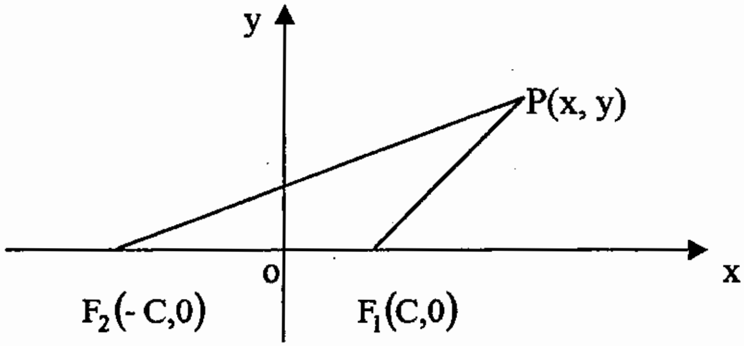
الباب الخامس

القطع الزائد Hyperbola

يعرف القطع الزائد على أنه المحل الهندسي للنقاط في المستوى التي أبعادها عن نقطتين ثابتتين في المستوى لها الفرق ثابت.

النقطتين تسميان البؤرتين والفرق يسمى 2a. وإذا أخذنا البؤرتين $F_1(C,0)$ ، $F_2(0,-C)$ ونقطة أصل الإحداثيات في منتصف المسافة بينهما يكون



$$PF_2 - PF_1 = 2a$$

$$\sqrt{(x+C)^2+y^2} - \sqrt{(x-C)^2+y^2} = 2a$$

بالتربيع والتبسيط والتربيع مرة ثانية نحصل على

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-C^2}=1$$

هذه المعادلة بالضبط هي معادلة القطع الناقص ولكن الآن a^2-C^2 سالب لأن الفرق بين أي ضلعين في المثلث F_1F_2P أقل من الضلع الثالث أي أن $2a< 2C$ لذلك $C^2-a^2>0$ ولها جذر موجب b

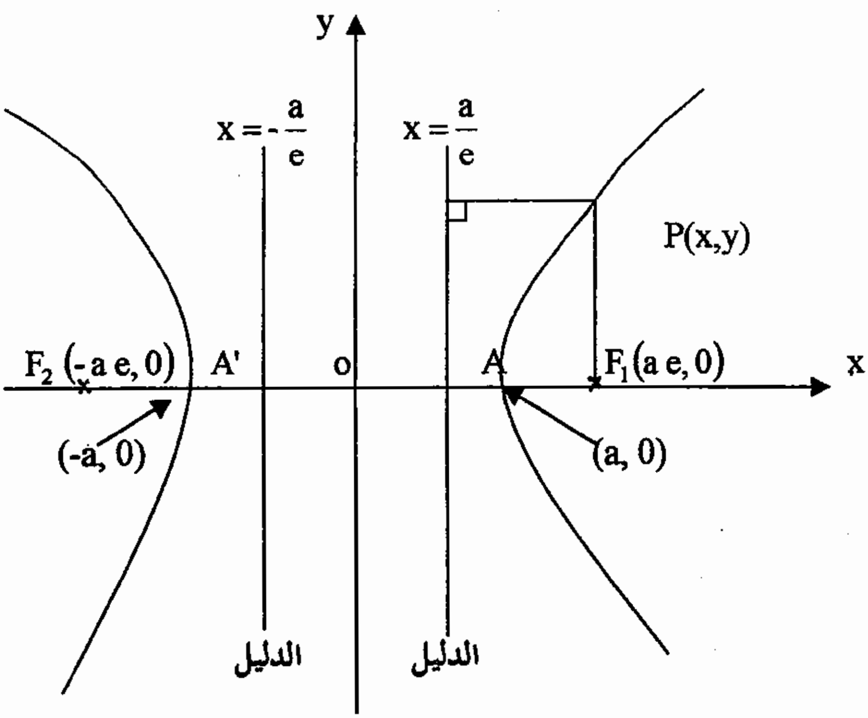
$$b=\sqrt{C^2-a^2} \quad or \quad a^2-C^2=-b^2 \qquad (1)$$

إذن معادلة القطع الزائد تأخذ الصورة

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (2)$$

هذه المعادلة مشابهة لمعادلة القطع الناقص فيما عدا الإشارة السالبة والعلاقة الجديدة (1) بين a, b, C.

