الباب الثامن
تصنيف القطاعات المخروطية
(منحنيات الدرجة الثانية)

تعد دراسة المعادلات العامة لمنحنى الدرجة الثانية وتحويلها إلى أبسط الصور (الصورة القياسية) من المسائل الهامة في الهندسة التحليلية.

معادلة الدرجة الثانية بالنسبة إلى x,y تكتب على الصورة

$$A x^2 + B x y + C y^2 + D x + B y + F = 0 \qquad (1)$$

ونفرض أن $B^2 - 4AC \neq 0$. ومن المعلومات السابقة نتوقع أنه في الحالة العامة، المعادلة (1) تمثل قطع ناقص أو ليس لها محل هندسي إذا كانت $B^2 - 4AC < 0$ وتمثل قطع زائد إذا كانت $B^2 - 4AC > 0$. وطبقاً لذلك تسمى المعادلة (1) من النوع الناقص أو من النوع الزائد تبعاً للمقدار $B^2 - 4AC$. إما أن يكون سالب أو موجب على الترتيب. وإذا كان المقدار $B^2 - 4AC$ يساوي صفر، فإننا نسمى المعادلة (1) من النوع المكافئ.

نعرض مميز معادلة الدرجة الثانية (1) بالآتي:

$$\Delta = 4ACF - B^2 F - AE^2 - CD^2 + BDE$$

(أنظر المميز في حالة أزواج الخطوط المستقيمة).

وبذلك نصل إلى النتائج الآتية:-

(١) المعادلة (1) من النوع الزائد $\left(B^2 - 4AC > 0\right)$ تمثل قطع زائد إذا كانت $\Delta \neq 0$ وإذا كانت $\Delta = 0$ فإنها تمثل زوج من الخطوط المستقيمة المتقاطعة.

(٢) المعادلة (1) من النوع الناقص $\left(B^2 - 4AC < 0\right)$ تمثل قطع ناقص إذا كانت $A\Delta < 0, \Delta \neq 0$ ولا تمثل محل هندسي إذا كانت $A\Delta > 0, \Delta \neq 0$
وإذا كانت $\Delta = 0$ فإن المعادلة تمثل نقطة واحدة.

لتحديد شكل وموضع القطع الناقص والقطع الزائد المعرف بالمعادلة (1) من الضروري أن نحاول نقل ودوران المحاور ولكن بشروط. إذا كانت $\Delta = 0$ فإنه من الممكن نقل المحاور لتتحول المعادلة إلى صورة جديدة وفي حالة المعادلة الناقصية فإن المعادلة الجديدة تمثل نقطة واحدة وهي نقطة الأصل الجديدة.

وفي الحالة الزائدية فإننا نحاول تحليل هذه المعادلة إلى معادلتين خطيتين ويمثلان خطين مستقيمين.

(٣) المعادلة (1) من النوع المكافئ $B^2 - 4AC = 0$ تمثل قطع مكافئ إذا كانت $\Delta \neq 0$. وإذا كانت $\Delta = 0$ فإنها تمثل زوج من الخطوط المستقيمة المتوازية أو خط مستقيم واحد أو ليس لها محل هندسي.

<u>مثال (١):</u> المعادلة

$$8x^2 + 24xy + 18y^2 - 14x - 21y + 3 = 0$$

يكون لها $B^2 - 4AC = 0,\ \Delta = 0$

(حاول أن تتأكد من هذا)؟

هذه المعادلة يمكن كتابتها على الصورة

$$2(2x+3y)^2 - 7(2x+3y) + 3 = 0$$

ويمكن تحليلها إلى قوسين من الدرجة الأولى

$$[2(2x+3y)-1]\,[(2x+3y)-3] = 0$$

وهي تمثل زوج من الخطوط المستقيمة المتوازية

$$4x+6y-1=0,\quad 2x+3y-3=0$$

ويمكن تلخيص النتائج السابقة في الجدول الآتي:

δ / Δ	$\delta = B^2 - 4AC < 0$	$\delta = B^2 - 4AC = 0$	$\delta = B^2 - 4AC > 0$
$\Delta \neq 0$	قطع ناقص $\Delta A < 0$ لا يوجد محل هندسي ، $A\Delta > 0$	قطع مكافئ	قطع زائد
$\Delta = 0$	نقطه	خطين مستقيمين متوازيين أو لا يوجد محل هندسي أو خط واحد.	خطين مستقيمين متقاطعين

