الباب الثاني
التحويلات في المستوى

لقد سبق أن علمنا أن مواضع النماذج الهندسية تتحدد في مسائل الهندسة التحليلية بالنسبة إلى مجموعة ما من الإحداثيات. غير أنه قد تنشأ الحاجة إلى استبدال هذه المجموعة، التي بالنسبة إليها وضعت مسألة ما تحت البحث بمجموعة أخرى تكون أسهل لبعض الاعتبارات ولكن يكون للنقطة الاختيارية في مجموعة الإحداثيات المُختلفة إحداثيات مختلفة. ولذا ففي تلك الحالة عندما تستخدم مجموعتان للإحداثيات في بحث موضوع واحد تنشأ المسألة التالية:

بمعرفة إحداثيات نقطة اختيارية في إحدى المجموعتين يتطلب تعين إحداثيات نفس النقطة في المجموعات الأخرى ولهذا الغرض تطبق علاقات تحويل الإحداثيات المناظرة للتحويل المعطى لمجموعة الإحداثيات.

نفرض أن نظام الإحداثيات (x , y) تحول إلى نظام الإحداثيات $(\bar{x} , \bar{y})$ بالعلاقة

$$\bar{x} = f_1(x, y), \bar{y} = f_2(x, y)$$

أي

$$F:(x, y) \xrightarrow{\text{تناظر احادي}} (\bar{x} , \bar{y}) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$$

أو التحويل العكسي

$$G:(\bar{x}, \bar{y}) \longrightarrow (x, y) = (g_1(\bar{x}, \bar{y}), g_2(\bar{x}, \bar{y}))$$

حيث أن

$$F G = G F = I$$

، I راسم التطابق

التحويل F له أشكال متعددة منها :ـ

١ـ التحويلات الأفينية الخطية **Affine linear transformations**

نعتبر التحويل

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Det} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0$$

التحويلات الأفينية يمكن تصنيفها كالآتي:ـــ

(١) إذا كانت المصفوفة $\left(a_{ij}\right)$ قطرية عاملية أي

$$x_1 = \lambda x, y_1 = \lambda y, \ 0 < \lambda \neq 1, a = b = 0$$

وفي الإحداثيات القطبية $r_1 = \lambda r, \theta_1 = \theta$

نحصل على تحويل يسمى التشابه **Similitude transformation**.

مثال (١): أوجد صورة الدائرة $x^2 + y^2 = 4$ بالتحويل الذي له الصورة المصفوفية الآتية :ـــ

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

مثال (٢): وضح بالرسم صورة المربع الذي رؤوسة

(0,0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)

تحت تأثير التحويل

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

وأثبت أن هذا المربع يتحول إلى نقطة على الخط المستقيم y=x.

٢ـ تحويل التمدد: Stretch Transformation

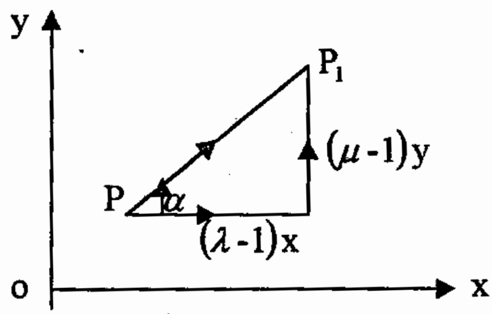
تحويل التمدد هو

$$x_1 = \lambda x ,\; y_1 = \mu y ,\; \lambda , \mu > 0 ,\; 1 \neq \lambda \neq \mu \neq 1$$

وهذا التحويل ينقل النقط $P(x, y)$ إلى $P_1(x_1, y_1)$ خلال مسافة

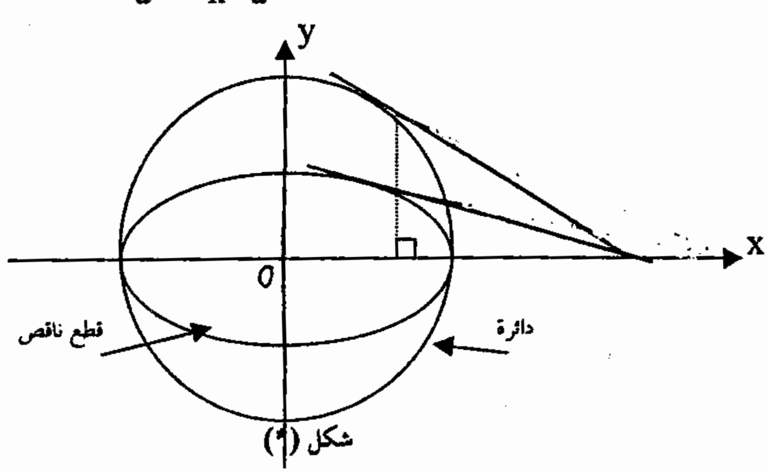
$$\sqrt{(\lambda - 1)^2 x^2 + (\mu - 1)^2 y^2}$$

في الاتجاه $\tan\alpha = [(\mu - 1)/(\lambda - 1)] . y / x$



مثال (٣): الدائرة $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, x, y \in R\}$ تنكمش بواسطة التحويل

