الباب الثاني

التطور التاريخي لفروع الرياضيات المختلفة

أولاً: علم الحساب (نظرية الأعداد)

(١) تعريف علم الحساب:

يعرف علم الحساب بأنه علم العدد، يعالج في جانبه النظري الأرقام والأعداد، مراتبها والنسب التي بينها، وتكرارها على نسق معين.

ويتناول في جانبه العملي (التطبيقي) معرفة المطلوب بالعمليات الأربعة الأساسية (الجمع والطرح والضرب والقسمة)، وتطبيق ذلك على مسائل تمس حياة الإنسان في تعامله ومعاملاته اليومية.

(٢) تعريف العدد – الفرق بين الرقم والعدد:

كان أول ما استخدمه الإنسان في الرياضيات هو دراسة العدد الذي يعتبر اللبنة الأولى في بناء الرياضيات، ولم يظهر مفهوم العدد مرة واحدة ولكنه مر بمرحلة تطوريه كبيرة حتى نضج وأصبح بصورته الحالية.

وقد زاد استعمال الأعداد مع تطور حاجات الإنسان وظروفه الاجتماعية.

ويقصد بالعدد: الشيء الذي نجيب به عن السؤال: كم؟ مثل كم عدد الأيام في الأسبوع مثلاً، والشيء الذي نجيب به عن هذا السؤال هو العدد. وعلى وجه التحديد ما يعرف بالعدد الطبيعي الذي يدل على كم معين مثل 1،2 ، 3، ...

والعدد هو مفهوم مجرد، وأفضل وسيلة للتعبير عنه هي استعمال الرموز.

ونفرق هنا بين الرقم (أو الأرقام) والعدد (أو الأعداد)، فالأرقام هي أشكال تكتب بها رموز الأعداد، والأرقام محدودة وعددها عشرة هي (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)، ولكن الإعداد غير محدودة العدد، فرمز العدد 27 مثلا يتكون من رقمين هما الرقم 7 والرقم 2 ، وفي العمليات الحسابية لا نقول الرقم 27 ولكن نقول العدد 27 أي العدد الذي رمزه 27، والخلاصة أن الرقم يشير إلى عدد من الأعداد، ويلاحظ أن الصفر هو من الأرقام.

(٣) أهمية علم الحساب:

والحساب أو ما يمكن أن نطلق عليه اليوم نظرية الأعداد هو علم قديم، أو هو أول فروع الرياضيات ظهوراً، وله في حياتنا العملية فوائد جمة نذكر منها: معرفة الأوقات من أيام وشهور وأعوام، وحساب الساعات، ومعرفة مواقيت الصلاة، وحساب الشمس في البروج والكواكب، وحلول القمر في المنازل المقدرة له، ومنها في علوم الفقه حساب الزكاة وقسمة التركات والمواريث وهو ما يعرف بعلم الفرائض، وغيرها.

(٤) النظام العددي أو نظام العد:

يعرف نظام العد أو النظام العددي بأنه مجموعة من الرموز تتجمع بشكل معين وتستعمل وفق قواعد محددة لتمثيل مجموعة من الأعداد.

وكل إنسان يتعامل يومياً مع مجموعة الأعداد الطبيعية والتي يرمز لها بالرمز $N=\{1,2,3,\ldots\}$ وهي تلك الأعداد التي يستعملها الإنسان في العد، والعد هو إحصاء الأشياء وقد قال تعالي في سورة مريم: "لقد أحصاهم وعدهم عداً" وفي سورة النحل: "وإن تعدوا نعمة الله لا تحصوها إن الله غفور رحيم".

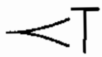
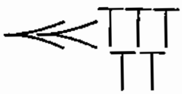
ومن أنظمة العد المعروفة: نظام العد الستيني ونظام العد العشري وغيرهما من الأنظمة العددية.

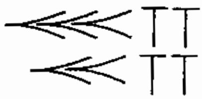
(٥) ظهور النظام الستيني للعد (نظام العد البابلي):

بدأت أنظمة العد في الظهور منذ أقدم العصور، وأول من كون نظاماً للعد هم البابليون في بلاد الرافدين (العراق القديم) وكان ذلك حوالي عام 2000 قبل الميلاد، وعرف هذا النظام بالنظام الستيني للعد ويبني هذا النظام على أساس العدد 60 وكان يتكون من 60 رمزا للدلالة على الأعداد من 1إلى 60، وكانت الأعداد الأقل من 60 تمثل باستخدام نظام تجميعي عشري (أي لكل عشرة أعداد) بسيط، والأعداد الأكبر من 60 كان يعبر عنها بالأساس الستيني. وكان لهذا النظام استخدامات هامة في الفلك وفي بعض وحدات القياس وفي معرفة الوقت بالساعات والدقائق والثواني. ومن ذلك مثلاً:

اعتبار الساعة = 60 دقيقة والدقيقة = 60 ثانية، واعتبار عدد أيام السنة القمرية 360 يومًا (60 × 60 = 360)، وتقسيم محيط الدائرة إلى 360 جزءاً كل جزء منها يسمى درجة.

وكانت الأرقام والأعداد عند البابليين تتم بما يعرف بالكتابة المسمارية التي تعتمد على رمز يشبه المسمار وكان هذا الرمز يدل على الرقم 1، كما استخدموا الرمز للدلالة على العدد 10 والرمز للدلالة على العدد 100، وكانت الأعداد تكتب من 1 إلى 59 بتكرار الرمزين و بينما العدد 60 يشار إليه برمز الواحد ، وكمثال لكتابة الأعداد عند البابليين نذكر:

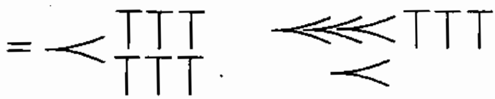
العدد 11 =  ، العدد 25= 

العدد 30 =  ، العدد 54 = 

أما الأعداد الكبيرة فيستخدم فيها النظام الستيني كالآتي:

<u>مثال(١):</u> العدد 1003:

$$1003 = 960 + 43 = 16 \times (60) + 43 = 16 \quad 43$$

= 

<u>مثال(٢):</u> العدد 90270:

$$90270 = 90000 + 240 + 30$$

$$= 25 \times (60)^2 + 4 \times (60) + 30$$

$$= 25 \quad 4 \quad 30 =$$ 

(٦) تطور النظام الستيني للعدد وظهور النظام العشري (نظام العد المصري القديم):

بعد ظهور نظام العد الستيني وانتقاله إلى المصريين القدماء، قام هؤلاء المصريون بتطوير هذا النظام وذلك لكي يستخدموه في مسح الأراضي بعد كل فيضان لتقدير الضرائب المستحقة على الفلاحين.

وأخترع المصريون حوالي عام 1900 قبل الميلاد نظاماً عشرياً هو عبارة عن العد بالآحاد والعشرات والمئات، وكان هذا النظام العشري يتكون من تسعة أرقام هي 1،2،3،4،5،6،7،8،9 ولم يكونوا يعرفون الصفر، ولهذا كانوا يكتبون 600 مثلاً بوضع 6 رموز يعبر كل رمز منها على العدد 100 .

ويلاحظ أن النظام العشري هو النظام المستخدم حالياً في العد بعد إضافة الصفر إليه، ويتكون من مجموعة من الرموز هي الأعداد 0،1،2،3،4،5،6،7،8،9 تتجمع على أساس العشرة، وتكتب أو تسجل باستخدام فكرة القيمة المكانية أو الخانات فلدينا خانات للآحاد وللعشرات وللمئات والألوف وهكذا.

فالعدد 1986 مثلا يمكن تجميعه على الصورة.

$$1986 = 1(1000) + 9(100) + 8(10) + 6\,(1)$$

ويعرف النظام العشري أيضاً بالنظام العربي أو النظام الهندي على اعتبار أن أول كتاب ورد فيه ذكر هذا النظام كان من تأليف أحد الهنود ونقله العرب إلى بغداد في القرن الثامن الميلادي، وطوروا طريقة كتابته واستخدموا الصفر على نطاق واسع بعد أن كان استخدامه في تسجيل الأعداد غير شائع.

وكانت الأرقام والأعداد المصرية القديمة (أو الهيروغليفية) تكتب بالصورة الآتية:

 (خط رأس) يدل على الرقم 1

 (عظمة كعب) تدل على العدد 10

 (حلزون) يدل على العدد 100

 (زهرة لوتس) يدل على 1000، وهكذا

وكان المصريون يكتبون الأعداد من اليمين إلى اليسار حسب التسلسل من الصغير إلى الكبير، فمثلاً:

الرقم 4 كانً يكتب ، العدد 23 كان يكتب ،

العدد 312 كان يكتب ، العدد 521 كان يكتب

، العدد 3426 كان يكتب:

أما الأعداد الكسرية: فقد كان الرمز يدل على $\frac{1}{2}$ والرمز يدل على $\frac{1}{3}$

والرمز يدل على $\frac{1}{4}$ ، وهكذا.

<u>مثال</u>: أكتب الكسرين $\frac{2}{3}$، $\frac{1}{30}$ كما كان يكتبه قدماء المصريين.

<u>الحل</u>: الكسر $\frac{2}{3}=$ ، الكسر $\frac{1}{30}=$

بمعنى أن الرمز فوق العدد يدل على (1) في بسط الكسر.

وقد تطورت الأعداد بعد ذلك بتطور اللغة الهيروغليفية إلى اللغة الهيراطيقية (الهيروغليفية المخففة)، فكانت رموز الأعداد تكتب كالتالي:

(1)، (2)، (3)، (4)، (5)، (6)، (7)، (8)، (9)

(10)

(٧) <u>ظهور النظامين اليوناني والروماني للعد:</u>

استخدم اليونانيون القدامى (الإغريق) بدءاً من القرن السادس قبل الميلاد وتلاهم الرومانيون في القرن الأول الميلادي، نظاماً للعد كان أساسه التجميعي هو العشرة، وكان يعتمد على التكرار، وكانت رموزه الأساسية هي:

(أ) في نظام العد اليونـــاني: I (للواحد)، Δ (للعشرة)، H (للمائة) ، X (للألـــف) ثــم أضيف إليها: Γ (للخمسة)، M (للعشرة آلاف).

فمثلاً: العدد 1117 كان يكتب بالصورة:

$$1117 = 1000 + 100 + 10 + 5 + 2 = \mathrm{XH\Delta\Gamma I\,I}$$

والعدد 12305 كان يكتب بالصورة:

$12305 = 10000 + 2000 + 300 + 5 = \mathrm{MXXHHH\Gamma}$، وهكذا ...

وقد تم بعد ذلك إضافة الرمز 𐅄 للعدد50، والرمز 𐅅 للعدد 500، والرمز 𐅆 للعدد 5000

فمثلاً العدد 8550 كان يكتب بالصورة:

$8550 = 5000 + 3000 + 500 + 50 =$ 𐅆XXX𐅅𐅄، وهكذا ...