وفي الحالة الخاصة التي فيها B=0 يمكننا إعطاء الآتي:ـ

بعمليات إكمال المربع (نقل المحاور) وتبسيط معادلة الدرجة الثانية

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, (A, C) \neq (0, 0)$$

نصل في النهاية إلى أحد الصور المجدولة في الجدول الآتي:ـ

Type	Equation	Graph	Center	Vertices	Foci
(1)	$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$	Circle	(h,k)	--	--
$R > 0$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	Ellipse	(h,k)	$(h \pm a, k)$	$\left(h \pm \sqrt{a^2 - b^2}, k\right)$
a>b>o	$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$	Ellipse	(h,k)	$(h, k \pm a)$	$\left(h, k \pm \sqrt{a^2 - b^2}\right)$
(2)	$(x-h)^2 = 4\rho(y-k)$	Parabola	--	(h,k)	$(h, k+\rho)$
$\rho \neq 0$	$(x-h)^2 = 4\rho(y-k)$	Parabola	--	(h,k)	$(h+\rho, k)$

Type	Equation	Graph	Center	Vertices	Foci
(3) a >0	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	Hyperbola	(h,k)	$(h \pm a,k)$	$\left(h \pm \sqrt{a^2+b^2}\,,k\right)$
b >0	$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$	Hyperbola	(h,k)	$(h,k \pm a)$	$\left(h,k \pm \sqrt{a^2+b^2}\right)$

إذا كانت معادلة الدرجة الثانية لها محل هندسي يمثل قطع مخروطي فإننا نقول أنه قطـع مخروطي محلل degenerate. إذا كان $\Delta=0$ وقطع مخروطي غـير محلـل non-degenerate إذا كان $\Delta \neq 0$.

نفرض أنه أعطيت لدينا المعادلة العامة لمنحنى الرتبة الثانية

$$A x^2+B x y+C y^2+D x+B y+F=0$$

لتبسيط هذه المعادلة بواسطة الإنتقال إلى إحداثيات أخرى (عند موضع أخر لمحـوري الإحداثيات أكثر مناسبة).

نحدد المطلوب:

(١) لابد أن نصل إلى اختفاء الحد المحتوي على حاصل ضرب الإحداثيين الجـاريين من بين مجموعة الحدود العليا.

(٢) يجب أن يكون عدد الحدود من الدرجة الأولى أقل ما يمكـن (وإذا أمكـن فحذفها كلها تماما).

(٣) لا بد من حذف الحد المطلق أيضا إذا أمكن ذلك.

المعادلة الناتجة بعد مراعاة هذه القواعد تسمى بالمعادلة القياسية.

وفيما يلي سنوضح عمليا كيف يمكن اتباع العمليات السابقة لتحويل المعادلة المعطاة إلى الصورة القياسية:ــ

مثال (٢): حول المعادلة

$$17x^2+12xy+8y^2-46x-28y+17=0 \qquad (1)$$

إلى الصورة القياسية ومن ثم حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله وحاول رسمه.

الحل: نحاول أولا أن نبسط المعادلة بواسطة نقل محوري الإحداثيات نقلا متوازيا. ننقل نقطة الأصل إلى النقطة $S(x_o, y_o)$ التي نعتبرها مؤقتا نقطة أختيارية، والتحويل المناظر هو

$$x=\bar{x}+x_o \ , y=\bar{y}+y_o \qquad (2)$$

بالتعويض في المعادلة (1) عن y, x وبعد جمع الحدود المتشابهة والاختصارات اللازمة نحصل على

$$\begin{aligned}17x^2+12xy+8y^2-46x-28y+17 &= 17\bar{x}^2+12\bar{x}\bar{y}+8\bar{y}^2\\ &+2(17x_o+6y_o-23)\bar{x}+2(6x_o+8y_o-14)\bar{y} \qquad (3)\\ &+(17x_o^2+12x_o y_o+8y_o^2-64x_o-28y_o+17)\end{aligned}$$

وتختفي حدود الدرجة الأولى في المعادلة المحولة للمنحنى المعطى إذا أخذنا x_o, y_o بحيث تتحقق المتساوية (3) وتكون خالية من $\bar{x}, \bar{y}$.

$$\begin{aligned}17x_o+6y_o-23&=0\\ 6x_o+8y_o-14&=0\end{aligned} \qquad (4)$$

وبحل هاتين المعادلتين معا نحصل على $x_o=1, y_o=1$ والحد المطلق في المعادلة المحولة هو $\bar{F}$ مثلا، حيث

$$\bar{F}=17x_o^2+12x_o y_o+8y_o^2-46x_o-28y_o+17$$

$$=\left(17x_o+6y_o-23\right)x_o+\left(6x_o+8y_o-14\right)y_o$$
$$+\left(-23x_o-14y_o+17\right)=-23x_o-14y_o+17=-20$$