$x_1 = x ,\, y_1 = k\,y, k < 1$ إلى القطع الناقص $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2}{k^2 a^2} = 1$ (انظر الشكل (*))



شكل (*)

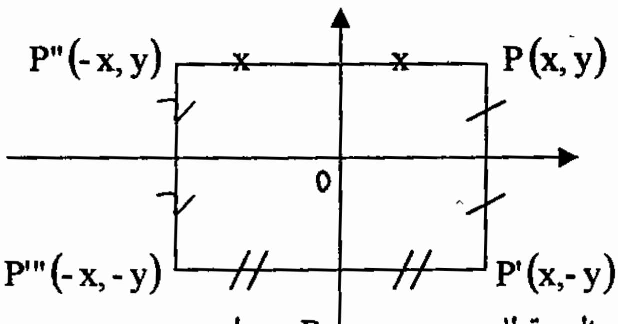
مثال (٤): أوجد صورة الخط المستقيم $3y+4x-2=0$ بالتحويلات الآتية:

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&\frac{1}{3}\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

٣ـ الانعكاس بالنسبة للمحور : **Reflections in the axes**

نفرض أ ن المستوى دار بزاوية حول محور x ونفرض أن $P(x,y)$ نقطة اختيارية وأن $P'(x',y')$ هي النقطة التي نقلت إليها P. بوضوح نرى أن

$$x'=x\,,\ y'=-y \ \text{ or } \ R_x(x,y)=(x,-y)$$



(**)

بالمثل الانعكاس بالنسبة للمحور y هو R_y ويعطى من

$$x'=-x\,,\ y'=y \ \text{ or } \ R_y(x,y)=(-x,y)$$

ويمكن إعطاء تعريف دقيق للإنعكاس كالآتي:

يقال لنقطة A' في المستوى أنها صورة بالانعكاس في الخط المستقيم L إذا كان $\overline{AA'}$ عمودي على L و L هو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة $\overline{AA'}$ ، الخط L يسمى محور الانعكاس أو محور التماثل.

مثال (٥): أثبت أن التحويل الهندسي $x_1=-x\,,\ y_1=-y$ يكافئ دوران حول نقطة الأصل زاويته $\theta=\pi$.

مثال (٦): أثبت أن الانعكاس يحفظ المسافة بين النقاط أي تساوي قياسي **Isometric**

الحل: (متروك للطالب كتمرين).

إرشاد : استعمل التعريف والرسم في شكل (**)).

٤ـ تحويل الانتقال: **Translation**

في التحويلات الأفينية إذا كانت المصفوفة $\left(a_{ij}\right)$ مصفوفة وحدة أي

$$\begin{aligned} x_1 &= x + \lambda \\ y_1 &= y + \mu \end{aligned} \qquad (*)$$

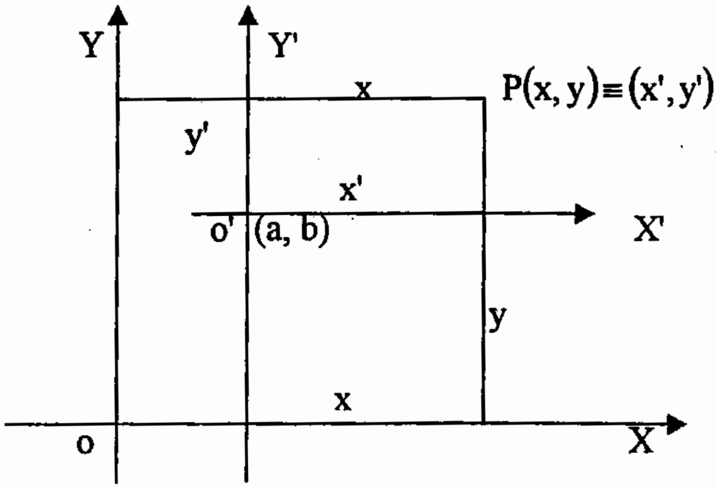
نحصل على تحويل يسمى بتحويل الإنتقال ومنه يتم إزاحة النقطة في اتجاه يوازي محور x ثم في إتجاه يوازي محور y أي نقل المحاور نقل متوازي بالنسبة للمحاور الأصلية.

التحويل * يمكن وصفه هندسياً كالآتي:

نفرض أن o' نقطة أصل جديدة وإحداثياها (a, b) حيث $b = -\mu , a = -\lambda$

ونفرض محاور الإحداثيات الجديدة هي $o'x' , o'y'$ ونأخذ نقطة P إحداثياها بالنسبة للمحاور القديمة هي (x , y) وإحداثياها بالنسبة للمحاور الجديدة هي (x', y').

فمن الشكل نجد أن التحويل هو



$$\begin{aligned} x &= x' + a \\ y &= y' + b \end{aligned} \qquad (1)$$

وبالطبع يمكن إيجاد الإحداثيات الجديدة لأي نقطة بدلالة إحداثياتها الأصلية أي التحويل العكسي

$$\begin{aligned} x' &= x - a \\ y' &= y - b \end{aligned} \qquad (2)$$

نفرض أن

$$Ax^2 + 2hxy + By^2 + 2fx + 2gy + C = 0 \qquad (3)$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية في المتغيرين x, y.