(ب) في نظام العد الروماني: I (للواحد)، X (للعشرة)، C (للمائـــة)، M (للألـــف) ثــم أضيف إليها: V (للخمسة)، L (للخمسين)، D (للخمسمائة) وتكرار العدد يعني تكرار قيمته. فمثلاً $XX = 10 + 10 = 20$ ، $CC = 100 + 100 = 200$ وهكذا.

ولكي يتجنبوا التكرار وضعوا القاعدة الآتية:

العدد الأصغر يجمع إلى العدد الأكبر إذا كتب عن يمينه ويطرح منه إذا كان عن يساره.

فمثلاً:

العدد	الرمز	
6	VI	حيث: $6 = 5 + 1 = VI$
4	IV	حيث: $4 = 5 - 1 = IV$
60	LX	حيث: $60 = 50 + 10 = LX$
40	XL	حيث: $40 = 50 - 10 = XL$
600	DC	حيث: $60 = 500 + 100 = DC$
400	CD	حيث: $400 = 500 - 100 = CD$

وكمثال لكتابة الأعداد الكبيرة:

(أ) العدد 223 يكتب:

$$223 = 100 + 100 + 10 + 10 + 3 = \text{CCXXIII}$$

(ب) العدد 1117 يكتب:

$$1117 = 1000 + 100 + 10 + 5 + 2 = \text{MCXVII}$$

(ج) العدد 4444 يكتب:

$$4444 = 1000 + 1000 + 1000 + 1000 + 400 + 40 + 4 = \text{MMMMCDXLIV}$$

وتشير الشرطة (dash) على العدد مضاعفة قيمته بضربه في ألف، فمثلاً:

$$\overline{\text{X}} = 10 \times 1000 = 10000\ ,\ \overline{\text{V}} = 5 \times 1000 = 5000\ ,\ \overline{\text{L}} = 50 \times 1000 = 50000$$

$$\overline{\text{C}} = 100000\ ,\ \overline{\text{D}} = 500000\ ,\ \overline{\text{M}} = 1000000$$

وكانت $\overline{\text{M}}$ تقرأ ألف ألف حيث لم تكن كلمة مليون قد ظهرت بعد.

ملحوظة حول الأعداد الكبيرة:

طبقاً للنظام المتبع في فرنسا والولايات المتحدة الأمريكية حالياً فقد تم وضع أسماء للأعداد الكبيرة نوردها هنا للعلم والمعرفة:

العدد	الأسم		
ألف	Thousand	$1000 = 10^3$	(ثلاثة أصفار)
مليون	Million	$1000000 = 10^6$	(ستة أصفار)
بليون	Billion	10^9	(تسعة أصفار)
تريليون	Trillion	10^{12}	(إثنا عشر صفراً)
كوادرليون	Quadrillion	10^{15}	(خمسة عشر صفراً)
كوينتليون	Quintillion	10^{18}	(ثمانية عشر صفراً)
سكستيليون	Sextillion	10^{21}	(إحدى وعشرون صفراً)

سبتليون	Septillion	10^{24}	(أربع وعشرون صفراً)
أكتيليون	Octillion	10^{27}	(سبع وعشرون صفراً)
نونيليون	Nonillion	10^{30}	(ثلاثون صفراً)
ديسليون(ديشليون)	Dicillion	10^{33}	(ثلاثة وثلاثون صفراً)

مع ملاحظة أنه في المملكة المتحدة (بريطانيا) وبعض الدول الأوربية يتبعون نظاماً آخر بدءاً من البليون وهو:

مليار (ألف مليون)	10^{9}
بليون(ألف مليار)	10^{12}
ألف بليون	10^{15}
تريليون	10^{18}
ألف تريليون	10^{21}
كوادرليون	10^{24} وهكذا.

(٨) <u>ظهور نظام العد العربي القديم:</u>

استخدم العرب قديماً نظاماً عددياً مرتبطاً بالحروف الأبجدية العربية، كان يسمى (نظام الترقيم على حساب الجمل)، فكان يضع لكل حرف أبجدي عدد يدل عليه بدءاً من الواحد وحتى الألف كما يلي:

أ	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط	ي	ك	ل	م	ن	س
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50	60

ع	ف	ص	ق	ر	ش	ت	ث	خ	ز	ض	ظ	غ
70	80	90	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000

فمثلاً: العدد ٣٧٢ كان يعبر عنه بالرمز كالتالي:

٣٧٢ = ٣٠٠ + ٧٠ + ٢ = ش ع ب = شعب

وكلمة تاريخ كان يعبر عنها بالأعداد كالتالي:

تاريخ = ت أ ر ي خ = ٤٠٠ + ١ + ٢٠٠ + ١٠ + ٦٠٠ = ١٢١١

وأستخدم هذا النظام لفترة طويلة، وكان بعض الشعراء يصيغون أبياتا من الشعر يعبر عن تاريخ حدث معين، فعلى سبيل المثال:

كان هناك شاعر يرثي صديق له بقصيدة يؤرخ فيها للعام الذي توفي فيه فقال في أحد أبياته: ***فقلت لمن أراد الشعر أقصر*** ***فقد أرخت مات الشعر بعده***

وإذا ما حسبنا العدد المقابل للجملة (مات الشعر بعده) بحساب الجمل نجده العدد 1123 حيث:

م	أ	ت	أ	ل	ش	ع	ر	ب	ع	د	هـ	=
٤٠ +	١ +	٤٠٠ +	١ +	٣٠ +	٣٠٠ +	٧٠ +	٢٠٠ +	٢ +	٧٠ +	٤ +	٥	= ١١٢٣

وهو العام الهجري الذي رحل فيه صديق الشاعر.

(٩) <u>ظهور الأرقام الهندية:</u>

كان محمد بن موسي الخوارزمي (٧٨٠-٨٥٣م) هو أول من ضمن مؤلفاته ما كان يعرف بالأرقام الهندية المأخوذة عن كتاب (السند هند) أو (سند هانتا) للفلكي الهندي براهما جوبتا (المتوفي عام ٦٦٥م) والذي ترجمه محمد بن إبراهيم الغزاري (المتوفي عام ٨٠٥م) في عهد الخليفة أبو جعفر المنصور حوالي عام ٧٧٥م، وكانت صورة الأرقام الهندية هي:

١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩ وهي الأرقام المستخدمة حالياً في المشرق العربي ويطلق عليها خطأ الأرقام العربية.

وقد قام الخوارزمي بتركيب تلك الأعداد عل أساس النظام العشري، وأعطى فكرة المنازل (أحاد، عشرات، مئات،...)، كما أعطى قيماً للأرقام حسب موضعها في هذه المنازل، كما استخدم الخوارزمي الصفر أيضاً نقلاً عن الهنود، مما سهل العمليات الحسابية إلى حد كبير.

(١٠) **ظهور الأرقام العربية (أو الغبارية):**

ظهرت تلك الأرقام أيضاً في كتاب الخوارزمي الذي ترجمه أديلارد أوف باث إلى اللاتينية عام ١١٢٠م، وهذه الأرقام هي (في صورتها المعدلة):
1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، وكانت تسمي بالرموز الغبارية نظراً لأنها كانت تكتب على سطح من الغبار أو الرمال، وتستخدم هذه الرموز حالياً في المغرب العربي.

وقد وصلت تلك الرموز إلى أوربا قبل أن يترجم كتاب الخوارزمي وذلك بواسطة العرب الذين وصلوا إلى الأندلس بعد فتحها عام ٧١١م، وقد وجدت وثائق في أسبانيا تعود إلى القرن العاشر الميلادي تتضمن رموز هذه الأرقام ولكنها انتشرت بدرجة كبيرة بعد ترجمتها إلى اللاتينية.

وكان أبو الحسن على القلصادى (١٤١٢-١٤٨٦م) العالم الرياضي الأندلسي، والذي كان أول من أستعمل الرموز في علم الجبر، هو الذي أطلق على هذه الأرقام العربية إسم الأرقام الغبارية وذلك في كتابه (رفع الستار عن علم الغبار) الذي ألفه حوالي عام ١٤٥٠م.

ويطلق الناس في الغرب الآن على تلك الأرقام اسم الأرقام العربية ويطلقون على نظام العد بها (نظام العد العربي).

انتقال نظام العد العربي إلى أوربا:

ظل نظام العد الروماني سائدا في أوربا لمدة عشرة قرون حتى دخول النظام العربي للعد الذي ظهر في كتاب الخوارزمي (الجبروالمقابلة) والذي ألفه حوالي عام ٨٣٠، وقد قام أديلارد أوف باث (١٠٩٠-١١٥٠م) عام ١١٢٠م بترجمة هذا الكتاب إلى اللغة اللاتينية، وظل النظامان الروماني والعربي يتنافسان في اوربا حتى جاء الايطالي ليونارد فيبوناتسي (١١٧٠-١٢٤٠م) فأقر في مؤلف له ظهر عام ١٢٠٢م النظام العربي للعد وذلك لسهولته في تسجيل الأعداد وفي إجراء العمليات الحسابية، وبذلك انتقلت الأرقام العربية إلى أوربا وأنتشر استعمالها في المؤلفات

الرياضية آنذاك، وانتهى النظام الروماني السابق والذي كان يحتاج إلى مهارة كبيرة في كتابته واستخدامه في العمليات الحسابية.

(١١) ظهور الصفر:

وبالنسبة للصفر الذي يعبر عن خلو المرتبة من العدد، فقد كان معروفا لدي البابليين، ثم عرفه العرب واستخدموه في لغتهم للدلالة على كلمة (خلا) وقد ورد في الحديث الشريف قول رسول الله ﷺ: " إن ربكم حي كريم ، يستحي من عبده إذا رفع يديه إلى السماء أن يردهما صفراً ". ويقال أن الصفر ظهر في كتابات بعض علماء الرياضيات الهنود مثل براهما جوبتا (٥٩٨-٦٦٠م) في القرن السابع الميلادي، كما ظهر الصفر في كتابات علماء الرياضيات العرب الأوائل حيث كانوا يعبرون عنه بدائرة مركزها نقطة أي ⊙ ثم اختار علماء المشرق العربي النقطة لتعبر عن الصفر فأصبحت أرقامهم (٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩) واختار علماء المغرب العربي في الأندلس (ومنها انتقلت الأرقام إلى أوربا) الدائرة للدلالة على الصفر فأصبحت أرقامهم (0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9).

وحوالي عام ١٤٨٠ ميلادية أخذ العالم الايطالي ليوناردو دافنشي (١٤٥٢-١٥١٩) وهو فنان شهير، الصفر من العرب وأضافه على أرقامهم حيث قال في أحد مؤلفاته:
" نستطيع بواسطة الأرقام العربية التسعة وتلك العلامة (0) المسماة بالصفر أن تكتب أي عدد مهما كان"

وقد أخذت كلمة صفر في اللغات الأجنبية (Zifer , Zero , ...) من كلمة صفر العربية.