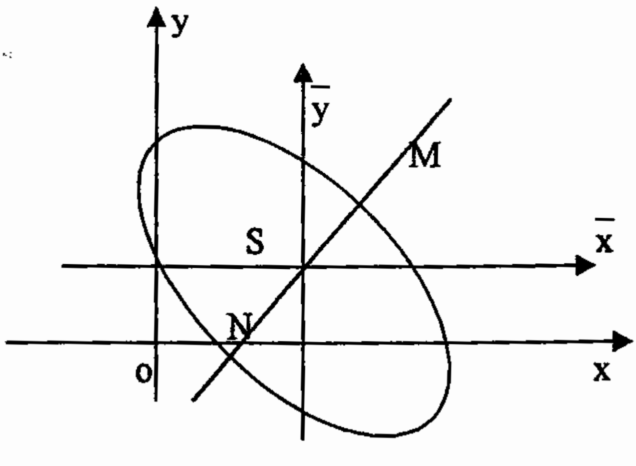
وتأخذ المعادلة (1) في الإحداثيات الجديدة الصورة:ـــ

$$17\bar{x}^2+12\bar{x}\,\bar{y}+8\bar{y}^2-20=0 \qquad (5)$$

حيث نقطة أصل مجموعة الإحداثيات $S(1, 1)$.

ونشير هنا إلى أن الطرف الأيسر للمعادلة (5) لا يتغير عند التعويض عن $\bar{x}, \bar{y}$ بالعددين $-\bar{x}, -\bar{y}$ ، ولذا فإذا كانت نقطة ما $M\left(\bar{x}, \bar{y}\right)$ تقع على المنحنى المعطى في (5) فإن النقطة $M\left(-\bar{x}, -\bar{y}\right)$ تقع أيضاً على المنحنى.

ولكن النقطتين N, M متماثلتان بالنسبة إلى النقطة S. وهكذا تقع كل نقط المنحنى المعطى أزواجاً أزواجاً كل زوج منها متماثل بالنسبة إلى S. وتسمى النقطة S في هذه الحالة بمركز التماثل أو ببساطة مركز المنحنى المعطى. والآن أصبح المعنى الهندسي للتحويل المتبع واضحاً، نقلت نقطة الأصل إلى مركز المنحنى.



نجري الآن دوراناً للمحورين المنقولين بزاوية θ والتحويل المناظر

$$\bar{x} = x'\cos\theta - y'\sin\theta$$
$$\bar{y} = x'\sin\theta + y'\cos\theta \qquad (6)$$

ومن (5) ,(6) نحصل بعد الاختصارات اللازمة على:

$$17\bar{x}^2 + 12\bar{x}\,\bar{y} + 8\bar{y}^2 - 20 = \left(17\cos^2\theta + 12\cos\theta\sin\theta + 8\sin^2\theta\right)$$
$$-\left(17\cos\theta\ \sin\theta + 6\cos^2\theta\ - 6\sin^2\theta - 8\cos\theta\ \sin\theta\right)c'y'$$

نحاول اختيار الزاوية θ بحيث يؤول معامل $x'y'$ إلى الصفر ولهذا الغرض سنضطر لحل المعادلة المثلثية:

$$-17\cos\theta\sin\theta + 6\cos^2\theta\ - 6\sin^2\theta\ + 8\cos\theta\sin\theta = 0$$

أو

$$6\sin^2\theta + 9\ \sin\theta\cos\theta\ - 6\cos^2\theta\ = 0$$

ومن هنا

$$6\tan^2\theta\ + 9\tan\theta\ - 6 = 0$$

بحل هذه المعادلة التربيعية بالنسبة إلى $\tan\theta$ نجد أن $\tan\theta = \frac{1}{2}$ أو $\tan\theta = -2$ ، نأخذ القيمة الأولى التي تناظر دوران المحورين بزاوية حادة. بمعرفة $\tan\theta$ نحسب $\sin\theta, \cos\theta$ وهي

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}\ , \sin\theta\ = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

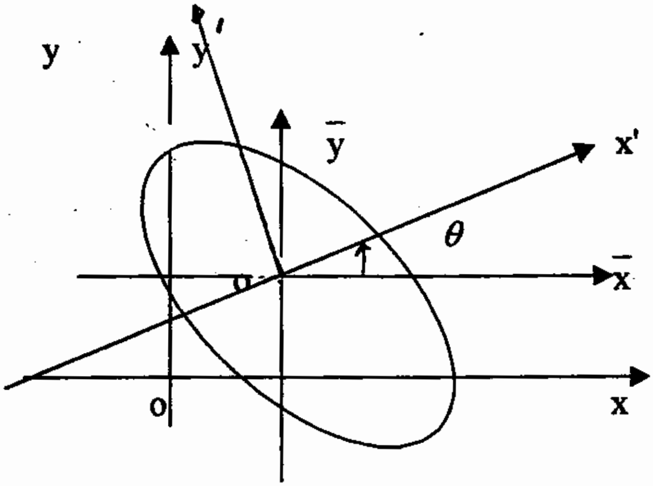
وبذلك تصبح معادلة المنحنى (7) المعطى في المجموعة x', y' هي:

$$2x'^2 + 5y'^2 - 20 = 0$$

أو

$$\frac{x'^2}{1} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

وبالتالي نكون قد حصلنا على معادلة قياسية لقطع ناقص محورية 1 ,2 وينطبق المحـــور الأكبر للقطع الناقص على المحور 'oy كما هو واضح من الشكل التالي:ـــ