والآن بالنسبة للمعادلة العامة من الدرجة الثانية نفرض أن نقطة الأصل نقلت إلى النقطة (a, b) وأن المحاور الجديدة هي $o'x', o'y'$.

من (1) نعوض في المعادلة العامة (3) فنحصل على

$$A(x'+x_1)^2 + 2h(x'+x_1)(y'+y_1) + B(y'+y_1)^2 + 2f(x'+x_1) + 2g(y'+y_1) + C = 0$$

أو

$$\begin{aligned} &Ax'^2 + 2hx'y' + By'^2 + 2(Ax_1 + hy_1 + f)x' + 2(hx_1 + By_1 + g)y' \\ &+ By_1^2 + Ax_1^2 + 2hx_1y_1 + 2fx_1 + 2gy_1 + C = 0 \end{aligned} \qquad (4)$$

بالنظر إلى هذه المعادلة نجد أنه يمكننا اختيار نقطة الأصل الجديدة أي النقطة (x_1, y_1) بحيث تكون المعادلة (4) خالية من حدود الدرجة الأولى أي الحدود التي تحتوى على x', y' ويكون ذلك بوضع معامل كل من x', y' مساوياً للصفر أي

$$Ax_1 + hy_1 + f = 0, \quad hx_1 + By_1 + g = 0$$

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على x_1, y_1 وهي إحداثيات نقطة الأصل الجديدة المطلوب نقل المحاور إليها. لاحظ أن الشرط $AB - h^2 \neq 0$ يجب أن يتحقق.

وهذه أولى طرق اختزال المعادلة العامة من الدرجة الثانية. وسنوضح ذلك بمثال.

مثال: في المعادلة الآتية احذف حدود الدرجة الأولى منها

$$3x^2 - 5xy - 2y^2 + x + 5y - 2 = 0 \qquad \text{(I)}$$

الحل: بنقل المحاور موازية لنفسها ولتكن نقطة الأصل الجديدة هي (x_1, y_1) والمحاور الجديدة هي $o'x', o'y'$ فتكون معادلات التحويل هي

$$x = x' + x_1 \ , \ y = y' + y_1$$

وبالتعويض في المعادلة المعطاة

$$3(x' + x_1)^2 - 5(x'+x_1)(y' + y_1) - 2(y' + y_1)^2 + x' + x_1 + 5(y'+y_1) - 2 = 0$$

$$\begin{aligned} &3x'^2 - 5x'y' - 2y'^2 + (6x_1 - 5y_1 + 1)x' - (5x_1 - 4y_1 + 5)y' + \\ &+ 3x_1^2 - 5x_1 y_1 - 2y_1^2 + x_1 + 5y_1 - 2 = 0 \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

وبمساواة معامل x' بالصفر، معامل y' بالصفر نحصل على

$$6x_1 - 5y_1 + 1 = 0 \ ,$$
$$5x_1 - 4y_1 + 5 = 0$$

بحل هاتين المعادلتين نحصل على

$$x_1 = \frac{3}{7}, y_1 = \frac{5}{7}$$

إذن إحداثيات نقطة الأصل الجديدة هي $\left(\frac{3}{7}, \frac{5}{7}\right)$.

وبالتعويض عن (x_1, y_1) في المعادلة (I) نحصل على

$$3x'^2 - 5x'y' - 2y'^2 = 0$$

نلاحظ أنه بعد نقل المحاور قد اختفت حدود الدرجة الأولى والحد المطلق لم يطـرأ أي تغير على حدود الدرجة الثانية أي أن المعادلات كما هي ومن ذلك نستنتج أنه بنقـل

المحاور أمكننا حذف حدود الدرجة الأولى والحد المطلق من المعادلة العامة من الدرجة الثانية.

عملية نقل المحاور أو تحويل الإنتقال تكافئ جبرياً إكمال المربع أي نحصل على معادلة مكونة من حدود من الدرجة الثانية.

٥. تحويل الدوران : Rotation

وإذا كانت التحويلات الأفينية $\lambda = \mu = 0$,(a_{ij}) مصفوفة عمودية فإننا نحصل على تحويل الدوران $R_{o(\theta)} : (x, y) \longrightarrow (x', y')$ والمعروف بالقاعدة الآتية:-

يقال لنقطة $A' \in P$ إنها صورة لنقطة $A \in P$ بدوران مقياسة θ حول نقطة $o \in P$ أي

$$R_{o(\theta)} A = A'$$

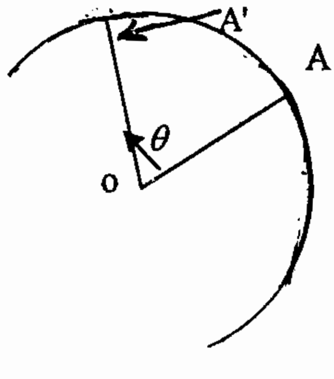
إذا كان

(i) $\overline{oA} = \overline{oA'}$

(ii) قياس $\theta = A\hat{o}A'$ إذا كانت $\theta \le \pi$.

قياس $2\pi - \theta = A\hat{o}A'$ إذا كانت $\theta \ge \pi$.

وسنتفق دائما على أن الدوران يكون ضد عقارب الساعة.