أيضا المعادلة (2) متماثلة بالنسبة للمحاور ox, oy وكذلك نقطة الأصل ولكن لا توجد نقاط تقاطع حقيقية مع محور y. وفي الحقيقية لا يوجد جزء للمنحنى واقع بين x=-a, x=a.



$$oA=oA',\, oF_1=oF_2,\, AF_1=A'F_2$$

المستقيم العمودي على المحور القاطع (يوازي المحور المرافق) ويبعد عن المحور المرافـــق مسافة $\frac{a}{e}$ يسمى الدليل ولذلك فإن معادلة الدليل القريب من البؤرة $F_1(a\,e, 0)$ هي $x=\frac{a}{e}$ وكذلك بالنسبة للبؤرة $F_2(-a\,e, 0)$ يوجد دليل $x=-\frac{a}{e}$.

إذا دارت المحاور بزاوية $\frac{\pi}{2}$ أي

$$(x, y) \longrightarrow (-y, x)$$

فإننا نحصل على قطع زائد محوره القاطع محور y ومحوره المرافق محور x .

نسمي النسبة بين البعد بين البؤريتين 2C إلى البعد بـــين الرأســين 2a بـــالإختلاف المركزي e للقطع الزائد أي أن

$$e=\frac{C}{a}>1$$

من (1)

$$C^2=a^2+b^2$$

أو

$$e=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

أو

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2=e^2-1$$

كما في القطع الناقص يمكن استنتاج أن طول الوتر البؤري العمودي

$$\ell=\frac{2\,b^2}{a}=2\,a\left(e^2-1\right)$$

البعد 2a يسمى طول المحور القاطع وهو على امتداد محـــور ox ، 2b يســـمى طول المحور المرافق (التخيلي) وهو على أمتداد محور oy وتصبح إحداثيـــات البـــؤر هـــي

ونقاط تقاطع أفرع القطع مع المحور القاطع (محور ox) تسمى $(\pm C, 0) = (\pm a e, 0)$ الرؤوس ولها الإحداثيات $(\pm a, 0)$