مركز منحنى الدرجة الثانية:ـ

نحاول هنا كيف يمكننا إيجاد مركز منحنى الدرجة الثانية. لذلك نفرض أنـــه أعطيت لنا معادلة منحنى من الدرجة الثانية بوجه عام

$$A x^2 + 2 B x y + C y^2 + 2 D x + 2 E y + F = 0$$

فإن المعادلتين اللتين تحددان مركز هذا المنحنى $S(x_o, y_o)$ هما

$$\begin{aligned} A x_o + B y_o + D &= 0 \\ B x_o + C y_o + E &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

وبعد نقل نقطة الأصل إلى المركز S تأخذ معادلة المنحنى المعطى الصورة التالية:

$$A \bar{x}^2 + 2 B \bar{x} \bar{y} + C \bar{y}^2 + \bar{F} = 0 \qquad (2)$$

حيث

$$\bar{F} = A x_o^2 + 2B x_o y_o + C y_o^2 + 2D x_o + 2E y_o + F$$
$$= (A x_o + B y_o + D) x_o + (B x_o + C y_o + E) y_o$$
$$+ (D x_o + B y_o) + F$$

ومع توافر شرط أن تكون x_o , y_o هما إحداثي مركز المنحنى، نأخذ في الأعتبار (1) فنجد أن

$$\bar{F} = D x_o + B y_o + F$$

قد يحدث أن تكون مجموعة المعادلات (1) متناقضة أي لا يكون لها حلول وفي هذه الحالة لا يكون للمنحنى مركز وعندئذ يجب تبسيط المعادلة المعطاه بطريقة أخرى وفي هذه الحالة يكون

$$AC - B^2 = 0$$

مثال (٣): حول المعادلة $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$ إلى الصورة القياسية وارسم المنحنى الذي تمثله.

الحل: نكون المعادلتين (1)

$$4x_o - 2y_o - 1 = 0$$
$$-2x_o + y_o - 7 = 0$$

فنرى أن المجموعة الناتجة متناقضة مما يعنى عدم وجود مركز للمنحنى المعطى ولذا فلا يمكن نقل المحاور كما درسنا سابقاً لأن نقل المحاور لا بد أن يكون إلى مركز المنحنى.

ولذلك نتبع الآتي: ندير المحاور بزاوية θ دون نقل نقطة الأصل. العلاقتين المناظرتين للإحداثيين المحولين هما

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$$

وبالتالي فإن المعادلة المعطاة تأخذ الصورة

$$\left(4\cos^2\theta - 4\cos\theta\,\sin\theta + \sin^2\theta\right)\bar{x}^2 + 2(-4\sin\theta\,\cos\theta - 2\cos^2\theta +$$
$$2\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta)\,\bar{x}\,\bar{y} + (4\sin^2\theta + 4\sin\theta\,\cos\theta + \cos^2\theta)\,\bar{y}^2$$
$$+2(-\cos\theta - 7\sin\theta)\,\bar{x} + 2(\sin\theta - 7\cos\theta)\,\bar{y} + 7 = 0 \qquad (*)$$

نحاول الآن اختيار θ بحيث يؤول معامل $\bar{x}\ \bar{y}$ إلى الصفر، ولهذا الغرض سنضطر إلى حل المعادلة المثلثية:

$$-4\sin\theta\,\cos\theta - 2\cos^2\theta + 2\sin^2\theta + \sin\theta\,\cos\theta = 0$$

فنحصل على

$$2\sin^2\theta - 3\sin\theta\,\cos\theta - 2\cos^2\theta = 0$$

أو

$$2\tan^2\theta - 3\tan\theta - 2 = 0$$

ومن هنا $\tan\theta = 2, \tan\theta = -\dfrac{1}{2}$. نأخذ القيمة الأولى التي تناظر دوران المحورين بزاوية حادة. وبمعرفة أن $\tan\theta = -\dfrac{1}{2}$ نجد أن

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}\ , \sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

والمعادلة (*) تأخذ الصورة

$$5\bar{y}^2 - 6\sqrt{5}\,\bar{x} - 2\sqrt{5}\,\bar{y} + 7 = 0 \qquad (**)$$

ويجري تبسيط هذه المعادلة بواسطة النقل المتوازي للمحورين $o\bar{x}, o\bar{y}$.