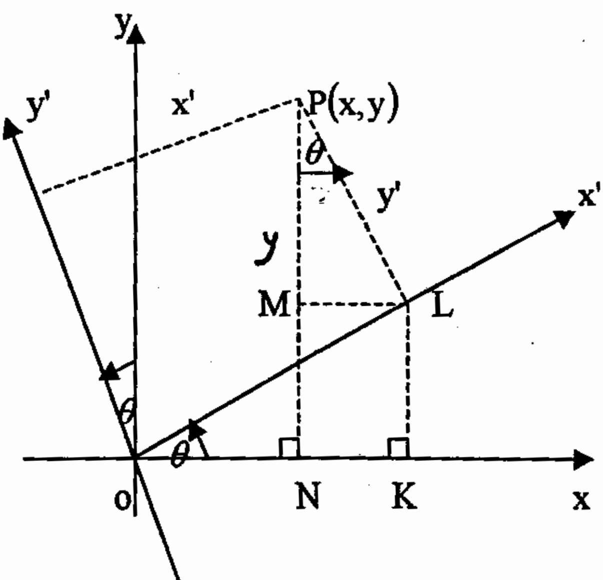


والذي يمكن صياغته من خلال العلاقة المصفوفية الآتية:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad (*)$$

والمصفوفة $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ تسمى مصفوفة الدوران وهي مصفوفة عمودية أي محددها يساوي الواحد ومعكوسها هو المصفوفة البديلة وكذلك مجموع مربعات عناصر أي صف أو أي عمود يساوى الواحد وحاصل ضرب عناصر صف (عمود) في عناصر صف (عمود) أخر يساوي الصفر.

وهذه المصفوفة تلعب دور هام في دراسة أنواع المحال الهندسية التي تمثلها معادلة الدرجة الثانية في المستوى أي أن حذف حدود الدرجة الثانية المختلطة ينتج عن طريق دوران المحاور بزاوية معرفة θ ولإيجاد معاملات التحويل (*) بطريقة هندسية نفوض أن المحاور أديرت بزاوية θ بدون تغيير نقطة الأصل ومن الشكل نجد أن:



$PN = y\ ,\ oN = x$
$PL = y'\ ,\ oL = x'$

$$\measuredangle NPL = \measuredangle K\,oL = \theta$$ (من تطابق المثلثات)

الآن $oN = oK - KN = oK - ML$

$$x = oL\cos\theta - PL\sin\theta = x'\cos\theta - y'\sin\theta$$

بالمثل $y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$

∴ معادلات التحويل $R_{o(\theta)}$ هي

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$$
$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$$

$$(x, y) \underset{\text{onto}}{\overset{1\text{-}1}{\rightarrow}} (x', y')$$

ولإيجاد الإحداثيات الجديدة بدلالة الإحداثيات الأصلية ندير المحاور الجديدة ox', oy' بزاوية θ- لتنطبق على المحاور الأصلية فيكون التحويل العكسي $R_{o(\theta)} = R_{o(-\theta)}$ هو

$$\left.\begin{array}{l} \therefore\ x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ \quad y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{array}\right\}$$

والآن بالنسبة للمعادلة العامة للدرجة الثانية وجد أنه بعد نقل المحاور أخذت المعادلة العامة الصورة

$$A\,x'^2 + 2\,h\,x'\,y' + B\,y'^2 = 0$$

نفرض أننا أدرنا المحاور الآن بدون تغيير نقطة الأصل (x_1, y_1) أي $(x', y') \longrightarrow (x'', y'')$ فإننا نحصل على معادلة على الصورة:

$$A_1\,x''^2 + 2\,h_1\,x''\,y'' + B_1\,y''^2 = 0$$

حيث

$$2\,A_1 = 2\left(A\cos^2\theta + 2\,h\sin\theta\cos\theta + B\sin^2\theta\right),$$
$$2\,B_1 = 2\left(A\sin^2\theta - 2\,h\sin\theta\cos\theta + B\cos^2\theta\right),$$

$$2h_1 = -2A\sin\theta\cos\theta + 2h\cos^2\theta - 2h\sin^2\theta + 2B\sin\theta\cos\theta,$$

أو

$$\begin{aligned}2A_1 &= A\cos^2\theta + A\left(1-\sin^2\theta\right) + 2h\sin 2\theta + \\ &\quad + B\sin^2\theta + B\left(1-\cos^2\theta\right) \\ &= (A-B)\cos^2\theta - (A-B)\sin^2\theta + A + B + 2h\sin 2\theta \\ &= (A-B)\cos 2\theta + A + B + 2h\sin 2\theta\end{aligned}$$

وبنفس الطريقة يمكن أن نكتب

$$2B_1 = A + B - (A-B)\cos 2\theta - 2h\sin 2\theta$$

أيضا

$$2h_1 = -(A-B)\sin 2\theta + 2h\cos 2\theta$$

والآن

$$2(A_1 + B_1) = 2(A+B)$$

أي

$$A_1 + B_1 = A + B$$

$\therefore$ الكمية $A+B$ تكون ثابتة ولا تتغير بنقل أو دوران المحاور بالمثل

$$h_1^2 - A_1B_1 = h^2 - AB$$

أي أن الكمية $AB - h^2$ لا تتغير أيضا بنقل أو دوران المحاور.