القطع الزائد

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

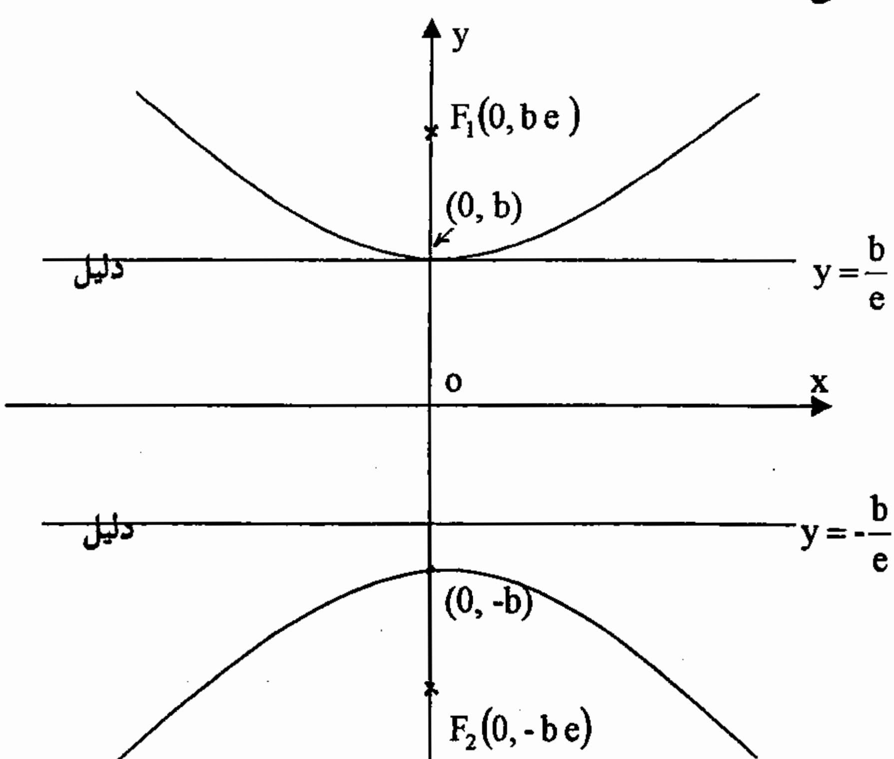
يسمى القطع الزائد المرافق للقطع الزائد

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

في الحالة العامة المعادلة

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \varepsilon \ , \ \varepsilon = \pm 1$$

تعرف قطع زائد والمرافق له.



قطع زائد مرافق

الخطوط التقاربية:. Asymptotes

كما تعلمنا في مقرر التفاضل أنه قد يحدث أن نقطة على منحنى تتحرك حتى تبعد عن نقطة الأصل كثيرا حتى تكون المسافة بينها وبين خط ثابت تقترب من الصفر مثل هذا الخط يسمى خط تقاربي للمنحنى.

القطع الزائد **(1)** $$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

له خطان تقاربيان $y=\pm\frac{b}{a}$

ونوضح ذلك كالآتي:ـــ

المعادلة **(1)** يمكن كتابتها على الصورة

(2) $$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{a\,b}{b\,x+a\,y}$$

من دراستنا لشكل القطع الزائد نجد أن فرع القطع الزائد الموجود في الربع الأول ممتد إلى ما لا نهاية وإذا تحركت النقطة $P(x, y)$ على هذا الفرع مبتعدة عن نقطة الأصل فإن x, y تقترب من ما لا نهاية والطرف الأيمن في **(2)** يقترب من الصفر.

أي أن

(3) $$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=0$$

والتي تجعلنا نعتقد أن الخط $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ أو $y=\frac{b}{a}x$

قد يكون خط تقاربي.

لنتأكد من ذلك، نبحث المسافة الرأسية بين المنحنى والخط حيث أننا نلاحظ

$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ هي المسافة الرأسية على المنحنى.

و $y=\frac{b}{a}x$ هي المسافة الرأسية على الخط.

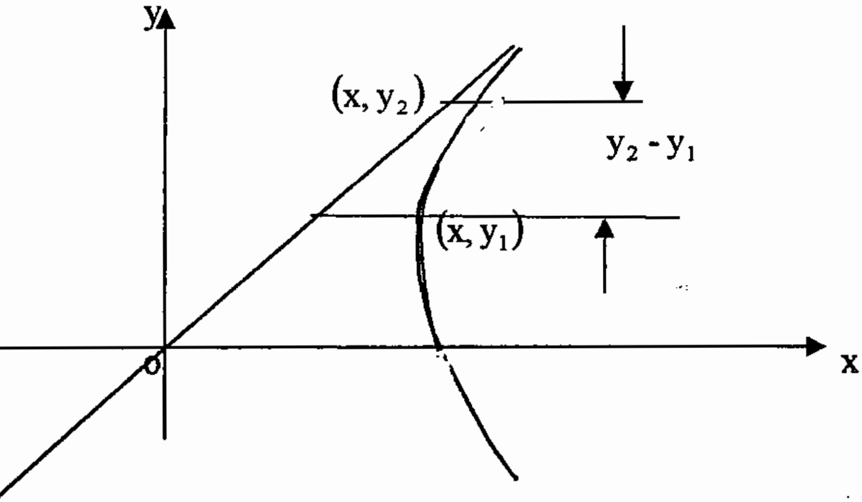
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\right) = b\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)$$

من (3) $$= b\,.\,0$$

$$= 0$$

بما أن المسافة الرأسية بين الخط والمنحنى تقترب من الصفر عندما $x\to\infty$ فإن المسافة العمودية من نقاط القطع الزائد إلى الخط $y=\frac{b}{a}x$ أيضاً تقترب من الصفر.

