط من نقطة الأصل).

١١ـ علمت رؤوس مثلث $A(1,-2), B(5,4), C(-2,0)$ عين معادلات منصفات زاويتيه الداخلية والخارجية عند A.

١٢ـ النقطة $E(1,-1)$ مركز مربع أحد أضلاعه يقع على المستقيم $x-2y+12=0$. كون معادلات المستقيمات التي تقع عليها الأضلاع الأخرى.

١٣ـ أثبت أن معادلة المستقيم المار بالنقطة $M_1(x_1, y_1)$ موازيا للمستقيم $Ax+By+C=0$ تكتب على الصورة

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0$$

وكون معادلة المستقيم المار بالنقطة $(2, -3)$ موازيا للمستقيم

$$(a)\ 3x-7y+3=0, \qquad (b)\ 16x-24y-7=0$$

١٤ـ كون معادلات أضلاع المثلث إذا علم رأس من رؤوسه $A(3,-1)$ وكذلك معادلتا منصف إحدى زواياه $x-4y+10=0$ وأحد مستقيماته المتوسطة $6x+10y-59=0$ المحدودين من رأسين مختلفين، (المنصف من B).

١٥ـ كون معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل والذي يكون مع المستقيمين $2x+y+9=0,\ x-y+12=0$ مثلثا مساحته $\frac{3}{2}$ وحدة مربعة.

١٦ـ كون معادلة المستقيم المار بالنقطة $C(-5, 4)$ إذا علم أن طول جزئه المحصور بين المستقيمين $x+2y-1=0,\ x+2y+1=0$ يساوي 5.

١٧ـ عين عند أية قيم للمقدارين n,m يكون المستقيم

$$(2m-n+5)x + (m+3n-2)y + (2m+7n+19) = 0$$

موازيا للمحور الرأسي ويقطع على المحور الأفقي جزءا يساوي 5.

١٨ـ عين عند أية قيم للمقدارين b, a يكون المستقيمان

$$ax-3y-1=0, \quad 6x-4y-b=0$$

(i) متقاطعين في نقطة واحدة (ii) متوازيين (iii) منطبقين.

١٩ـ احسب مساحة المثلث الذي يكونه المستقيم $3x-4y-14=0$ مع محوري الاحداثيات.

٢٠ـ مر بالنقطة $M_1(x_1, y_1)$، حيث $x_1, y_1 > 0$، المستقيم

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

الذي يقطع من الزاوية الاحداثية مثلثا مساحته S. عين عند أية علاقة بين المقادير x_1, y_1, S تكون للجزأين b, a إشارتان منطبقتان.

٢١ــ حول المعادلة العامة للمستقيم إلى الصورة العمودية:

(i) $4x-3y-10=0$ **(ii)** $\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y+10=0$

(iii) $x+2=0$ **(iv)** $12x-5y+13=0$

٢٢ــ بين هل تقع النقطة $M(1,-3)$ ونقطة الأصل في ناحيــــة واحـــدة أم نــــاحيتين مختلفتين من كل من المستقيمات

a) $2x-y+5=0$, **b)** $3x+2y-1=0$, **c)** $10x+24y+15=0$

٢٣ــ النقطة $A(2,-5)$ رأس مربع أحد أضلاعه يقع علـــى المســـتقيم $x-2y-7=0$.

إحسب مساحة هذا المربع.

٢٤ــ احسب البعد بين المستقيمين المتوازيين:

a) $3x-4y-10=0$, $6x-8y+5=0$
b) $5x-12y+26=0$, $5x-12y-13=0$

٢٥ــ أثبت أن المستقيم $5x-2y-1=0$ يوازي المستقيمين

$x-2y+7=0$, $5x-2y-9=0$

وينصف المسافة بينهما.

٢٦ــ كون معادلات منصفات الزوايا المحصورة بين المستقيمين:

a) $x-2y+5=0$, $3x-y-2=0$
b) $x-2y-3=0$, $2x+4y+7=0$
c) $3x+4y-1=0$, $5x+12y-2=0$

٢٧ــ كون معادلات المستقيمات المارة بالنقطة $P(2,-1)$ والتي تكون مع المســـتقيمين $2x-y+5=0$, $3x+6y-1=0$ مثلثات متساوية الأضلاع.

٢٨ــ بين هل تقع النقطتان $N(5,-1)$, $M(2,3)$ في زاويـــة واحـــدة أم في زاويتـــين متجاورتين أم متقابلتين بالرأس من الزوايا المتكونة عند تقاطع المستقيمين

a) $x-3y-5=0,\quad 2x+9y-2=0$
b) $2x+7y-5=0,\quad x+3y+7=0$
c) $12x+y-1=0,\quad 13x+2y-5=0$

٢٩ــ كون معادلة منصف الزاوية بين المستقيمين $3x-6y-5=0,\ x+2y-11=0$ التي تقع فيها النقطة $M(1,-3)$.

٣٠ــ أكتب معادلة عائلة المستقيمات التي تحقق الشرط

(a) توازي محور الصادات.

(b) توازي المستقيم $2x+4y-7=0$

(c) الجزء المقطوع من محور السينات يساوي 2.

٣١ــ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين $x-5y+7=0,\ 2x+3y-4=0$ ويقطع على محور السينات جزءاً يساوي 4-.

٣٢ــ عين معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين $x-y-6=0,\ x+2y=0$ والذي يكون عمودياً على المستقيم $x-2y+4=0$.

٣٣ــ عين معادلة المستقيم المنتمي إلى عائلة المستقيمات

$$(x+2y-5) + k(3x-2y+1) = 0$$

و (a) يمر بالنقطة $A(3,-1)$

(b) يمر بنقطة الأصل.

(c) يوازي محور Ox،

(d) يوازي محور Oy

(e) يوازي المستقيم $4x+3y+5=0$

(f) عمودي على المستقيم $2x+3y+7=0$.