(١٢) خصائص الأعداد وتصنيفها:

أ- بدأ البحث عن خواص العدد – نظرية فيثاغورث للعدد:

كانت الأعداد الطبيعية 1، 2، 3، 4، 5، ... محل تفكير واهتمام كثير من العلماء والفلاسفة والرياضيين على مر العصور، وكان أولهم: العالم اليوناني القديم فيثاغورث (٥٧٢-٤٩٧ق.م) الذي أسس مدرسة في مدينة كريتون الواقعة في جنوب إيطاليا حوالي عام ٥٣٠ ق.م، وكانت هذه المدرسة مختصة بتدريس الهندسة والحساب

والموسيقي والفلك، وقد كان العنصر الأساسي في هذه الدراسات هو العدد الذي اعتبره الفيثاغوريون لنه أصل كل الأشياء ومفتاح فهم الكون، حيث افترضوا أن عناصر العدد هي عناصر كل الأشياء وأن الحياة ما هي إلا عدد ونغم، وأن السماء ليست إلا سلما موسيقيا.

وقد ربط الفيثاغوريون الأعداد بالهندسة: فالنقطة عندهم كيان، والخط المستقيم يتحدد بنقطتين، كما يتحدد المستوى بثلاث نقاط، والفراغ بأربع نقاط، ومن هنا اتجه فيثاغورث إلى اعتبار الكون كامنا في هذه الإعداد الأربعة، وكانت نظرته في ذلك نظرة فلسفيه بحته، فقد كان يعتقد مثلا أن الأعداد هي أخلاق، ومن الأعداد البهي، الكريم، الكئيب، القبيح، فالأعداد البهية والكريمة هي نوع خاص من الأعداد نادرة الوجود أطلق عليها أسم الأعداد التامة (وسنعود إلى تعريفها فيما بعد)، أما الأعداد الرديئة فكثيرة جداً، كما كان الفيثاغوريون يعتقدون في صفات الأعداد فمن صفات العدد ستة مثلا البرودة ومن صفات العدد سبعة مثلاً الصحة ومن صفات العدد ثمانية الحب وهكذا، واتخذوا العدد واحد مصدرا لكل الأعداد لذا اتخذوه رمزا للتعقل، والعدد أثنين رمزاً للرأي والعدد أربعة رمزاً للعدل والعدد خمسة رمزاً للزواج (لأنه يتكون من أول عدد مؤنث (2) وأول عدد ذكر (3) حيث كانوا يطلقون على الأعداد الفردية (ماعدا الواحد الذي هو مصدر كل الأعداد) أعداداً منكرة والأعداد الزوجية أعداداً مؤنثة، وهكذا. كما أعتبروا أن العدد (10) هو عدد مقدس لأنه يساوي مجموع الأعداد الأربعة الأولى التي ترمز إلى العناصر الأربعة الأساسية المكونة لمادة الكون، وهي الهواء (ويمثله الرقم 1) والماء (ويمثله الرقم 2) والنار (يمثله الرقم 3) والتراب (ويمثله الرقم 4).

ب- <u>تصنيفات الأعداد:</u>

كان اليونانيون القدامى (الأغريق) يفرقون بين مدرستين لدراسة الأعداد هما:

١- <u>المدرسة التجريدية:</u> وتعني بالدراسة المجردة للأعداد وتهتم بخواص الأعداد والعلاقات بينها، وأطلقوا على تلك الدراسة اسم الأريثماطيقا – Arithmatic، وهو أقرب ما يعرف حالياً بنظرية الأعداد.

٢- <u>المدرسة العملية:</u> وتتعلق بالاستخدام العملي للأعداد، وأطلقوا عليه اسم الحساب اللوجستي (Logistic) أو السوقي، ويهتم أساسا بالعلميات الحسابية الأساسية (الجمع والطرح والضرب والقسمة) واستخدامها في حل المسائل الحياتية في الأسواق والمعاملات اليومية.

وتقسم الأعداد أيضاً إلى النوعين الآتيين:

١- <u>**الأعداد الأساسية**</u> أو الكاردينالية (Cardinal Numbers): وتستخدم للعد وهي عبارة عن مجموع الإعداد الطبيعية (1، 2، 3،...) مضافاً إليها الصفر.

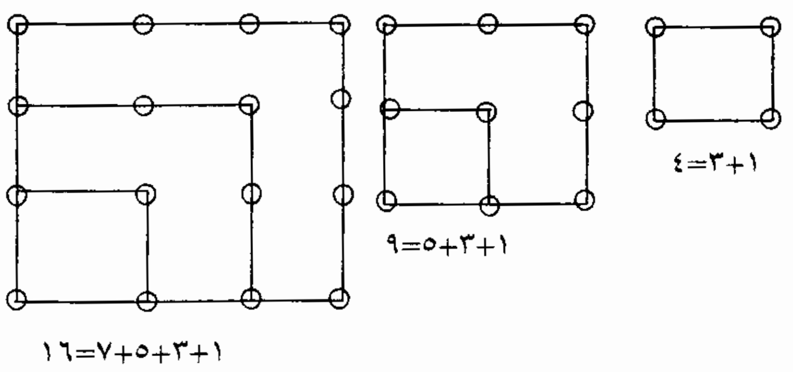
٢- <u>**الأعداد الترتيبية**</u> (Ordinal Numbers): وهي الصفات المستخدمة في الترتيب: الأول، الثاني، الثالث،... وهكذا. وتدل هذه الأعداد على العدد من حيث ترتيبه أو موقعه بالنسبة للأعداد الأخرى.

وقد أهتم العلماء العرب اهتماما كبيرا بتصنيف الأعداد فقسموها إلى أعداد فردية وأعداد زوجية وأعداد مثلثه وأعداد مربعه وإلى أعداد أولية وغير أولية وإلى أعداد ناقصة وأعداد زائدة وإلى أعداد أولية وأعداد متحابة وأعداد تامة،... إلخ.

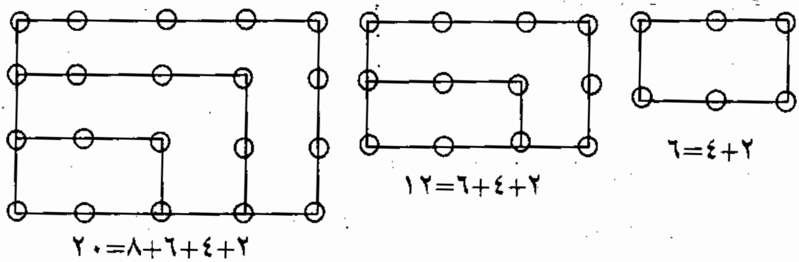
وفي العجالة الآتية سوف نعطي نبذه عن كل من هذه التصنيفات للأعداد:

١- <u>**الأعداد الفردية والأعداد الزوجية:**</u>

أ- <u>الأعداد الفردية</u>: تعرف بأنها الأعداد التي تعطي مربعات عند جمعها بالتتابع مثل 1، 3، 5، 7 فمثلاً:

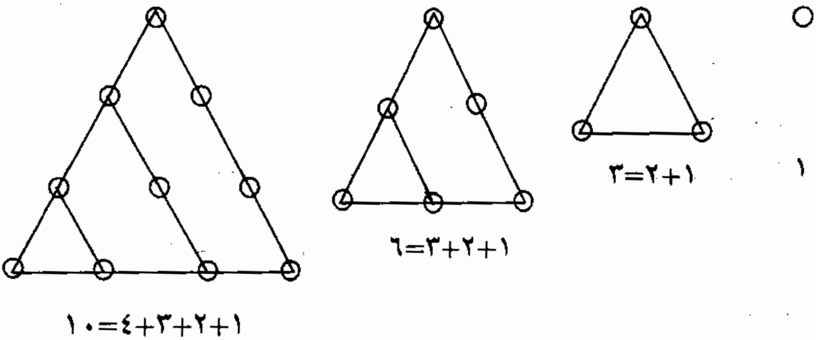


ب- الأعداد الزوجية: تعرف بأنها الأعداد التي تعطي مستطيلات عند جمعها بالتتابع (وتقبل القسمة على 2) مثل 2، 4، 6، 8 فمثلاً:



٢- **الأعداد المثلثة:**

وهى تلك الأعداد التي يمكن تمثيلها هندسياً بمثلثات متساوية الأضلاع، مثل 1، 3، 6، 10، 15



ويلاحظ أن تلك الأعداد تكون متوالية عددية كالتالي:

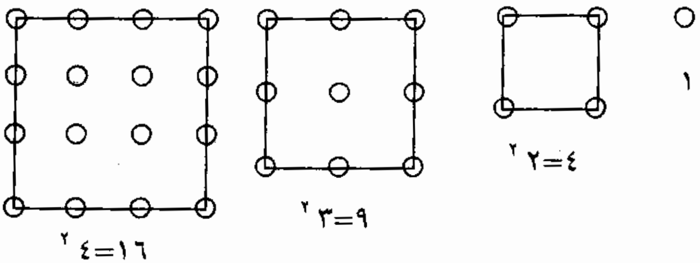
1، 2+1 ، 3+2+1 ، 4+3+2+1،...

٣- **الأعداد المربعة:**

وهى تلك الأعداد التي يمكن تمثيلها بمربعات مثل 1، 4، 9، 16، 25 وتنتج من مجموعة متتابعة من الأعداد الفردية بدءاً من العدد1 فمثلا:

١=١ ، ١+٣=٤=$٢^{٢}$ ، ١+٣+٥=٩=$٣^{٢}$

١+٣+٥+٧=١٦=$٤^{٢}$ ، ١+٣+٥+٧+٩=٢٥=$٥^{٢}$



ويلاحظ أن: أي عدد مربع= مجموع عددين مثلثين متتابعين فمثلا:

٤=١+٣ ، ٩=٣+٦ ، ١٦=٦+١٠ وهكذا

٤- **الأعداد الأولية:**

يعرف العدد الأولي بأنه عدد صحيح أكبر من الواحد ولا يقبل القسمة إلا على نفسه وعلى الواحد الصحيح فمثلاً:

العدد 2 عدد أولي لأنه يقبل القسمة على 2 وعلى 1
العدد 3 عدد أولي لأنه يقبل القسمة على 3 وعلى 1
العدد 5 عدد أولي لأنه يقبل القسمة على 5 وعلى 1
العدد 7 عدد أولي لأنه يقبل القسمة على 7 وعلى 1
العدد 11 عدد أولي لأنه يقبل القسمة على 11 وعلى 1

وهكذا.