ولهذا فإن $y=\frac{b}{a}x$ هو خط تقاربي للمنحنى.



$$y_1=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\ ,\ y_2=\frac{b}{a}\,x$$

بالتماثل يمكن إثبات أن

$$y=-\frac{b}{a}x$$

هو خط تقاربي أيضاً للقطع الزائد.

معادلة القطع الزائد الذي محورة القاطع يوازي محور x مثلا ومحوره المرافق يوازي محور y والذي مركزة (h, k) له الصورة

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

والذي رؤوسه $(h \pm a, k)$. وبؤرة $F(h \pm a e, k)$.

وخطوطه التقاربيه هي $y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$

<u>مثال (١):</u> أوجد المركز والرؤوس والبؤر والخطوط التقاربيه للقطع الزائد

$$4x^2-y^2+8x+2y-1=0 \qquad (1)$$

ومن ثم أرسمه.

<u>الحل:</u> المعادلة (1) يمكن كتابتها (بإكمال المربع) في الصورة

$$(x+1)^2-\frac{(y-1)^2}{4}=1$$

وهي معادلة قطع زائد له $a=1, b=2$ ومحوره القاطع يوازي محور ox ومركزه $o'(-1,1)$. والرؤوس $V(h \pm a, k)=V(-1 \pm 1, 1)$

والبؤر $F\left(h \pm \sqrt{a^2+b^2}, k\right)=F(h \pm a e, k)=F\left(-1 \pm \sqrt{5}, 1\right)$

الخطوط التقاربية هي

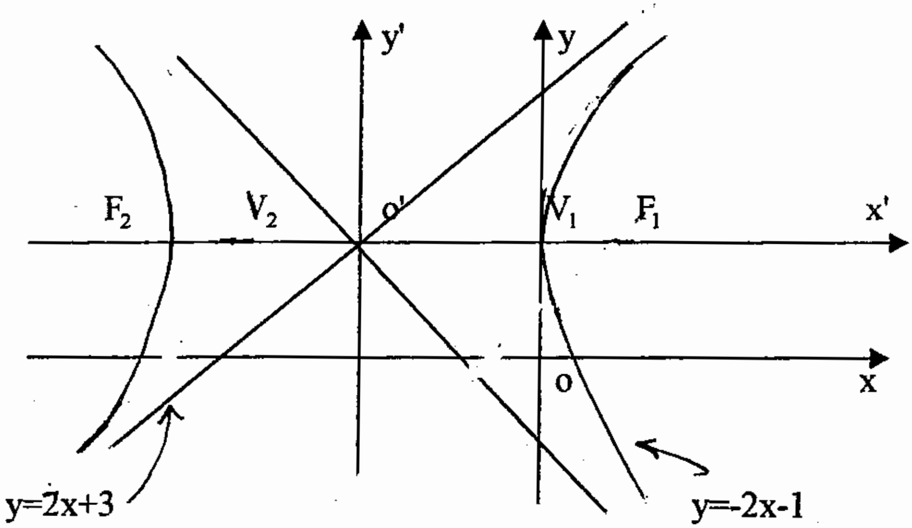
$$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$$