ولذلك تسمى المقادير $A+B, h^2 - AB$ بثوابت المعادلة العامة من الدرجة الثانيـــة **Invariants**.

والآن احذف حدود الدرجة الثانية في المعادلة العامة وليكن الحد xy مثلا.

نضع المعامل $h_1 = 0$ أي

$$(A-B)\sin 2\theta = 2h\cos 2\theta$$

$$\therefore \tan 2\theta = \frac{2h}{A-B}$$

وعلى ذلك فإنه لحذف الحد xy من المعادلة العامة يجب دوران المحاور بزاوية:

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2h}{A-B}\right)$$

وهذا ما سنستخدمه دائما لأنه غالبا لا يكون مطلوب حذف حدود الدرجة الثانية مثل الحد x^2 أو الحد y^2.

مثال: احذف الحد xy من المعادلة $4x^2 - 4xy + y^2 = 2$ وذلك بإدراة المحاور بزاوية مناسبة.

الحل: ندير المحاور بزاوية θ فتكون معادلات التحويل هي

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\sin\theta, \\ y &= y'\sin\theta + y'\cos\theta \end{aligned} \qquad (*)$$

وبالتعويض في المعادلة المعطاه ينتج أن

$$4(x'\cos\theta - y'\sin\theta)^2 - 4(x'\cos\theta - y'\sin\theta)(x'\sin\theta + y'\cos\theta)$$
$$+(x'\sin\theta + y'\cos\theta)^2 = 2$$

بوضع معامل $x'y' = 0$ أي بوضع $h_1 = 0$

$$(A-B)\sin 2\theta = 2h\cos\theta$$

حيث $A = 4, B = 1, h = -2$

$$\tan 2\theta = \frac{2h}{A-B} = \frac{-4}{4-1} = -\frac{4}{3}$$

ولكن

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = -\frac{4}{3}$$

$$6\tan\theta = -4 + 4\tan^2\theta,$$

$$\therefore\ 2\tan^2\theta - 3\tan\theta - 2 = 0$$

$$\therefore\ (1+2\tan\theta)(\tan\theta-2)=0\ ,$$

$$\therefore\ \tan\theta=-\frac{1}{2},\tan\theta=2$$

وكل من القيمتين تصلح ولكن للسهولة نختار $\tan\theta=2$

$$\therefore\ \sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}},\ \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

بالتعويض في المعادلة (I) ينتج أن

$$4\left(x'.\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{2y'}{\sqrt{5}}\right)^2-\left(\frac{x'}{\sqrt{5}}-\frac{2y'}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{2x'}{\sqrt{5}}+\frac{y'}{\sqrt{5}}\right)+\left(\frac{2x'}{\sqrt{5}}+\frac{y'}{\sqrt{5}}\right)^2=2$$

$$\therefore 25y'^2=10$$

$$\therefore 5y'^2=2$$

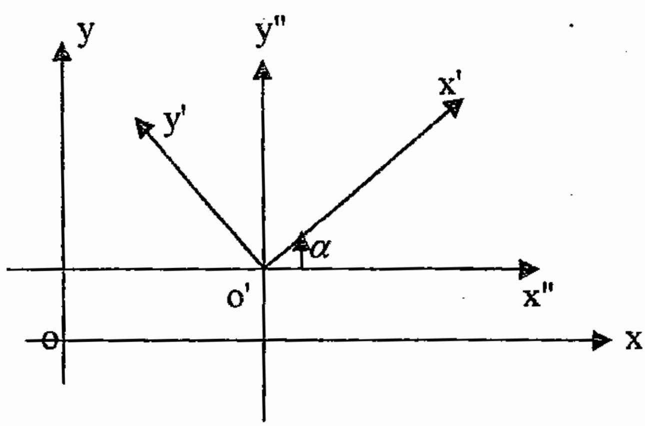
وهذه هي المعادلة المطلوبة

وفي الواقع هي معادلة الخطين المستقيمين $y'=-\sqrt{2/5}\ ,y'=\sqrt{2/5}$.

مثال: أوجد صورة هذين المستقيمين في الإحداثيات x, y (أستخدم التحويل العكسي للتحويل (*)).

٦ـ تحويل الإحداثيات الكرتيزية المتعامدة عند نقطة الأصل ودوران المحاور:

بفرض أن نظام الإحداثيات (x, y) أزيح إلى النقطة $o'(a, b)$ بالإنتقال ليصبح (x'', y'') ثم دارت المحاور بزاوية α $(x'', y'')\rightarrow(x', y')$ كما هو موضح بالرسم.



من هندسة الشكل نجد أن

$$x = x'' + a\,,\ y = y'' + b$$
$$x'' = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$$
$$y'' = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$

وفي معادلة واحدة يكون $(x,y) \longrightarrow (x',y')$

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + a \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + b \end{aligned} \qquad (1)$$

والتحويل العكسي يكون $(x',y') \longrightarrow (x,y)$

$$\begin{aligned} x' &= (x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha \\ y' &= -(x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha \end{aligned} \qquad (2)$$

العلاقتان (1) تعبر عن الإحداثيات القديمة لأية نقطة إختيارية بدلالة إحداثياتها الجديدة أما العلاقتان (2) فهما بالعكس تعبران عن الإحداثيات الجديدة بدلالة القديمة.