نعيد كتابة (**)

$$5\left(\bar{y}^2 - 2\frac{\sqrt{5}}{5}\bar{y}\right) - 6\sqrt{5}\,\bar{x} + 7 = 0$$

نكمل الصيغة بين القوسين إلى مربع كامل فنحصل على

$$\left(\bar{y}-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2-\frac{6\sqrt{5}}{5}\left(\bar{x}-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)=0$$

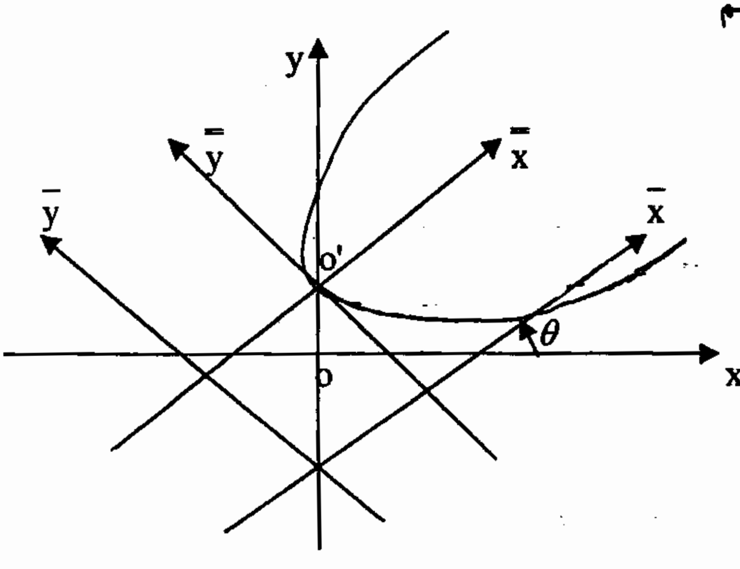
ندخل الآن الإحداثيين الجديدين $\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}$ بفرض أن

$$\bar{x}=\bar{\bar{x}}+\frac{\sqrt{5}}{5}\ ,\ \bar{y}=\bar{\bar{y}}+\frac{\sqrt{5}}{5}$$

مما يناظر إزاحة المحورين إزاحة متوازية بمقدار $\frac{\sqrt{5}}{5}$ في اتجاه المحور $o\bar{x}$ وبمقدار $\frac{\sqrt{5}}{5}$ في اتجاه المحور $o\bar{y}$. وفي مجموعة الإحداثيات $\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}$ معادلة المنحنى المعطى تأخذ الصورة

$$\bar{\bar{y}}^2=\left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right)\bar{\bar{x}}$$

وهذه هي معادلة قياسية لقطع مكافئ بارامتره $L=\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ورأسه في نقطة أصل مجموعة الإحداثيات $\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}$. ويقع القطع المكافئ متماثلاً بالنسبة للمحور $\bar{\bar{x}}$ ويمتد إلى المالا نهاية في الاتجاه الموجب لهذا المحور. وإحداثيات رأسه في المجموعة $\bar{x}, \bar{y}$ هما $\left(\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ وفي المجموعة x, y هما $\left(-\frac{1}{5},\frac{3}{5}\right)$ وموضح موضع القطع المكافئ بالرسم



المحللة

القطاعات المخروطية: Degenerate Conics

نعود مرة أخرى إلى مجموعة المعادلات التي تحدد مركز المنحنى المعطى

$$A x^2 + B x y + C y^2 + D x + E y + F = 0$$

وهما

$$\begin{aligned} 2 A x_o + B y_o + D = 0 \\ B x_o + 2 C y_o + E = 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

نرمز بالرمز δ لمحدد هذه المجموعة

$$\delta = B^2 - 4 A C = -\begin{vmatrix} 2A & B \\ B & 2C \end{vmatrix}$$

إذا كان $\delta \neq 0$ يكون للمجموعة (1) حل وحيد وفي هذه الحالة يكون للمنحنى من الرتبة الثانية مركز وحيد ويسمى بالمنحنى المركزي وينتمي القطع الناقص والقطع الزائد إلى المنحنيات المركزية غير أنه قد يحدث أن المعادلة عند $\delta \neq 0$ تتحول إلى صورة قياسية مشابهة للمعادلة القياسية للقطع الناقص أو القطع الزائد ولكنها لا تنطبق كلية لا على هذا ولا على تلك وسنورد الآن أمثلة من هذا النوع.

مثال (٤): في المعادلة

$$5 x^2 + 6 x y + 5 y^2 - 4 x + 4 y + 12 = 0$$

يكون

$$\delta = -64 \neq 0 , \delta < 0$$

أي أن

$$\delta = B^2 - 4 A C < 0$$

وبالتالي فهي تتحول إلى الصورة القياسية (بالطرق السابقة)

$$\bar{x}^2 + 4 \bar{y}^2 + 4 = 0$$

أو

$$\frac{\bar{x}^2}{4}+\frac{\bar{y}^2}{1}=-1$$

هذه المعادلة تشبه المعادلة القياسية للقطع الناقص غير أنها لا تحدد في المستوى أي شكل هندسي حقيقي وذلك لأن الطرف الأيسر ليس سالباً عند أي نقطة $(\bar{x},\bar{y})$ في حين أن الطرف الأيمن سالب. وهذه المعادلة والمعادلات المماثلة لها تسمى بمعادلات القطع الناقص التخيلي ويمكن أن نتأكد من ذلك حيث أن $A\Delta>0$