أو

$$y-1=\pm 2(x+1)$$

أو

$$y=2x+3, \quad y=-2x-1$$



مثال (٢): أرسم القطع الزائد

$$x^2 - y^2 - 4x + 2y + 11 = 0$$

الحل: بإكمال المربع (نقل المحاور) نحصل على

$$\frac{(y-1)}{8} - \frac{(x-2)}{8} = 1$$

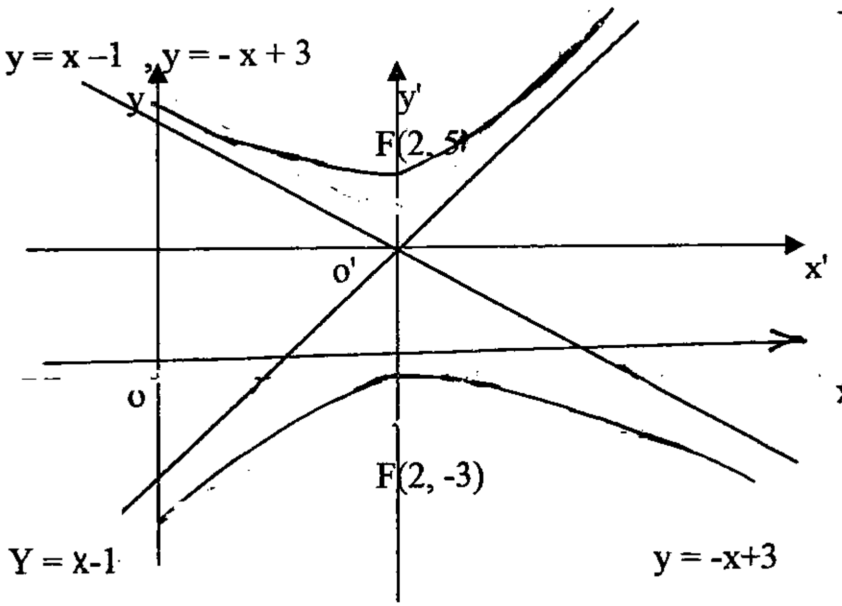
وهي معادلة قطع زائد له $a = b = 2\sqrt{2}$. ومركـــزه $o'(2,1)$ ورؤوســـه $V(h, k \pm a)$ أو $V(2, 1 \pm 2\sqrt{2})$.

والبؤر $F(h, k \pm a\,e) = (2, 1 \pm 4)$.