والعدد يكون غير أولي إذا أمكن تحليله إلى عاملين غير الواحد الصحيح والعدد نفسه فمثلا:

العدد 4 غير أولي لأنه يمكن تحليله إلى العاملين 2 ، 2
العدد 6 غير أولي لأنه يمكن تحليله إلى العاملين 2 ، 3
العدد 9 غير أولي لأنه يمكن تحليله إلى العاملين 3 ، 3
العدد 10 غير أولي لأنه يمكن تحليله إلى العاملين 5 ، 2

وهكذا.

وقد أثبت إقليدس أن عدد الأعداد الأولية لا نهائي وذلك بأن افترض أن آخر عدد أولي هو n ثم أثبت أنه يوجد عدد أولى أكبر من n

النظرية الأساسية في الحساب:

تنص هذه النظرية على أن:

" كل عدد طبيعي يمكن التعبير عنه كحاصل ضرب عدد منتهى من الأعداد الأولية "

وقد حاول إثبات تلك النظرية العالم العربي كمال الدين الفارسي (المتوفي عام ١٣٢٠م) في كتابه (تذكرة الأحباب في بيان التحاب) ، ولكن الإثبات التام لها تم على يدي العالم الألماني كارل جاوس عام ١٨٣٠م.

(٥) **الأعداد التامة:**

يعرف قاسم العدد بأنه عامل من عوامله بشرط ألا يكون العامل هو العدد نفسه فمثلا: قواسم العد 8 هي 1، 2، 4 ، قواسم العدد 12 هي 1، 2، 3، 4، 6

ويعرف العدد التام بأنه العدد الذي يقبل القسمة على أعداد صحيحة يكون مجموعها يساوي العدد التام أو هو العدد الذي يساوى مجموع قواسمه.

فمثلا: العدد 6 عدد تام لأن قواسمه هي 1، 2، 3 ، ومجموعها يساوى $1+2+3=6$ العدد نفسه، والعدد 8 هو عدد غير تام لأن قواسمه هي 1، 2، 4، ومجموعها يساوى $1+2+4=7$ وهى لا تساوى العدد 8 ، والعدد 12 هو عدد غير تام لان قواسمه هي 1، 2، 3، 4، 6 ، ومجموعها يساوى $1+2+3+4+6=16$ وهي لا تساوي العدد 12، والعدد 28 هو عدد تام لأن قواسمه هي 1، 2، 4، 7، 14 ومجموعها يساوي $1+2+4+7+14=28$ وهو العدد نفسه.

ويلاحظ أن عدد الأعداد التامة محدود جداً، وقد توصل العلماء حتى الآن إلى (27) عدد تام فقط.

العدد التام الأول:	هو 6
العدد التام الثاني:	هو 28
العدد التام الثالث:	هو 496
العدد التام الرابع:	هو 8128
العدد التام الخامس:	هو 33550336

وقد توصل العلماء عام 1961 إلى العدد التام رقم 20 وكان مكوناً من 2663 رقمـاً، وفي عام 1980 تم التوصل إلى العدد التام رقم 23 وكان مكوناً من 7651 رقماً.

(٦) <u>الأعداد الناقصة والأعداد الزائدة:</u>

أ- يعرف العدد الناقص بأنه العدد الذي يكون مجموع قواسمه أقل منـــه، فالأعـــداد 8، 9، 27 أعداد ناقصة لأن

$$1+2+4<8 \quad , \quad 1+3<9 \quad , \quad 1+3+9<27$$

ب- ويعرف العدد الزائد بأنه العدد الذي يكون مجموع قواسمه أكبر منه، فالأعداد 12، 18، 24، هي أعداد زائدة لأن:

$$1+2+3+4+6>12 \ , \ 1+2+3+6+9>18$$

$$1+2+3+4+6+8+12>24$$

(٧) <u>الأعداد المتعادلة:</u>

كان أول من عرف تلك الأعداد الرياضي العربي عبد القادر بن طاهر البغدادي (المتوفي عام ١٠٣٧م) في كتابه (التكملة في الحساب)، وقد عرفها كالآتي:

هي تلك الأعداد التي يتساوى مجموع قواسمها، كما في الأمثلة الآتية:

<u>مثال(١):</u> العددان 55,39 متعادلان لأن:

قواسم 39 هي: 1، 3، 13 ومجموعها $=1+3+13=17$

قواسم 55 هي: 1، 5،11 ومجموعها $=1+5+11=17$

<u>مثال(٢):</u> الأعداد 159، 559، 759 هي أعداد متعادلة لأن:

قواسم 159 هي: 1، 3، 53 ومجموعها $=1+3+53=57$

قواسم 559 هي: 1، 13، 43 ومجموعها $=1+13+43=57$

قواسم 759 هي: 1، 23، 33 ومجموعها $=1+23+33=57$

(٨) <u>الأعداد المتحابة:</u>

يقال عن عددين أنهما متحابان إذا كان مجموع القواسم لأي عدد منهمـــا يـــساوي العدد الأخر، وكأمثلة على ذلك:

مثال(١): العددان 220، 284 عددان متحابان لأن:

قواسم العدد220 هي:1،2، 4، 5، 10،11، 20، 22، 44، 55، 110

ومجموعها:

$$284 = 110 + 55 + 44 + 22 + 20 + 11 + 10 + 5 + 4 + 2 + 1$$

قواسم العدد 284 هي: 1، 2، 4، 71، 142

ومجموعها :

$$220 = 142 + 71 + 4 + 2 + 1$$

الزوج (220,284) هو زوج من الأعداد المتحابة.

ومن أزواج الأعداد المتحابة المعروفة نذكر:

$$(1184,1210)\ ,\ (2620,2924)\ ,\ (5020,5564)$$
$$(6232,6368)\ ,(10744,10856)\ ,\ (17296,18416)$$

وقد توصل أويلر عام 1747 إلى 60 زوجاً من الأعداد المتحابة، كما تم حتى الآن اكتشاف (386) زوجاً من الأعداد المتحابة.

قاعدة ثابت بن قرة لإيجاد الأعداد المتحابة:

ذكر العالم العربي ثابت بن قرة (٨٣٥-٩٠١م) في كتابه (المدخل إلى الأعداد) قاعدة لإيجاد الأعداد المتحابة ثم عاد وبرهنها في رسالته عن (الأعداد المتحابة)، وأفرد لها الحاسب أبو بكر الكرخي (٩٧١-١٠٢٩م) فصلاً في كتابه (البديع في الحساب) حيث قدم فيه برهاناً عاماً لتلك القاعدة، كما أعاد كمال الدين الفارسي (المتوفى عام ١٣٢٠م) برهان تلك القاعدة في كتابه (تذكرة الأحباب في بيان التحاب)، وتنص القاعدة على الأتي:

إذا كان a,b,c أعداد أولية وكان n عدد صحيح موجب بحيث أن

$$a = 3\times 2^{n} - 1\ ,\ b = 3\times 2^{n-1} - 1\ ,\ c = 9\times 2^{2n-1} - 1$$

فإن العددين x,y يكونان متحابان حيث:

$$x = 2^{n}(ab)\ ,\quad y = 2^{n}(c)$$

كما أن x يكون عدداً زائداً بينما y يكون عدداً ناقصاً.

مثال: بأخذ $n = 2$ ، فأن:

$$a = 3\times 2^2 - 1 = 12 - 1 = 11 \ , \ b = 3\times 2^1 - 1 = 6 - 1 = 5$$

$$c = 9\times 2^3 - 1 = 72 - 1 = 71$$

تكون أعداداً أولية

ويكون $x = 2^2 \times 11\times 5 = 220 \ , \ y = 2^2 \times 71 = 284$

وهما عددان متحابان.

مثال آخر: بوضع $n = 4$ فأن:

وهي تكون أعداد أولية $a = 47 \ , \ b = 23 \ , \ c = 1151$

ويكون:

$$x = 2^4\ (47)(23) = 17296$$

$$y = 2^4\ (1151) = 18416$$

وهما عددان متحابان.

مثال ثالث: بوضع $n = 7$ فإن:

$$a = 383 \ , b = 191 \ , \ c = 23727$$

تكون أعداد أولية، ويكون

$$x = 9437056 \ , \ y = 9363584$$

وهما عددان متحابان.

ج- دراسة الأعداد الطبيعية:

مهدت عملية العد إلى ظهور الأعداد الطبيعية التي نستخدمها في العد، وقد أفرد الخوارزمي مساحة في كتابه (الجبر والمقابلة) عن الأعداد الطبيعية فقام بحساب القاسم المشترك الأعظم لأي عددين طبيعيين بطريقة القسمة المتتالية، كما أوجد الحاسب أبو بكر الكرخي مجموع الأعداد الطبيعية ومربعاتها ومكعباتها ابتداء من العدد (1) حتى العدد (n)، وأوجد الحسن بن الهيثم (٩٦٥-١٠٣٩م) وغياث الدين الكاشي

(١٣٨٠-١٤٣٦م) مجموع الأعداد الطبيعية مرفوعة للقوة الرابعة بقانون رياضي واضح أما السموأل بن يحي المغربي (المتوفي عام ١١٧٤م) فقد أثبت إمكانية التعبير عن أي عدد طبيعي بصورة عشرية منتهية أو غير منتهية، فإذا كان r ينتمي إلى مجموعة الأعداد الطبيعية فإن يمكن كتابته بالصورة:

$$\boxed{r = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + \cdots}$$

طريقة ابن الهائم في تبسيط العمليات الحسابية للأعداد الطبيعية:

ذكر ابن الهائم المقدسي(١٣٥٢-١٤١٢م) في كتابه (اللمع في الحساب) طرقاً مختلفة لتبسيط العمليات الحسابية ومنها عملية، الضرب ومن تلك الطرق نذكر الطريقة المختصرة والسريعة الآتية:

كل عدد يضرب في 15 أو 150 أو 1500 يزاد عليه مثل نصفه ويضرب حاصل الجمع في الأول عشرات وفي الثاني مئات وفي الثالث ألوفاً.

فمثلا: إذا قيل أضرب 24 في 15 فزد على الأربعة والعشرين مثل نصفها واضرب حاصل الجمع وهو 36 في عشرة فالجواب 360 هكذا:

24×15= 24+12= 36×10 =360 (النتيجة)

إذا قيل أضرب 24 في 150 فيكون الحل كالأتي:

24×150 =24+12=36× 100 =3600 (النتيجة)

وهكذا.

د- دراسة الأعداد التامة والمتحابة:

درست الأعداد التامة والمتحابة من قبل العالم العربي أبو صقر القصبي (المتوفي عام١٠٢٥م) في كتابه (في جمع أنواع الأعداد) ذاكرا قاعدة تشكيل الأعداد التامة، والتي كان الرياضي اليوناني إقليدس أول من عرفها. وقد تابع دراسة الأعداد التامة أبومنصور بن طاهر البغدادي (المتوفي عام ١٠٣٧م) في كتابه (التكملة في الحساب).