مثال: كون علاقات التحويل المناظرة لنقل نقطة أصل الإحداثيات إلى النقطة $o'(2,3)$ ودوران المحورين بزاوية $\frac{\pi}{4}$.

الحل: بالتعويض في (1), (2) نحصل $R_{o(\frac{\pi}{4})}, R_{o(-\frac{\pi}{4})}$ على الترتيب

$$x = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}} + 2\ ,\ y = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}} + 3 \qquad \text{(التحويل)}$$

$$x' = \frac{x+y}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}}\quad ,\ y' = \frac{y-x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{(التحويل العكسي)}$$

أو

$$R_{o(\frac{\pi}{4})}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$R_{o(-\frac{\pi}{4})}: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

على الترتيب.

تمارين

١ـ احذف حدود الدرجة الأولى من كل من المعادلات الآتية

(i) $x^2+y^2-2x-4y-4=0$

(ii) $4x^2+y^2-24x+4y+36=0$

(iii) $9y^2-4x^2-16x-18y-43=0$

٢ـ أوجد إحداثيات النقطة التي تنتقل لها المحاور لكي نحصل على معادلة خالية من

أ) الحد المشتمل على x وكذلك الحد المطلق من المعادلة

$$x^2+y^2+2x-6y+10=0$$

ب) الحدين المشتملين على x, y من المعادلة

$$x^2+4xy+y^2+2x-6y-8=0$$

ما هي الزاوية التي يجب أن تدار بها المحاور لكي نحذف الحد xy.

٣ـ أثبت أنه بالنسبة للمعادلة العامة من الدرجة الثانية

$$Ax^2+hxy+By^2+fx+gy+C=0$$

تكون المقادير الآتية ثابتة إذا ما أديرت المحاور بزاوية θ.

(i) $A+B+C$

(ii) $4(AB+BC-CA)-h^2-f^2-g^2$

(iii) $4ABC+fgh-(Ag)^2-(Bf)^2-(Ch)^2$

٤ـ أوجد الزاوية التي يجب دوران المحاور خلالها لكي تصبح كل من المعادلات الآتية خالية من الحد xy

(i) $5x^2+2\sqrt{3}xy+3y^2=3$

(ii) $3x^2+xy+3y^2=1$

(iii) $16x^2+7xy-8y^2=17$

٥ـ ما هي الصورة التي تؤول إليها المعادلة $xy=C^2$

(C مقدار ثابت) إذا أديرت المحاور بزاوية قدرها 45° (الحل الهندسي لها يتضح فيما بعد).

٦ــ أثبت أن معادلة الدائرة $x^2+y^2=r^2$

لا تتغير بدوران المحاور. أي أنه بدوران المحاور خلال زاوية حادة في المستوى فإن معادلة الدائرة تظل ثابتة في المستوى.

٧ــ أثبت أن الأنعكاس في الخط المستقيم L_{α} $\alpha=1,2$ حيث

$$L_1 : x=a\,,\; L_2 : y=b$$

يعطى من

$$R_{L_1}((x,y))=(2a-x,y)$$
$$R_{L_2}((x,y))=(x,2b-y)$$

٨ــ أثبت أن الأنعكاس في الخط المستقيم المار بنقطة الأصل ويصنع زاوية α مع الاتجاه الموجب لمحور x يكافئ دوران في الأتجاة الموجب بزاوية مقدارها 2α.

٩ــ أثبت أن الراسم $(x,y)\longrightarrow\left(\frac{x+\sqrt{3}\,y}{2},\frac{\sqrt{3}\,x-y}{2}\right)$ هو تساو قياسي وهو إنعكاس في الخط المستقيم $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$.

١٠ــ أثبت أن فئة الأنعكاس في المستوى مع عملية تحصيل الرواسم تكون مجموعة Group ليست إبدالية.

١١ــ إذا كان $A(3,2), B(3,1)$ فأوجد محور الأنعكاس L الذي يحقق أن $R_L(A)=B$ ومن ثم أوجد

$$R_L((7,-1)), R_L((0,0))$$

إرشاد : يقال لتحويل F أنه تساو قياس إذا كان يحفظ المسافة بين النقاط أي أن

$$\overline{AB}=\overline{f(A)f(B)}$$

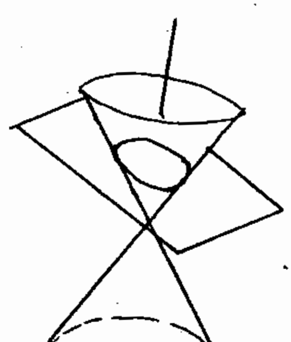
الجزء الثاني

القطاعات المخروطية Conic Sections

مقدمة : نشأة القطاعات المخروطية:

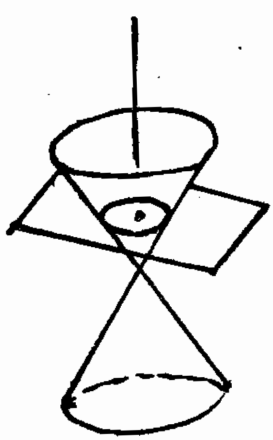
هذا الجزء يهدف إلى كيفية وصف القطاعات المخروطية الآن بطرق أحدث من التي وصفها اليونانيون في الأصل وكمنحنيات مناظرة لمعادلة من الدرجة الثانية. اليونانيون وصفوا هذه المنحنيات كتقاطع مستوى مع مخروط مزدوج وبالتالي يكون الاسم قد وضح معناه. يوجد عدد من الاحتمالات لتقاطع المستوى مع المخروط كما هو واضح من الشكل تبعاً لذلك يكون لدينا التصنيف الآتي:ـ

(a) قطاعات مخروطية أساسية



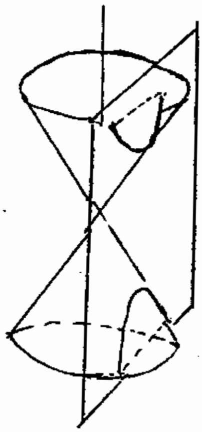
قطع ناقص

المستوى مائل على رو اسم المخروط



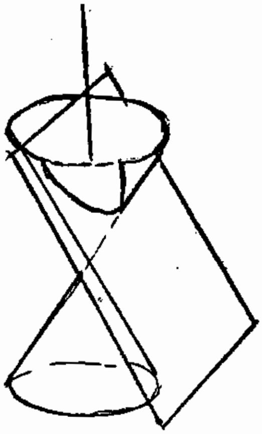
دائرة

المستوى عمودي على محور المخروط



قطع زائد

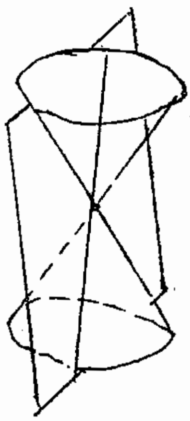
المستوى يوازي محور المخروط



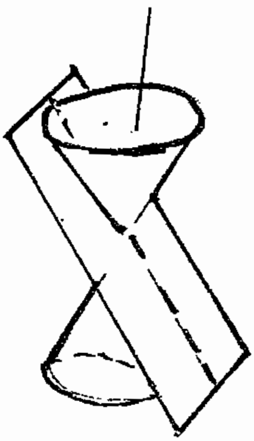
قطع مكافئ

المستوى يوازي راسم المخروط

(b) قطاعات مخروطية محللة



زوج من المستقيمات المتقاطعة



خط مستقيم

المستوى يمس المخروط

نقطة

المستوى يمر بالرأس فقط

مجموعة المقاطع (a) هي قطاعات مخروطية أساسية **Standard Conic Section** وهي دائرة وقطع مكافئ وقطع ناقص وقطع زائد والتي فيها المستوى قطع المخروط المزدوج.

مجموعة المقاطع (b) هي قطاعات مخروطية محلله **Degenerate Conic Section** حصلنا عليها بمرور المستوى خلال رأس المخروط أو رأس المخروط وراسم **Generator (rulling)** من رو اسم المخروط أو راسمين وسوف نقوم بدراسة تفصيلية في الأبواب القادمة من وجهة نظر تحليلية.

في هذا البند نتبين أن كل منحنى ناتج عن تقاطع مستوى خلال مخروط مزدوج يحقق المعادلة

$$\overline{PF} = e.\overline{PD}$$

باختيار مناسب للنقاط P, F, D نقطة على المنحنى.

إذن كل قطع مخروطي هندسي **Geometric Conic Sections** هو أيضا قطع مخروطي جبري **algebraic conic section**.

نفرض أن المستوى القاطع يصنع زاوية حادة مع المخروط ونفرض أن الزاوية الحادة بين الجانب والمحور للمخروط هي β.

إذن المقطع يكون

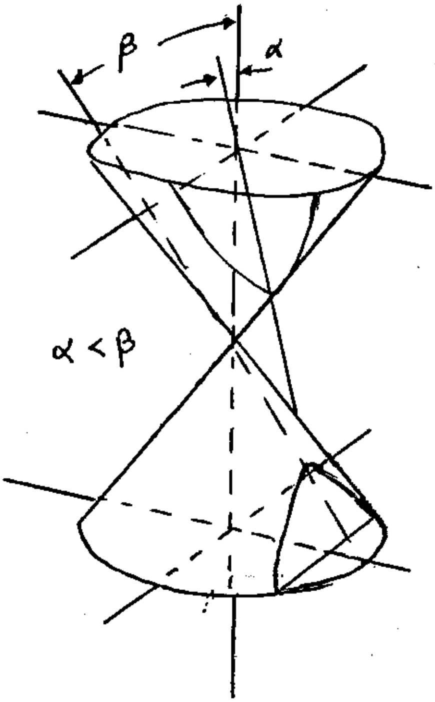
(i) دائرة إذا كان $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