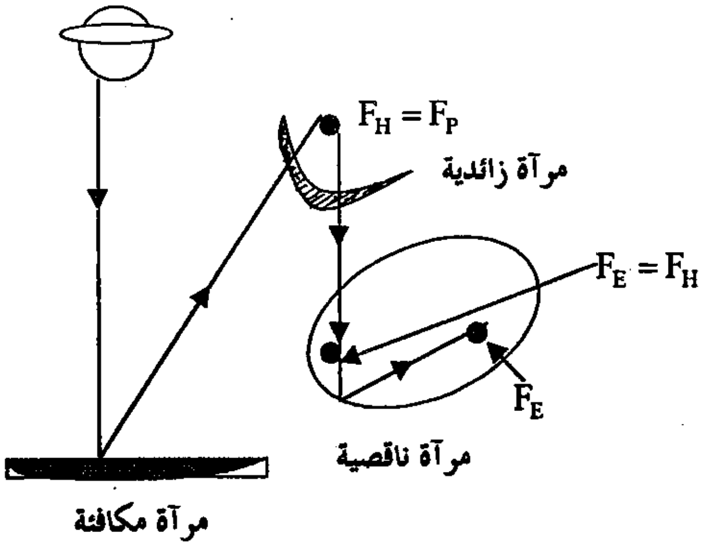
الخطوط التقاربية هي

$$y - 1 = \pm(x - 2)$$

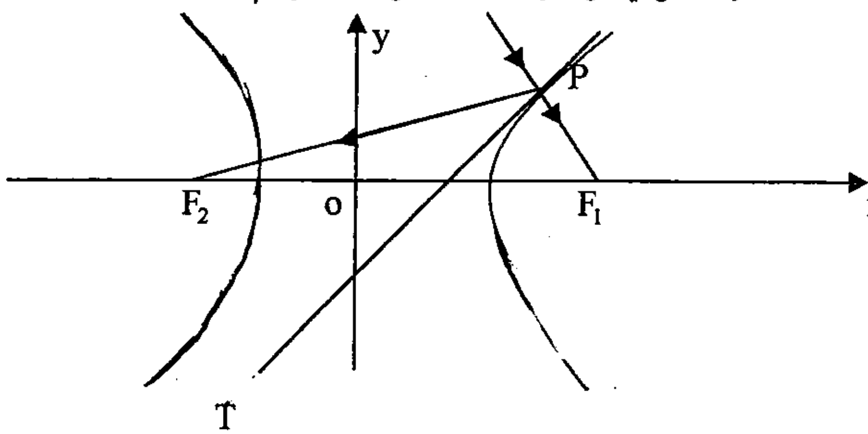
أو



تطبيق : المسارات الزائدية تظهر في نظرية النسبية لأينشتين ونوضح ذلك من خـــلال رسم توضيحي:



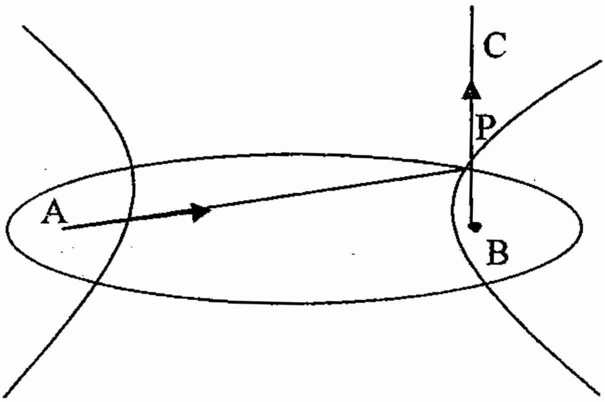
الضوء الساقط من نجم ينعكس على مرآة مكافئة إلى البؤرة F_P ثم ينعكس بمرآة زائدية بؤرتها F_H منطبقة على F_P $(F_H = F_P)$ في اتجاه البؤرة الثانية للمرآة الزائدية $F_E = F_H$ الموجودة في أحد بؤرتي مرآة ناقصية. إذن الضوء ينعكس بالمرآة الناقصية إلى البؤرة الثانية للمرآة الناقصية (عمل جهاز التلسكوب العاكس) وهذا يتضح من الخاصية الهندسية للإنعكاس في مرآة زائدية كما هو مبين بالرسم



١ـــ شعاع الضوء الساقط ناحية أحد بؤرتي المرآة الزائدية ينعكس في إتجاه البؤرة الأخرى.

ويمكن إثبات ذلك بإثبات أن المماس T عند النقطة P على القطع الزائد بنصف الزاوية $F_2 P F_1$ (الزاوية التي يصنعها الشعاع الساقط والشعاع المنعكس) كما في حالة القطع المكافئ.

٢ـــ القطع الزائد والناقص اللذان لهما نفس البؤر A, B يتقاطعان على التعامد ولتوضيح ذلك نستخدم الخاصية (1) بمعنى أن شعاع الضوء الذي بدايته البؤرة A يقابل القطع الزائد عند P ينعكس من القطع الزائد كما لو كان آتٍ من البؤرة B مباشرةً.



نفس الشعاع سوف ينعكس من القطع الناقص ليمر خلال النقطة P، إذن BPC هو خط مستقيم.

القطع الزائد القائم: **Equilateral hyperbola**

القطع الزائد الذي له أنصاف المحاور متساوية (a=b) يسمى قطع زائد قائم أو بمعنى أخر القطع الزائد الذي خطوطه التقاربية متعامدة ممثلاً القطع الزائد

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

يكون قطع زائد قائم إذا كان $y=\pm\frac{b}{a}x$ تتقاطع على التعامد في مركز القطع أي $a=b$ وبالتالي المعادلة $x^2-y^2=a^2$ أو ثابت $= x^2-y^2$ هي معادلة قطع زائد قائم خطوطه التقاربية $y=\pm x$.