أما الأعداد المتحابة والتي كان فيثاغورث أول من عرفها وقام ثابت بن قرة (٨٣٥-٩٠١م) بوضع براهين لقواعد إيجادها فقد درسها أبو بكر الكرخي (المتوفي عام ١٠٢٩م) في كتابه (البديع في الحساب) حيث افرد لها فصلا خاصا، كما أعاد كمال الدين الفارسي (المتوفي عام ١٣٢٠م) إثبات قواعد إبن قرة لحساب تلك الأعداد وذلك في كتابه (تذكرة الأحباب في تمام التحاب) وقام بحساب العديد من تلك الأعداد.

وقد توصل الرياضي السويسري ليونارد أويلر (١٧٠٧- ١٧٨٣) إلى حساب نحو ستين زوجاً من الأعداد المتحابة في كتاب له صدر عام ١٧٤٧م.

هـ- ظهور المفهوم الحديث للعدد الطبيعي:

بقى مفهوم العدد الطبيعي كما هو إلى أن قدم العالم الإيطالي جوزيب بيانو (١٨٥٨-١٩٤٣) مجموعه من المسلمات أخذها عن العالم الألماني رتشارد ديدكند (١٨٣٢-١٩١٦) لبناء الأعداد الطبيعية، ومن تلك المسلمات نذكر:

١- الصفر عدد طبيعي.

٢- تالي أي عدد طبيعي يكون عدداً طبيعياً.

٣- الصفر ليس تالياً لأي عدد طبيعي.

٤- ليس لعددين طبيعيين مختلفين نفس التالي.

وقد قدم الرياضي الألماني جوتلوب فريج (١٨٤٨-١٩٢٥) عام ١٨٩٤ أول تعريف للعدد الطبيعي يعتمد على نظرية المجموعات (Set Theory) ويقوم على فكرة تكافؤ المجموعات.

وفي الثلاثينيات من القرن العشرين قام العالم المجري جون فون نيومان (١٩٠٣-١٩٥٧) ببناء مجموعة الأعداد الطبيعية باستخدام نظرية المجموعات وذلك بقرن الصفر بالمجموعة الخالية التي يرمز لها بالرمز ϕ والواحد بالمجموعة $\{\phi\}$ والاثنين بالمجموعة $\{\phi,\{\phi\}\}$ وهكذا ... بمعنى أن:

$$0=\phi \quad , \quad 1=\{0\}=\{\phi\} \quad , \quad 2=\{0,1\}=\{\phi,\{\phi\}\}$$

$$3=\{0,1,2\}=\{\phi,\{\phi\},\{\phi,\{\phi\}\}\}$$

وهكذا.. بمعنى أن كل عدد طبيعي يساوي مجموعة الأعداد التي تسبقه.

(١٣) **ظهور الأعداد السالبة:**

ظهرت الأعداد السالبة في حلول بعض المعادلات الجبرية للمرة الأولى عند الرياضي اليوناني ديوفانتس (٢١٠-٢٩٤م) ، وقد أهتم علماء العرب والمسلمين بتلك الأعداد وكان أول من قام بتعريفها واستخدمها في حل بعض المعادلات الجبرية هو الخوارزمي دون أن يكون قد أطلع على كتاب ديوفانتس الذي ترجم إلى العربية بعد وفاة الخوارزمي بنحو ٧٠ عاماً.

وقد عرف أبو بكر الكرخي (المتوفى عام ١٠٢٩م) وكذلك عمر الخيام (١٠٤٨-١١٣١) الأعداد الصحيحة بأنها تلك الأعداد التي تشتمل على الأعداد الطبيعية أو أعداد الترقيم بما في ذلك الصفر ومجموعة الأعداد السالبة(...-1,-2,-3)، وبين الكرخي والخيام ومن بعدهما بهاء الدين العاملي (١٥٤٧-١٦٤٢) استحالة وجود أعداد صحيحة تحقق العلاقتين:

$$\boxed{a^2+b^2=2c^2 \ \ , \ a^3+b^3=c^3}$$

وقد ذكر ذلك الرياضي الفرنسي بيردي فيرما (١٦٠١-١٦٦٥) في نظرية عرفت باسمه نشرت حوالي عام ١٦٤٥م.

وقد أعترف الرياضي الإيطالي كاردانو (١٥٠١-١٥٧٦) في كاتبه (الفن العظيم) الذي نشر عام ١٥٤٥ بالحلول السالبة للمعادلات الجبرية وأعطي قوانين بسيطة وواضحة للتعامل مع الأعداد السالبة، وفي نفس الفترة ذكر الرياضي الألماني ستيفل (١٤٨٧-١٥٦٧) الأعداد السالبة كأعداد مميزه وقال في كتاب له نشر عام ١٥٤٤ أنها أعداد أقل من الصفر وأوضح طرق إجراء عملياتها كأعداد معترف بها. وهكذا كان كل من كاردانو وستيفل هما أول من قاما بمعالجة جادة للأعداد السالبة وذلك في القرن السادس عشر الميلادي.

(١٤) **نظريات الأعداد الأولية:**

أ- عرف الفيلسوف اليوناني أرسطو(٣٨٤-٣٢٢ق م) وكذلك إقليدس (٣٣٠-٢٧٥ق.م) العدد الأولي بأنه العدد الذي لا يقاس بأي عدد آخر، ولم يكن الإغريق (اليونانيون القدامى) يعترفون بالواحد الصحيح على أنه عدد ومن ثم فإن تعريفهم للعدد الأولي

يقترب من التعريف السائد حاليا وهو أنه عدد صحيح أكبر من الواحد ولا يقبل القسمة إلا على نفسه وعلى الواحد الصحيح، ومن أمثلة تلك الأعداد نذكر الأعداد 2, 3، ، 5، 7، 11، ...

وقد وضع إراتوستين (٢٧٦-١٩٤ق م.) تلميذ مدرسة إقليدس وأمين مكتبة الإسكندرية في عهدها القديم وأول من حسب محيط الأرض بطريقة هندسية، جدولاً يعرف بجدول (أو غربال) إراتوسثين بين فيه الأعداد الأولية بدءاً من العدد 2 ثم العدد3 ثم 5 ثم 7 ثم 11 وهكذا.

- ويظهر في الجدول التالي جزء من غربال إراتوسثين:

١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١
٢٠	١٩	١٨	١٧	١٦	١٥	١٤	١٣	١٢	١١
٣٠	٢٩	٢٨	٢٧	٢٦	٢٥	٢٤	٢٣	٢٢	٢١
٤٠	٣٩	٣٨	٣٧	٣٦	٣٥	٣٤	٣٣	٣٢	٣١
٥٠	٤٩	٤٨	٤٧	٤٦	٤٥	٤٤	٤٣	٤٢	٤١

ومن هذا الجدول نرى أن الأعداد الأولية يمكن الحصول عليها بالطريقة الآتية:

نبدأ بأول عدد أولي وهو 2 ثم نحذف كل ثاني عدد (10,8,6,4، ...)

ثم نأتي إلى العدد الأولي التالي وهو 3 ثم نحذف كل ثالث عدد (12،9،6، ...)

ثم العدد الأولي التالي وهو 5 ثم نحذف كل خامس عدد (10،15،20، ...)

وهكذا، وهي عملية لا تنتهي وذلك لأن عدد الأعداد الأولية لانهائي كما أثبت إقليدس.

ب- وقد حاول الكثيرون من الرياضيين في عصر النهضة في أوربا وضع قاعدة (أو نظرية) للأعداد الأولية، وكان أولهم ببيرفيرما الذي وضع نظرية عام ١٦٤٠ بدون برهان لتحديد الأعداد الأولية، وقد قام جوتفريد ليبنتز (١٦٤٦-١٧١٦) بإثبات هذه النظرية بطريقة الاستقراء (أو الاستنتاج) الرياضي عام ١٦٨٣ ولكنه لم ينشر الإثبات.

أما أول إثبات منشور لتلك النظرية فقد كان لأويلر عام ١٧٧٢، وتوالت إثباتات نظرية الأعداد الأولية على يدي الروسي تشيبشيف (١٨٢١-١٨٩٤) عام ١٨٥٠ ثم الفرنسي چاك هادامار (١٨٦٥-١٩٦٣) عام ١٨٩٦.

(١٥) <u>الدوال العددية (أو الحسابية):</u>

ظهر الدوال العددية أو الحسابية للمرة الأولي في القرن العاشر الميلادي في أعمال كل من العالمين العربيين: أبو جعفر الخازن (المتوفي عام ١٠١٠م) وأبو سعيد السجستاني (المتوفي عام ١٠٢٤م)، وتكن أهمية تلك الدوال في تطبيقاتها المتزايدة في العلوم الرياضية والفيزيائية وفي الفلك، وقد جمع العالم العربي كمال الدين الفارسي (المتوفي عام١٣٢٠م) في كتابه (تذكرة الأحباب في تمام التحاب) جميع القضايا الضرورية لتمييز الدوال العددية، وقام بوضع العديد من النظريات الخاصة بتلك الدوال.

وقد تطورت الدوال العددية بعد ذلك على يدي علماء الغرب وظهرت دوال متعددة نذكر منها:

أ- <u>دالة زيتا:</u> وقد عرفت أولاً من قبل أويلر عام ١٧٣٧ثم قام الرياضي الألماني برنارد ريمان(١٨٢٦-١٨٦٦) عام ١٨٥٩ بتوسيع هذا التعريف وتعميمه، كما أوضح العلاقة بين تلك الدالة وبين توزيع الأعداد الأولية، لذلك يطلق عليها أحياناً اسم دالة ريمان، ولها تطبيقات عديدة في نظرية الأعداد وفي الفيزياء الرياضية أيضاً.

ب- <u>دالة موبيوس:</u> وقد ظهرت أولا وبصورة غير مباشرة في أعمال أويلر أيضاً وذلك عام ١٧٤٨ ثم جاء الرياضي الألماني أو جست موبيوس (١٧٩٠-١٨٦٨) فدرس عام ١٨٣٢ خواص تلك الدالة وعلاقتها بالأعداد الأولية وبالدوال العددية الأخرى فسميت باسمه.

ج- <u>دالة إيتا:</u> وهي إحدى الدوال العددية الهامة ذات التطبيقات المتعددة، وكان أول من عرفها ودرس خواصها هو الرياضي الألماني بيتر دريشليه (١٨٠٥-١٨٥٩)، ولذلك فإن بعض المراجع تطلق على تلك الدالة إسم دالة دريشليه.

(١٦) القسمة والكسور:

أ- تعتبر عملية القسمة أكثر العمليات الحسابية الأساسية صعوبة، وكانت دائماً من أكثر العمليات التي يتم التدريب عليها لمن يعملون في التجارة والأعمال التي تتطلب عمليات حسابية.

ويرجع ظهور الكسور إلى العصور القديمة فقد عرف البابليون كسورا على أساس النظام الستيني للعد، نصف = $\frac{30}{60}$ ، ثلث = $\frac{20}{60}$، ربع = $\frac{15}{60}$.