وفي هذه الحالة

$$A\Delta=160>0,\ \Delta=32,\ A=5$$

مثال (٥): المعادلة

$$5x^2+6xy+5y^2-4x+4y+4=0$$

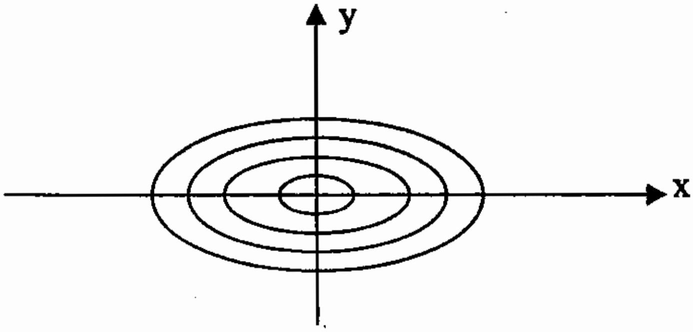
تتحول إلى الصورة القياسية $(\delta=9\neq 0)$

$$\bar{x}^2+4\bar{y}^2=0$$

أو

$$\frac{\bar{x}^2}{4}+\frac{\bar{y}^2}{1}=0$$

وهذه المعادلة لا تحدد قطعاً ناقصاً وإنما تحدد نقطة واحدة وهي نقطة الأصل (0, 0) وهذه المعادلة والمعادلات المماثلة لها تسمى بمعادلات القطع الناقص المحلل **degenerated** كما يتضح من الرسم.



ويمكن التأكد من ذلك لأن $\Delta = 0$ وبالتالي فإن المعادلة المعطاة تمثل نقطة على حسب المعلومات السابقة الموجودة بالجدول السابق الذي يعطي تصنيف منحنيات الدرجة الثانية.

مثال (٦): المعادلة

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 + 16x + 16y + 16 = 0$$

حيث $\delta = B^2 - 4AC = 64 > 0$ ، تتحول إلى المعادلة القياسية

$$\frac{\bar{x}^2}{4} - \frac{\bar{y}^2}{1} = 0$$

والمعادلة الأخيرة تشبه المعادلة القياسية للقطع الزائد، ولكنها تحدد زوجاً من المستقيمات المتقاطعة

$$\bar{x} + 2\bar{y} = 0, \ \bar{x} - 2\bar{y} = 0$$

وهذه المعادلة والمعادلات المماثلة لها تسمى بمعادلات القطع الزائد المحلل.

ويمكن أن نتأكد من ذلك حيث $\delta > 0, \Delta = 0$.

والخطين المستقيمين يتقاطعان في نقطة الأصل.

والآن نفرض أن $\delta = 0$ للمعادلة العامة المعطاه من الدرجة الثانية، وعند تحقق $\delta = 0$ هناك حالتان محتملتان:

(١) ليس لمجموعة المعادلات (1) التي تحدد مركز المنحنى حلول على الاطلاق وعندئذ لا يكون للمنحنى من الرتبة الثانية مركز. وفي هذه الحالة يمكن دائماً تحويل المعادلة المعطاه إلى الصورة القياسية وهي معادلة قطع مكافئ $(\Delta \neq 0)$.

(٢) لمجموعة المعادلات (1) عدد لانهائي من الحلول وعندئذ يكون للمنحنى المعطى من الدرجة الثانية عدد لانهائي من المراكز $(\Delta = 0)$.