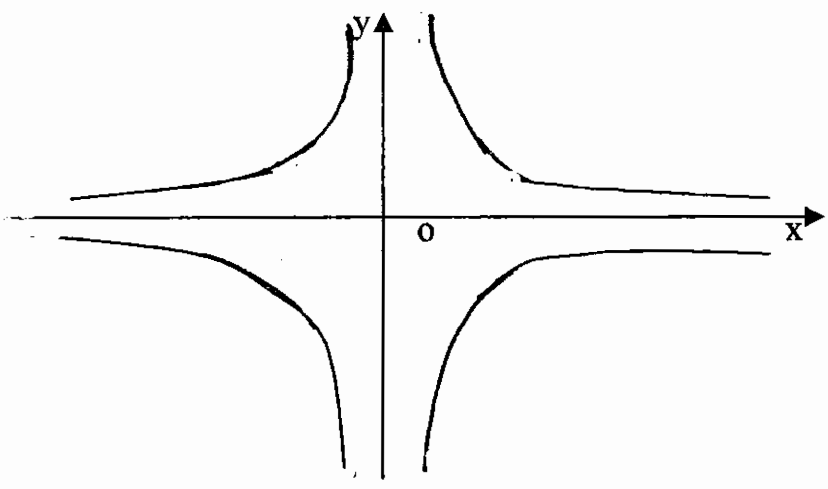
مثال (١): أثبت أن الإختلاف المركزي للقطع الزائد القائم يساوي $\sqrt{2}$.

الحل: من العلاقة $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}\ ,a=b$

نحصل على المطلوب.

مثال (٢): بين أن المعادلة $x\,y = \text{Const.}$ تصف قطع زائد قائم محاور الإحداثيات هي خطوطه التقاربية.

الحل: بدوران المحاور بزاوية $\frac{\pi}{4}$ نحصل على $x'^2 - y'^2 = \text{Const.}$ وهي معادلة قطــع زائد خطوطه التقاربية $y' = \pm x'$ أو $y=0, x=0$.



المعادلات البارامترية للقطع الزائد:.

المعادلة

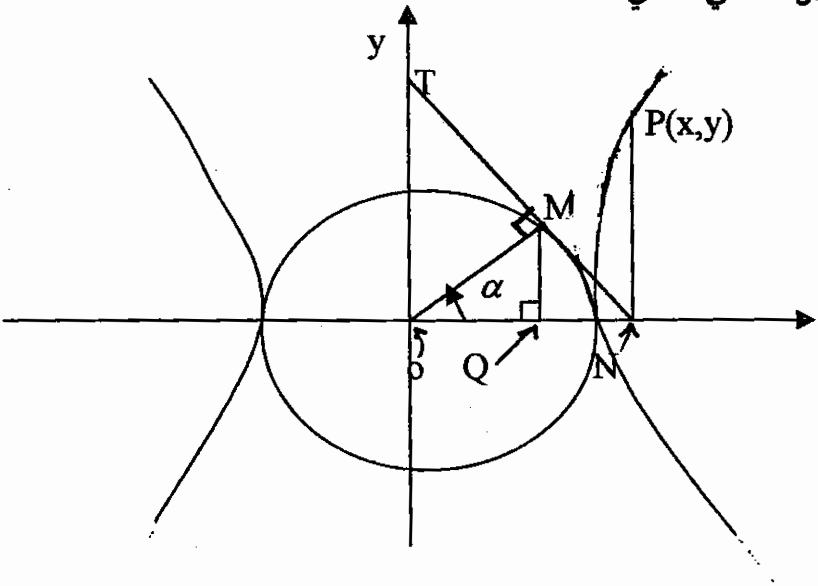
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

تتحقق بالمعادلات البارامترية

$$\left.\begin{array}{l} x = a\cosh\theta \\ y = b\sinh\theta \end{array}\right\} \qquad (2)$$

حيث θ عدد حقيقي.