وكان للمصريين القدماء خبرة طويلة بفكرة الكسور ظهرت في برديه أحمس التي ترجع إلى عام ١٧٠٠ق.م حيث كان المظهر الأساسي للكسر عندهم هو الكسر الذي بسطه يساوي الواحد الصحيح مثل ... $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},$ والتي يطلق عليها أسم كسور الوحدة، وكانت معالجة الكسر عند أحمس قريبة من فكرة النسبة، فالكسر $\frac{2}{43}$ كان يعني شيئا قريبا من 2:43 أو ضعف $\frac{1}{43}$، وكانت طريقة أحمس في تجزئة الكسور منتشرة بين الدارسين حتى القرن العاشر الميلادي.

ب- وفي القرن العاشر الميلادي ظهر العالم العربي أبو الوفاء البوزجاني (٩٤٠-٩٩٨م) ووضع كتابه المسمى (فيما يحتاج إليه الكتاب من علم الحساب) والذي قام فيه بمعالجة الكسور بجميع أشكالها البسيطة وخاصة تلك التي على شكل $\frac{n}{m}$ حيث n تتراوح بين 1، 9 و m تتراوح بين 3، 10. وميز البوزجاني بين ثلاثة أنواع من الكسور الاعتيادية أو المعتادة وهي:

١- الكسور الرئيسية ذات الصورة التي بسطها يساوي الوحدة وهي من نصف $(\frac{1}{2})$ إلى عشر $(\frac{1}{10})$ وتسمى أيضاً كسور الوحدة.

٢- الكسور المركبة: وهي التي على الصورة a إلى b حيث a أقل من b وأقل من 10 .

٣- الكسور الوحدية: وتنتج من حاصل ضرب الكسور الرئيسية.

وأطلق البوزجاني على الكسور الرئيسية والكسور الحاصلة من جمع أو ضرب الكسور الرئيسية اسم الكسور الناطقة، أما الكسور الأخرى فأطلق علها البوزجاني اسم الكسور الصماء.

ج- ويعود الفضل إلى العالم العربي ابن البناء المراكشي(١٢٥٦-١٣٢١) إلى كتابة الخط الفاصل بين البسط والمقام في الكسر فيكتب الكسر a إلى b بالصورة $\frac{a}{b}$ والعدد الصحيح والكسر بالصورة $a\frac{b}{c}$ فمثلا العدد 30 والكسر $\frac{2}{5}$ يكتب $(30\frac{2}{5})$ وهكذا.

وفي القرن الثاني عشر وبعد دراسته لأعمال الرياضيين العرب قام الإيطالي فيبوناتسي (١١٧٠-١٢٣٠) بوضع قاعدة لتجزئ الكسور بصفة عامة، والتي تعتبر تجزئ الكسور إلى كسور الوحدة حالة خاصة منها.

د- **الكسور العشرية:** لقد وردت أول إشارة لإجراء عمليات حسابية بواسطة كسور عادية مقامها العشرة وقواها عند العالم العربي السموأل بن يحي المغربي (المتوفي عام ١١٧٦م) وذلك في كتابين له هما:

التبصرة في علم الحساب، القوامى في الحساب الهندي

حيث قدم السموأل عرضا للكسور العشرية في سياق حديثة حول استخراج الجذر النوني لعدد طبيعي.

كما أورد أبو الحسن أحمد الاقليدسي (المتوفي عام ٩٦٥م) في كتابه (الفصول في الحساب الهندي) الذي وضعه عام ٩٥٢م قاعدة الأصفار في الحالات الخاصة لإيجاد الجذر التربيعي للعدد2.

أما غياث الدين الكاشي (المتوفي عام ١٤٣٦م) فقد توج أعمال من سبقوه من العلماء العرب فأورد في كتابه (مفتاح الحساب) عرضا للكسور العشرية يعتبر من الأعمال الهامة في تاريخ تلك الكسور، وقد قال العالم سترويك في كتابه (مصادر الرياضيات خلال الفترة (١٢٠٠-١٨٠٠م) : أن الكاشي كان أول من استخدم الكسور العشرية في حل بعض المسائل وهو أول من استخدم علامة الكسر العشري في العمليات الرياضية، وهو أعتراف هام لسترويك في أحقية الكاشي بالسبق في موضوع الكسور العشرية.

وبعد انتقال العلم العربي إلى أوربا وترجمة المؤلفات الرياضية العربية إلى اللغات الأوربية، كان الرياضي الفرنسي فرانسوا ڤييت (١٥٤٠-١٦٠٣) هو أول من استخدم الكسور العشرية بطريقة منظمة ودعا إلى استخدامها في سائر الكتب الرياضية، وكان يستخدم الفاصلة والشرطة الرأسية كعلامات عشرية.

وعلى الرغم من الجهود التي ذكرناها حول استخدام الكسور العشرية والإشارة إليها فإن كثير من المؤرخين ينسبون اختراعها إلى الرياضي الهولندي سيمون ستيفن (١٥٤٨-١٦٢٠) الذي كان معاصراً لفرانسوا ڤييت وذلك في بحث نشره عام ١٥٨٥ وشرح فيه الكسور العشرية وأوضح قواعد إجراء العمليات الحسابية عليها.

وبعد حوالي ثلاثين عاما من ذلك ظهر اختراع اللوغاريتمات على يدي جون نابير (١٥٥٠-١٦١٧) وذلك عام ١٦١٤ ، وكان لذلك أثره القوى على استخدام الكسور العشرية في العمليات الحسابية.

هـ- أما الكسور المستمرة والتي تتميز بتطبيقاتها المتعددة في الهندسة والفيزياء فهي بوجه عام تمثل الأعداد بمختلف أنواعها، وهي إما أن تكون بسيطة أو غير بسيطة، وقد تكون منتهية (محدودة) أو غير منتهية، ويعود تاريخ ظهورها بالصورة المعروفة عنها حاليا إلى عام ١٥٧٢ على يد العالم الايطالي رفائيل بومبيلي (١٥٢٦-١٥٧٦) ثم على يد العالم الايطالي أيضاً بترو كاتالدى (١٥٥٢-١٦٢٦) عام ١٦١٣ ومن بعده العالم الإنجليزي جون واليس (١٦١٦-١٧٠٣) عام ١٦٥٣.

(١٧) <u>الجذور والأعداد الصماء (غير النسبية):</u>

أ- <u>الأعداد النسبية والإعداد غير النسبية (الصماء):</u>

يعرف العدد النسبي بأنه العدد الذي يمكن كتابته بالصورة $\frac{n}{m}$ حيث n,m أعداد صحيحة وليست صفرا، ولقد اكتشف علماء مدرسة فيثاغورث في القرن الخامس قبل الميلاد أن النسبة بين طول قطر المربع وطول ضلعه لا يمكن أن يكون عدداً صحيحاً أو نسبياً.

وطبقاً لنظرية فيثاغورث الهندسية فإن مربع طول الضلع المقابل للزاوية القائمة يساوي مجموع مربعي الضلعين المجاورين لها، فإذا أردنا أن نوجد طول الضلع نفسه فيجب أن نأخذ الجذور التربيعي لمربع طول الضلع، ومن هنا نشأت فكرة وجود الجذر التربيعي مثل ... , $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$.

ويعود وصف الأعداد ... , $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ بأنها أعداد صماء إلى العلماء العرب، فقد تحدث الخوارزمي عام ٨٢٥م عن الأعداد النسبية كأعداد ناطقة، وعن الأعداد غير النسبية كأعداد صماء، ووصفها بأنها تلك الأعداد التي لا يمكن التعبير عنها على صورة نسبة أو هي أعداد بدون نسبه.

وقد استحوذت الأعداد الصماء (غير النسبية) من حيث طبيعتها وطرق التعامل مهما على اهتمام علماء الرياضيات منذ عهد فيثاغورث (٥٧٢-٤٩٧ق.م) في القرن الخامس قبل الميلاد، ومروراً بعلماء الحضارة العربية الإسلامية وحتى العالم الألماني ڤيرشتراس (١٨١٥-١٨٩٧) في القرن التاسع عشر الميلادي.

ومن العلماء العرب الذين درسوا الجذور الصماء نذكر عبد القادر بن طاهر البغدادي (المتوفي عام ١٠٣٧م) الذي ذكر عددا من العلاقات تستخدم في ضرب وقسمة الجذور الصماء وذلك في كتابه (التكملة في الحساب) الذي ألفه حوالي سنة ١٠١٠م.

$$(1)\quad \sqrt{a}\pm\sqrt{b}=\sqrt{a+b\pm 2\sqrt{ab}}$$

فمثلاً

$$\sqrt{18}\pm\sqrt{8}=\sqrt{18+8\pm 2\sqrt{144}}=\sqrt{26\pm 24}$$

$$=\sqrt{50}\quad \text{or } \sqrt{2}=7 \text{ or } 1.4$$

$$(2)\quad \sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{2}}$$

فمثلاً

$$\sqrt{6\pm\sqrt{20}}=\sqrt{\frac{6+\sqrt{16}}{2}}\pm\sqrt{\frac{6-\sqrt{16}}{2}}=\sqrt{5}\pm 1=3.23 \text{ or } 1.23$$

ب- إيجاد القيم التقريبية للجذور:

من بين الاهتمامات التي قام بها العلماء العرب إيجاد القيم التقريبية للجذور التربيعية والتكعيبية للأعداد، وقد برع هؤلاء العلماء في استخراج جذور الأعداد الطبيعية.