مثال (٧): ندرس المنحنى

$$4x^2-4xy+y^2+4y-2y-3=0$$

وله $\delta=0$ ، ومجموعة المعادلات (1) التي تحدد مركز المنحنى في هذه الحالة تكون

$$8x_o-2y_o+2=0$$
$$-2x_o+2y_o-1=0$$

وهذه المجموعة تكافئ معادلة واحدة

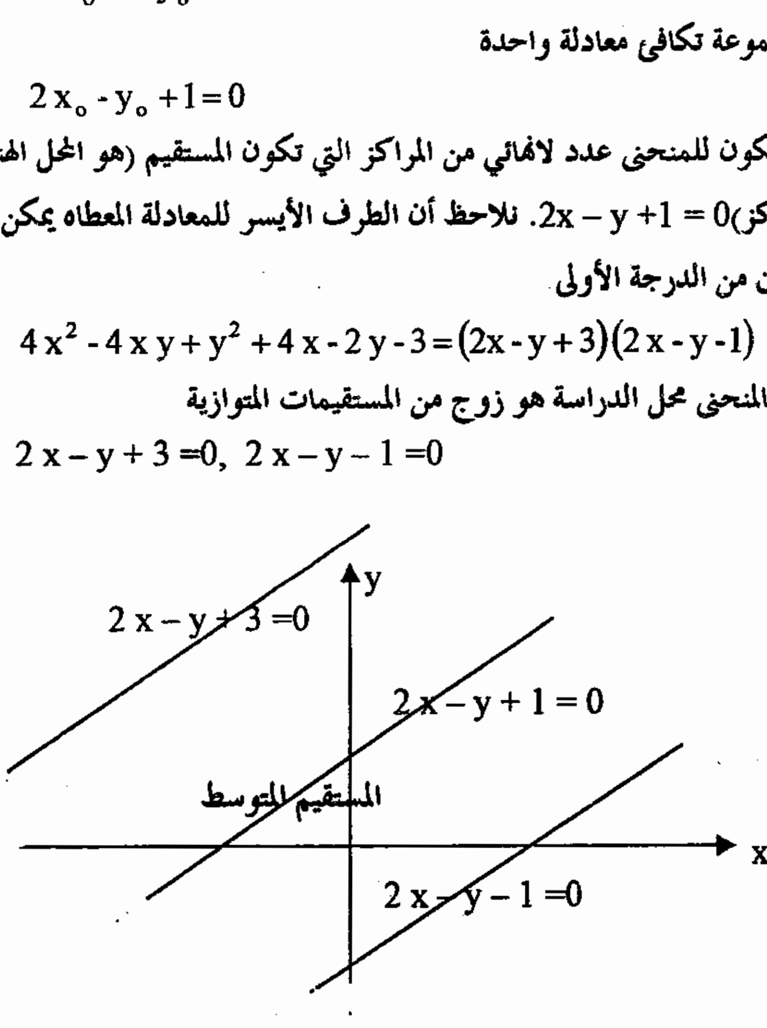
$$2x_o-y_o+1=0$$

وبالتالي يكون للمنحنى عدد لانهائي من المراكز التي تكون المستقيم (هو المحل الهندسي لهذه المراكز)$2x-y+1=0$. نلاحظ أن الطرف الأيسر للمعادلة المعطاه يمكن تحليله إلى عاملين من الدرجة الأولى

$$4x^2-4xy+y^2+4x-2y-3=(2x-y+3)(2x-y-1)$$

وبالتالي فالمنحنى محل الدراسة هو زوج من المستقيمات المتوازية

$$2x-y+3=0,\ \ 2x-y-1=0$$



ويسمى المنحنى المعطى في هذه الحالة قطع مكافئ محلل.

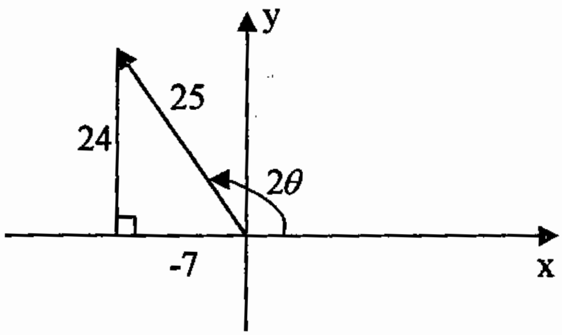
مثال (٨): بدوران المحاور بزاوية مناسبة ، إحذف الحد x y من المعادلة

$$73x^2 - 72xy + 52y^2 + 30x + 40y - 75 = 0 \qquad (*)$$

ومن ثم حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله وأرسمه.

الحل: الزاوية المناسبة θ التي تدور بها المحاور لنحصل على معادلة خالية من الحد الأوسط x y هي:

$$\tan 2\theta = \frac{B}{A-C} = -\frac{24}{7}, 0<\theta<\frac{\pi}{2} \quad , \cos 2\theta = -\frac{7}{25}$$



بما أن $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ إذن $\sin\theta, \cos\theta$ موجب

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} = \frac{3}{5}$$

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} = \frac{4}{5}$$

ومن تحويل الدوران نحصل على

$$x = \frac{3x'-4y'}{5}, y = \frac{4x'+3y'}{5}$$

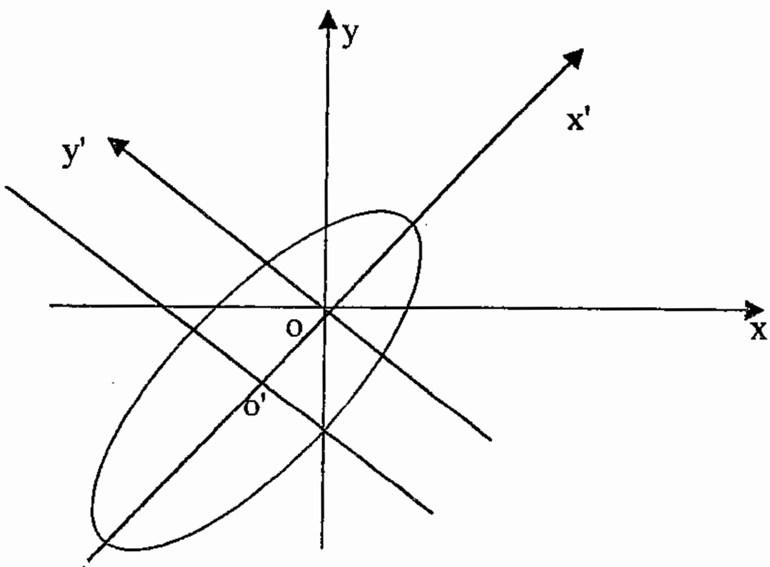
وبالتعويض في المعادلة المعطاه (*) نحصل على