المعادلات (2) تسمى المعادلات البارامترية للقطع الزائد والبارامتر θ يمكن اعطائه تأويل هندسي كالآتي:—



نفرض P نقطة على فرع القطع الزائد الموجود في الربع الأول ونرسم دائرة $x^2+y^2=a^2$ حيث

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

ونرسم المماس من مسقط P على المحور القاطع للدائرة عند M فيكون

$$x=a\sec\alpha \ =a\cosh\varphi$$

إذن

$$\phi=\cosh^{-1}(\sec\alpha) \qquad (*)$$

وبالتعويض في معادلة القطع نجد أن $y=b\tan\theta$ وبالتالي تكون المعادلات البارامترية للقطع الزائد هي

$$x=a\sec\alpha \, , y=b\ \tan\alpha$$

حيث α بارامتر له معنى هندسي .

العلاقة بين البارامتر الجبري θ والبارامتر α تعطى من (*).

المعادلات القطبية للقطع الزائد :.

كما في حالة القطع المكافئ والناقص يمكن استنتاج بسهولة معادلة القطع الزائد في الصيغة القطبية باعتبار أن أحد البؤر هي قطب الإحداثيات القطبية والخط القطبي منطبق على المحور القاطع إذا كان القطع محوره أفقي أو عمودي على المحور القاطع إذا كان رأسي وعليه فإن المعادلة

$$r = \frac{e k}{1 + e \cos(\theta - \alpha)}, e > 1$$

حيث k بعد البؤرة عن الدليل، α الزاوية التي يصنعها الخط الابتدائي مع المحور القاطع $\left(\alpha = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

تمارين

١ـ أوجد معادلة القطع الزائد الذي محوره القاطع هو محور ox في الحالات الآتية:ـ

(i) $a = 5, b = 4$

(ii) $C = 5, b = 4$

(iii) $C = 3, e = \frac{3}{2}$

(iv) $y = \pm \frac{4}{3} x$ الخطوط التقاربية , $C = 10$

(v) $22\frac{2}{3}$ المسافة بين الدليلين تساوي , $C = 13$

٢ـ أثبت أن حاصل ضرب بعدي أي نقطة على القطع الزائد

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

عن خطوطه التقاربية تساوي $\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$.

٣ـ أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤره تقع عند رؤوس القطع الناقص $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ ودليليه يمران ببؤر هذا القطع الناقص.

٤ـ أثبت أن المسافة من بؤرة القطع الزائد $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ إلى خطه التقاربي تساوي b.

٥ـ أوجد معادلة القطع الزائد الذي خطوطه التقاربية $y = \pm \frac{3}{3} x$ ودليله $x = \pm \frac{16}{5}$.

٦- بين أن $r=\dfrac{16}{3-5\cos\theta}$ تمثل الفرع الأيمن لقطع زائد وأوجد معادلة الأدلة والخطوط التقاربية له.

٧- على القطع الزائد $r=\dfrac{15}{3-4\cos\theta}$ أوجد النقاط التي لها $r=3$.

٨- أثبت أنه إذا كانت α هي إحدى الزوايا بين الخطوط التقاربية للقطع الزائد $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ فإن $\cos\alpha=\dfrac{2}{\varepsilon^2}-1$.

٩- ارسم القطع الزائد

$$-9x^2+16y^2-36x-32y-124=0$$

١٠- ارسم القطع الزائد

$$9x^2-16y^2-18x-64y-199=0$$

١١- أثبت أن المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث يكون حاصل ضرب بعديـن عـن المستقيمين $4x-3y+11=0,\ 4x+3y+5=0$ تساوي $\dfrac{144}{25}$ هو قطع زائد ومن ثم أرسمه.

١٢- أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وينطبق محوره على محاور الإحداثيات، $e=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ وطول وتره البؤري العمودي يساوي 6.

١٣- أثبت أن المستقيم $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ يمس القطع الزائد $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ لجميع قيم m.