وكان الخوارزمي قد أوجد قاعدة لإيجاد القيم التقريبية للجذر التربيعي لعدد طبيعي غير مربع (غير مرفوع للقوة الثانية) وتنص تلك القاعدة على الآتي:

" إذا كان المطلوب إيجاد القيم التقريبية للجذر $\sqrt{n}$: فنضع n بالصورة $n=a^2+r$ " حيث القيم التقريبية للجذر a_2, a_1 تعطى من العلاقتين:

$$a_1=a+\frac{r}{2a} \ , \ a_2=\frac{n}{a_1}$$

مثال: إذا كانت $n=5$ فلإيجاد $\sqrt{5}$، نضع $n=a^2+r$ أي بالصورة:

$$5=4+1=2^2+1$$

ومنها نجد أن

$$a=2 \ , r=1$$

ففي التقريب الأول نجد أن:

$$a_1=2+\frac{1}{2\times 2}=2+\frac{1}{4}=2.250$$

وفي التقريب الثاني نجد أن:

$$a_2=\frac{n}{a_1}=\frac{5}{2.250}=2.222$$

مثال آخر: إذا كانت $n=11$ فلإيجاد $\sqrt{11}$ نضع $n=a^2+r$ أي بالصورة

$$11=9+2=3^2+2$$

ومنها نجد أن:

$$a=3 \ , \ r=2$$

ففي التقريب الأول نجد أن:

$$a_1 = 3 + \frac{2}{2\times 3} = 3 + \frac{1}{3} = 3.333$$

وفي التقريب الثاني نجد أن:

$$a_2 = \frac{n}{a_1} = \frac{11}{3.333} = 3.300$$

وأعطى أبو الحسن أحمد الإقليدسي (المتوفي عام ٩٦٥م) في كتابه (الفصول في الحساب الهندي) قاعدة لتقريب الجذور أطلق عليها فيما بعد اسم (التقريب الاصطلاحي) وتنص على أن:

$$\sqrt{n} = a + \frac{r}{2a + \frac{1}{2}} \quad , \; n = a^2 + r$$

فمثلاً: لإيجاد $\sqrt{5}$:

$$n = 5 = 2^2 + 1$$

$$\therefore a = 2 \; , \; r = 1$$

$$\therefore \sqrt{5} = 2 + \frac{1}{2\times 2 + \frac{1}{2}} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}} = 2 + \frac{1}{4.2} = 2 + 0.222 = 2.222$$

ولإيجاد $\sqrt{11}$:

$$n = 11 = 3^2 + 2$$

$$\therefore a = 3 \; , \; r = 2$$

$$\therefore \sqrt{11} = 3 + \frac{2}{2\times 3 + \frac{1}{2}} = 3 + 0.307 = 3.307$$

أما أبو بكر الكرخي (المتوفي عام ١٠٢٩م) فقد وضع القاعدة الآتية في كتابه (الفخري في الجبر والمقابلة):

$$\sqrt{n} = a + \frac{r}{1 + 2a}$$

فلإيجاد $\sqrt{5}$:

$$\sqrt{5}=2+\frac{1}{1+2\times 2}=2+\frac{1}{5}=2.200$$

ولإيجاد $\sqrt{11}$:

$$\sqrt{11}=3+\frac{2}{1+2\times 3}=3+\frac{2}{7}=3+0.285=3.285$$

وكلها قيم تقريبية.

أما أبو بكر الحصار (١١٣٠-١١٩٠م) أحد رياضي القرن الثاني عشر فقد استخدم حوالي عام ١١٧٥م قاعدتين هامتين لتقريب $\sqrt{n}$ هما:

$$(1)\ \sqrt{n}=a+\frac{1+r}{2+2a}\quad,\quad (2)\ \sqrt{n}=a+\frac{r}{2a}-\frac{(\frac{r}{2a})^2}{2(r+\frac{r}{2a})}$$

ولتطبيق هاذين القانونين لا يجاد $\sqrt{5}$، مثلاً حيث $a=2\,,\ r=1$

$$(1)\ \sqrt{5}=2+\frac{1+1}{2+2\times 2}=2+\frac{2}{6}=2+0.333=2.333$$

$$(2)\ \sqrt{5}=2+\frac{1}{2\times 2}-\frac{(\frac{1}{4})^2}{2(1+\frac{1}{4})}=2.250-0.025=2.225$$

وهو تقريب أفضل

أما الجذور التكعيبية فقد وردت عند كوشيار بن لبان الجيلي (المتوفي عام ٩٦١م) وعند الحسن بن الهيثم (٩٦٥-١٠٣٨م)، كما قام عمر الخيام (١٠٤٨-١١٣١م) بحساب الجذر التكعيبي للعدد الطبيعي n هندسيا باستخدام القطوع المخروطية.

ومن بين العلماء العرب الذين أعطوا قوانين لإيجاد القيم التقريبية للجذر التكعيبي نذكر:

(١) أبو منصور عبد القادر بن طاهر البغدادي (المتوفي عام ١٠٣٧م)

حيث وضع في كتابه (التكملة في الحساب) القانوني الأتي:

$$\boxed{n=a^3+r\ \rightarrow\ \sqrt[3]{n}=a+\frac{r}{3a^2+3a+1}}$$

فمثلاً: لإيجاد $\sqrt[3]{129}$ نضع $n=129=5^3+4$، ومنها $a=5\,,r=4$

$$\therefore \sqrt[3]{129}=5+\frac{4}{3\times5^2+3\times5+1}=5+\frac{4}{75+15+1}$$

$$=5+\frac{4}{91}=5+0.0439=5.0439$$

(٢) <u>القاضي أبو الحسن النسوي (المتوفي عام ١٠٤٥م):</u>

حيث وضع في كتابه (المقنع في الحساب الهندي) القانون الآتي:

$$n=a^3+r\to\sqrt[3]{n}=a+\frac{r}{3a^2+1}$$

فلإيجاد $\sqrt[3]{129}$ مثلاً:

$$\sqrt[3]{129}=5^3+4$$

$$a=5\quad,\quad r=4$$

$$\therefore\sqrt[3]{129}=5+\frac{4}{3\times5^2+1}=5+\frac{4}{75+1}$$

$$=5+\frac{4}{76}=5+0.0526=5.0526$$

(٣) <u>الرياضي الأندلسي أبو عبد الله يعيش بن إبراهيم الأموي (المتوفي عام ١٣٨٠م):</u>

حيث وضع في كتابه (مراسم الانتساب في معالم الحساب) الطريقة الآتية لإيجاد الجذر التكعيبي للعد n:

نفترض أن العدد n يمكن كتابته بالصورة: $n=a^3+b$

حيث a^3 أكبر مكعب كامل في العدد n، b هو الباقي، فإذا كان $b<a^2$ فإن:

$$\sqrt[3]{n}=a+\frac{1+b}{3a^2+4}$$

<u>مثال</u>: لإيجاد $\sqrt[3]{129}$: نلاحظ أن $129=125+4=5^3+4$، وهذا يعني أن

$a=5\,,b=4$ أي أن $b<a^2\;\;,\;(4<25)$

$$\therefore\sqrt[3]{n}=a+\frac{1+b}{3a^2+4}=5+\frac{1+4}{3\times25+4}=5+\frac{5}{75+4}=5+\frac{5}{79}=5.0632$$

أيضاً بكتابة العدد n بالصورة: $n = a^3 + b_1 = (a+1)^3 - b_2$

حيث a^3 أكبر مكعب كامل في العدد n ، b_1 هو الباقي ، أما $(a+1)^3$ فهو أصغر مكعب كامل في العدد، b_2 هو الباقي، حيث $b_2 = (a+1)^2 - n$

ويكون لدينا حالتان:

(أ) إذا كان $b_1 < b_2$ فإن:

$$\sqrt[3]{n} = a + \frac{b_1}{3a^2}$$

(ب) إذا كان $b_1 > b_2$ فإن:

$$\sqrt[3]{n} = (a+1) - \frac{b_2}{3(a+1)^2}$$

<u>مثال(أ):</u> لإيجاد $\sqrt[3]{1800}$ نلاحظ أن:

$$1800 = (12)^3 + 72 = (13)^3 - 397$$
$$a = 12 , b_1 = 72 , b_2 = 397$$

أي أن $b_1 < b_2$ $(72 < 397)$. إذاً

$$\sqrt[3]{1800} = a + \frac{b}{3a^2} = 12 + \frac{72}{3(12)^2} = 12.166$$

<u>مثال(ب):</u> لإيجاد $\sqrt[3]{200}$ نلاحظ أن:

$$200 = 125 + 75 = (5)^3 + 75 = 216 - 16 = (6)^3 - 16$$
$$a = 5 , b_1 = 75 , b_2 = 16$$

أي أن $b_1 > b_2$ $(75 > 16)$. إذاً

$$\sqrt[3]{200} = (a+1) - \frac{b_2}{3(a+1)^2} = (6) - \frac{16}{3(6)^2}$$

$$= 6 - \frac{16}{108} = 6 - 0.148 = 5.852$$

ج- وبعد أن وصل كتاب الخوارزمي إلى أوربا عن طريق ترجمته على يدي أديلارد أوف باث عام ١١٢٠م ، أخذ الأوربيون فكرة الجذر عن العرب وترجموا الكلمة العربية جذر إلى الكلمة اللاتينية (Radix) ، كما استعملوا كلمة استخراج الجذر بدلا من إيجاده، وخلال فترة استحداث الرموز الجبرية في أوربا على يدي الفرنسي ڤييت (١٥٤٠-١٦٠٣) اختصرت كلمة Radix إلى الرمز R ثم استخدمت علامة الجذر ($\sqrt{\ }$) والتي يمكن النظر إليها على أنها صور من الحرف (r).

ويلاحظ أن أبو الحسن القلصادى (١٤١٢-١٤٨٦) الرياضي الأندلسي الشهير وأول من استخدم الرموز في علم الجبر كان يستخدم الحرف الأول من كلمة جذر (جـ) للدلالة على الجذر التربيعي فكان يكتب $\frac{\text{جـ}}{٢}$ للدلالة على $\sqrt{٢}$ وقد ورد ذلك في كتابه (كشف الجلباب عن علم الحساب).

وذكر كاجوري في كتابه (تاريخ الرياضيات) أن فرانسوا ڤييت الذي ينسب إليه استحداث الرموز في علم الجبر قد أطلع على كتابات القلصادي بعد ترجمتها إلى اللاتينية واستوحى منها فكرة استعمال الرموز لتبسيط المسائل الجبرية.

كما يلاحظ أن جيرارد الكريموني (١١١٤-١١٨٧م) وهو ثاني عالم أوربي يترجم كتاب الخوارزمي إلى اللغة اللاتينية عام ١١٧٥ نقل كلمة صماء (صفة الجذور الصماء عند الخوارزمي) إلى الكلمة اللاتينية (Surdus) التي تعني أصم.

(١٨) <u>الأعداد التخيلية:</u>

أ- واجه الرياضيون القدامى، وخاصة في العصر السكندري، ومنهم هيرون (٢٠-٩٥م) في القرن الأول الميلادي وديوفانتس (٢١٠-٢٩٤م) في القرن الثالث الميلادي، وهما من أساتذة مدرسة الرياضيات بجامعة الإسكندرية القديمة والتي كان إقليدس أول أساتذتها عام ٣٠٠ ق. م ، مشكلات في حل المعادلات التي تتضمن حلولا تخيليه ناتجة عن وجود جذر تربيعي لعدد سالب، أو عند إيجاد أطوال أضلاع مثلث

قائم الزاوية محيطه أكبر من مساحته، وقد أهمل هؤلاء العلماء تلك الحلول ووصفوها بأنها مستحيلة وأهملوا بذلك وجود الجذر التربيعي للعدد السالب.

وكان الرياضي الهندي فاراهاميرا Varahamira (٥٠٥-٥٨٧م) في القرن السادس الميلادي أول من عبر عن صعوبة وجود جذر تربيعي لعدد سالب، حيث ذكر أنه من طبيعة الأشياء أن الكميات السالبة لا يمكن أن تكون كمية مربعة ومن ثم لا يكون لها جذور تربيعية.