$$25x'^2 + 100y'^2 + 50x' - 75 = 0$$

وبنقل المحاور (إكمال المربع) إلى نقطة 'o نحصل على

$$\frac{(x'-(-1))^2}{4}+y'^2=1$$

وهي معادلة قطع ناقص مركزه $o'(-1,0)$ في المستوى $o\,x'\,y'$ كما يتضح من الشكل التالي:ـــ



مثال (٩): بدوران المحاور بزاوية مناسبة حدد نوع القطع المخروطي

$$x^2-3xy+5y^2-4=0$$

ومن ثم أرسمه.

الحل: بنفس الأسلوب السابق يكون لدينا

$$\tan 2\theta=\frac{3}{4},\ \cos\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}\ ,\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$(x, y) \xrightarrow{R_{o(\theta)}} (x', y')$$

حيث

$$x = \frac{3x' - y'}{\sqrt{10}} \quad , y = \frac{x' + 3y'}{\sqrt{10}}$$

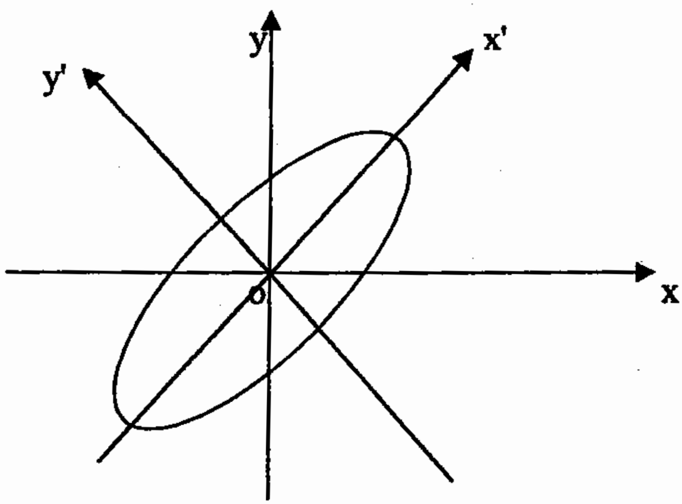
والمعادلة المعطاه تصبح

$$5x'^2 + 55y'^2 = 40$$

أو

$$\frac{x'^2}{8} + \frac{y'^2}{\frac{8}{11}} = 1$$

وهي معادلة قطع ناقص محوره الأكبر على امتداد محور x' ويمكنك معرفة جميع المعلومات مثل الرؤوس والبؤر ومعادلة الأدلة وذلك باستخدام التحويل (الدوران) والتحويل العكسي لتصف القطع وصف كامل بالنسبة للمحاور الأصلية كما هو في الشكل التالي:ـ



تمارين

١ـ أثبت أنه بدوران المحاور بزاوية θ تحقق

$$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{h}{A-C}$$

تصبح المعادلة

$$A x^2 + 2 h x y + B y^2 + F x + g y + C = 0$$

خالية من الحد المختلطxy.

٢ـ بدوران المحاور بزاوية مناسبة ارسم القطع المخروطي

$$x^2 + x y + y^2 - 6 = 0$$

٣ـ ارسم القطع المخروطي

$$x^2 + x y + y^2 = 1$$

٤ـ أستخدم مميز معادلة الدرجة الثانية لتحديد نوع القطع المخروطي في الحالات الآتية:ـ

(i) $x y + y^2 - 3 x = 5$

(ii) $x^2 + 4 x y + 4 y^2 - 3 x = 0$

(iii) $x^2 - 3 x y + 3 y^2 + 6 y = 7$

(iv) $6 x^2 + 3 x y + 2 y^2 + 17 y + 2 = 0$

(v) $3 x^2 + 12 x y + 12 y^2 + 435 x - 9 y + 72 = 0$

(vi) $3 x^2 + 4\sqrt{3}\, x y - y^2 = 7$

(vii) $3 x^2 + 4 x y - 6 = 0$

(viii) $y^2 + x y - 2 x^2 - 5 x - y - 2 = 0$

(ix) $x^2 + 6 x y + 9 y^2 + 4 x + 12 y - 5 = 0$