(ii) قطع ناقص إذا كان $\beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$

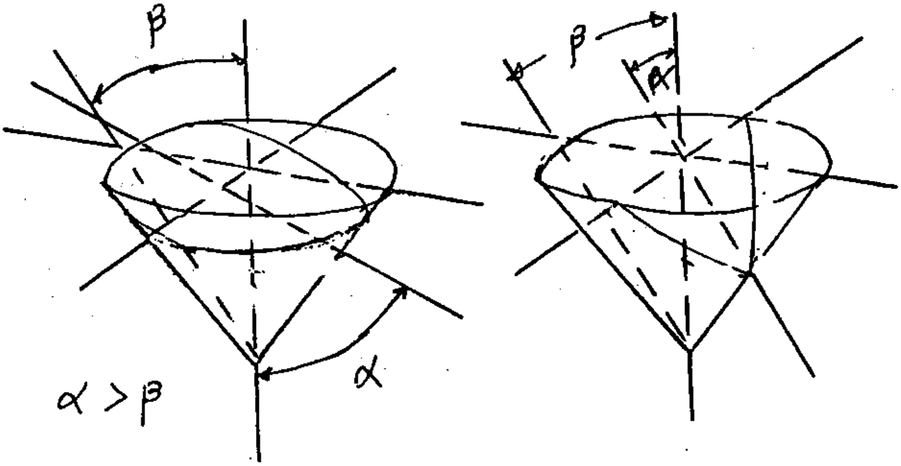
(iii) قطع مكافئ إذا كان $\alpha = \beta$

(iv) قطع زائد إذا كان $0 \le \alpha < \beta$

كما هو مبين بالرسم



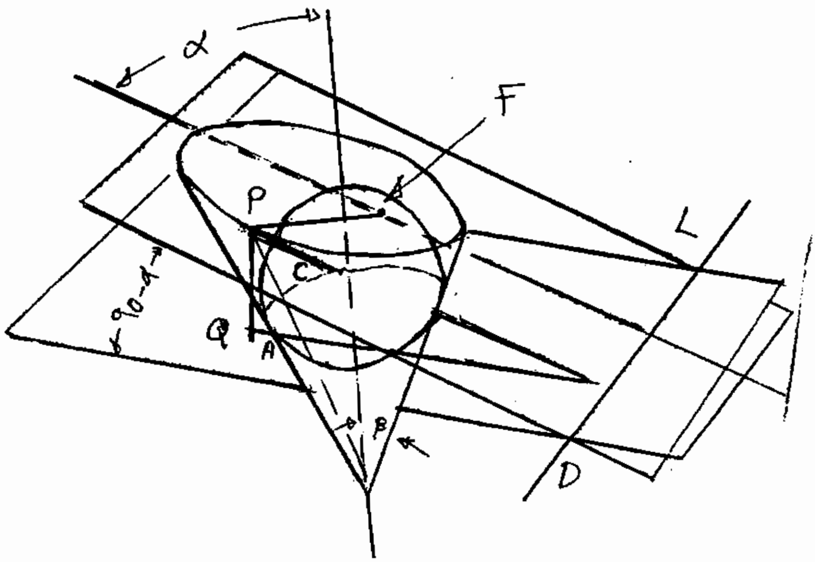
α < β



α > β

الترابط بين هذه المنحنيات يمكن توضيحه كالآتي:ــ

كرة مرسومة داخل مخروط بحيث تمسه من الداخل خلال دائرة C وتمس المستوى القاطع عند نقطة F. نفرض أن P أي نقطة على القطع المخروطي.

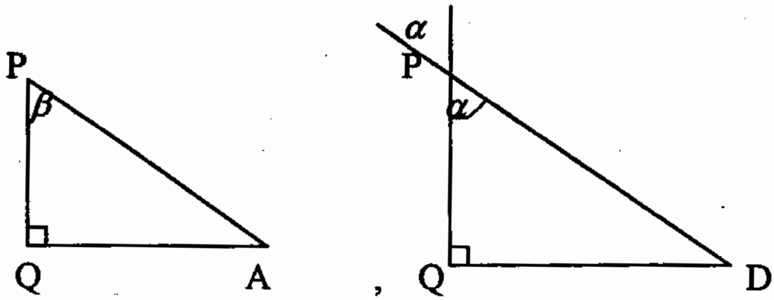


النقطة F تسمى البؤرة **Focus** والخط L الذي هو خط تقاطع المستوى القاطع مع المستوى الذي يحوي الدائرة يسمى الدليل **directrix** للقطع المخروطي.

ولتوضيح ذلك نفرض أن Q نقطة بحيث الخط المار بالنقطة P يوازي محور المخروط ويقطع مستوى الدائرة C ونفرض أن A بحيث الخط الذي يصل P برأس المخروط يمس الدائرة C، ونفرض أن $\overline{PD}$ عمودي على L عند النقطة D.

إذن $\overline{PF}, \overline{PA}$ مماسان لنفس الكرة من نقطة مشتركة P أي $PF = PA$.

ومن المثلث القائم



من الشكل يكون

$$PQ = PA\cos\beta$$
$$PQ = PD\cos\alpha$$
$$PA = PF$$

بالقسمة نحصل على

$$PF = e\,.\,PD$$

حيث

$$e = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$$

و α , β ثوابت لمخروط معطى ومستوى قاطع.

والنسبة e تسمى الإختلاف المركزي **eccentricity**.

النقطة P تنتمي لقطع مكافئ، قطع ناقص، دائرة، قطع زائد إذا كانت $e=1, e<1, e=0, e>1$ على الترتيب.