ب- كذلك تنبه العلماء العرب إلى الحالات التي يكون فيها الجذر كميه تخيليه ولكنهم أهملوها أيضا حيث قال الخوارزمي في ذلك: أن المسالة في تلك الحالة تصبح مستحيلة، وتبعه في ذلك كل من أبو بكر الكرخي وعمر الخيام وكذلك بهاء الدين العاملي.

ج- وقد وردت مثل تلك التعليقات عند علماء عصر النهضة في أوربا مثل الايطالي باسيولي (١٤٤٥-١٥٠٩) والفرنسي شوكيه (١٤٤٥-١٥٠٠) الذي قال بأن $\sqrt{-1}$ يمثل حالة مستحيلة، وكان الايطالي كاردانو (١٥٠١-١٥٧٦) أول من تعامل مع الجذور التربيعية للأعداد السالبة على أنها أعداد تخيليه وأطلق عليها إسم كميات سفسطائية (Sophistic) أي فيها مغالطة.

وقد أشار الهولندي ستيفن (١٥٤٨-١٦٢٠) عام ١٥٨٥ إلى أن موضوع الأعداد التخيلية لم يتم التمكن منه بعد.

د- وفي القرن السابع عشر إهتم ليبنتز (١٦٤٦-١٧١٦) بدراسة الأعداد التخيلية حين حاول عام ١٦٧٦ تحليل المقدار (x^4+a^4)، وفي نفسي تلك الفترة وفي عام ١٦٧٣ قام جون واليس (١٦١٦-١٧٠٣) بدراسة الأعداد التخيلية وفكر في أن يقوم بتمثيلها بيانيا، غير أنه لم يتمكن من ذلك، إلى أن جاء الرياضي النرويجي كاسبار فسيل (١٧٤٥-١٨١٨) عام ١٧٩٧ فكان هو أول من عالج تلك الأعداد معالجة هندسية حيث مثل الأعداد الحقيقية على محور السينات والأعداد التخيلية على المحور الصادي، وفي أوائل القرن التاسع عشر أقر كل من جان أرجاند (١٧٦٨-١٨٢٢) وكارل جاوس

(١٨٥٥-١٧٧٧) هذا التمثيل البياني، وظهر ذلك في كتاب لجان ارجاند ظهر حوالي عام ١٨٠٠، وقد أطلق على هذا التمثيل إسم: شكل أرجاند ، ويسمي أحيانا شكل فسيل.

هـ- وكان الفرنسي رنيه ديكارت (١٥٩٦-١٦٥٠) أول من استخدم المصطلحات حقيقي وتخيلي، وأصبح معظم الرياضيين في القرنين السابع والثامن عشر يطلقون على المقدار $(a+ib)$ أو $(a+\sqrt{-1}\,b)$ مصطلح كمية تخيلية، ولكن جاوس عام ١٨٣٢ أطلق اسم كمية مركبة على $(a+ib)$ وكمية تخيلية على (ib)، وينسب إلى ليونارد أويلر (١٧٠٧-١٧٨٣) أنه أول من استخدم الرمز i للعدد $\sqrt{-1}$ وذلك عام ١٧٤٨، كما كان كوشى (١٧٨٩-١٨٥٧) هو أول من استخدم مصطلح الأعداد المترافقة لعددين مثل $(a+ib)$، $(a-ib)$ ومصطلح المقياس للعدد $\sqrt{a^2+b^2}$ وكان ذلك عام ١٨٢١.

أما فيرشتراس (١٨١٥-١٨٩٧) فقد أطلق على العدد $\sqrt{a^2+b^2}$ اسم القيمة المطلقة للعدد المركب $(a+ib)$.

ملحق: المربعات السحرية (Magic Squars):

من الموضوعات الحسابية الطريفة التي برع فيها العرب نذكر: المربعات السحرية، وهي أشكال مربعة فيها خانات، وفي الخانات أعداد معينة إذا جمعت طولاً أو عرضاً أو قطرياً ذات اليمين وذات الشمال تعطي نفس المجموع، إضافة إلى خصائص أخرى. وقد ذكرها ثابت بن قرة في كتابه (المدخل إلى علم الأعداد) ووضع لها قانوناً. وسنذكر هنا مربعين من تلك المربعات هما:

(١) المربع السحري الثلاثي (مربع فيثاغورث):

وهو أبسط مربع سحري يشتمل على ٩ خانات، ثلاثة في كل ضلع تتوزع فيها الأعداد من(١) إلى (٩) كما بالشكل، مع ملاحظة أن:

١٥	٦	٧	٢	
١٥	١	٥	٩	
١٥	٨	٣	٤	
١٥	١٥	١٥	١٥	١٥

مجموع الأعداد طولاً أو عرضاً أو قطرياً يميناً وشمالاً يساوي (١٥)، بمعنى أن:

مجموع الأعداد في أي خط مستقيم = ١٥

قانون ثابت بن قرة للمربعات السحرية:

إذا كان عدد الأعمدة أو الصفوف في المربع = ن ، وكان المربع يتكون من الأعداد ١،٢، ٣، ... ، ن^{٢} فإن:

(i) مجموع الأعداد في كل صف أو عمود أو قطر: جـ = $\frac{ن}{٢}$ (١ + ن^{٢})

(ii) مجموع الأعداد في المربع السحري كله: ج = جـ ن

تطبيق قانون ثابت بن قرة على مربع فيثاغورث:

ن = ٣ ، المربع يتكون من الأعداد ١ إلى ٩، إذاً مجموع الأعداد في كل صف أو عمود أو قطر: جـ = $\frac{٣}{٢}$ (١ + ٩) = $\frac{٣}{٢}$ × ١٠ = ١٥

مجموع الأعداد في المربع كله: ج = جـ ن = ١٥ × ٣ = ٤٥

[١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦ + ٧ + ٨ + ٩ = ٤٥]

(٢) **المربع السحري الرباعي (مربع إخوان الصفا)**

ويتكون من ١٦ خانه تتوزع فيها الأعداد من(١) إلى (١٦)، أربعة منها في كل ضلع بحيث أن مجموع الأعداد الأربعة طولاً وعرضاً وقطراً يساوي ٣٤، إضافة إلى خاصية أخرى هي: إذا قسمنا المربع إلى ٤ مربعات صغيرة فإن مجموع الأعداد في كل من هذه المربعات يساوي ٣٤ أيضاً.

	٣٤	٤	١٤	١٥	١
	٣٤	٩	٧	٦	١٢
	٣٤	٥	١١	١٠	٨
	٣٤	١٦	٢	٣	١٣
٣٤		٣٤	٣٤	٣٤	٣٤ ٣٤

تطبيق قانون ثابت بن قرة على مربع إخوان الصفا:

ن = ٤، المربع يتكون من الأعداد من ١ إلى ١٦

إذاً مجموع الأعداد في كل صف أو عمود أو قطر: جـ = $\frac{٤}{٢}$ (١+١٦)=٢×١٧ =٣٤

مجموع الأعداد في المربع كله: ج = جـ ن = ٣٤ × ٤ = ١٣٦

[١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ... + ١٦ = ١٣٦]

ثانياً: علــم الجبــر

(١) نشأة علم الجبر:

تعود النشأة الحقيقية لعلم الجبر كعلم مستقل بذاته عن علم الحساب إلـى الجهـود التي قام بها العلماء العرب والمسلمين أيام الحضارة الإسلامية الزاهرة التـي امتـدت عبر سبعة قرون كاملة (٧٥٠-١٤٥٠م).

وكان أول من أطلق كلمة الجبر على هذا العلم هو العالم المسلم أبو عبدالله محمـد بن موسي الخوارزمي (٧٨٠-٨٥٣م) الذي عاش في بغداد في القرن التاسع الميلادي أيام الخليفة العباسي المأمون الذي كان راعيا للعلم والعلماء.

وقد أكتسب علم الجبر اسمه في اللغات المختلفة من الكلمة العربية التي وضـعها الخوارزمي لهذا العلم (الجبر). وقد استخدم الخوارزمي هـذه الكلمـة للدلالـة علـى الطريقة التي ابتكرها لحل المعادلات وضمنها كتابه الشهير (الجبر والمقابلـة) الـذي وضعه حوالي عام ٨٣٠م، وقد ترجم هذا الكتاب إلى اللغـة اللاتينيـة والتـي كانـت منتشرة في القرون الوسطي في سائر الدول الأوربية، وذلك بواسطة عدد من علمـاء تلك الدول ومنهم العالم الإنجليزي أديلارد أوف بـاث (١٠٩٠-١١٥٠) عـام ١١٢٠ والعالم الايطالي جيرارد أوف كريمونا أو جيرارد الكريموني (١١١٤-١١٨٧) عـام ١١٧٠ وغيرهم،

ونتيجة لتلك الترجمات درس علماء الرياضيات في الغرب الكتاب واستفادوا منه، وكان ذلك بداية معرفة أوربا بعلم الجبر - كما قال جورج سارتون في كتابه (مقدمـة لتاريخ العلم).

(٢) الجبر قبل الخوارزمي:

لقد كانت هناك محاولات بدائية ظهرت قبل الخوارزمي في هـذا العلـم، وقـد تناولت هذه المحاولات بعض المسائل التي تؤدي في حلها إلى معادلات مـن الدرجـة الأولي أو الثانية، وكان حل تلك المعادلات يتم بطرق حـسابية (عدديـة) أو هندسـية

سواء عند البابليين أو عند قدماء المصريين أو عند الإغريق (اليونانيون القدامى)، وكانت المسائل وحلولها لفظية كلامية تعتمد على الحساب العقلي أو التصور الهندسي.

وقد قسم المؤرخ نيسلمان (Nesselman) تاريخ الجبر إلى ثلاث مراحل هي:

١- <u>المرحلة الأولى:</u> مرحلة الصور الكلامية والتي كانت تكتب فيها المسائل الجبرية وحلولها بكلمات وألفاظ.

٢- <u>المرحلة الثانية:</u> مرحلة الصور المختزلة أو المختصرة، وهي التي كانت الحلول تكتب فيها بكلمات مختصرة أو مختزلة.

٣- <u>المرحلة الثالثة:</u> المرحلة الرمزية، وهي المرحلة التي استخدمت فيها الرموز استخداماً كاملاً، كما هو متبع حالياً.

ويقول دافيدسميث في كتابه (تاريخ الرياضيات):

أنه لا توجد خطوط واضحة أو تواريخ محددة تفصل بين تلك المراحل إذ أنها كانت تتداخل في بعض الأحيان مع بعضها.

ونلاحظ أن رياضي العصور القديمة والوسطي كانت أعمالهم الرياضية تشمل أعمالاً متعددة، متداخلة من الحساب والجبر والهندسة وحساب المثلثات، وبدايات التفاضل والتكامل، وهي فروع الرياضيات المعروفة في تلك الأزمنة.

وسندرس باختصار فيما يلي الانجازات التي تمت في علم الجير قبل ظهور الخوارزمي وفي الحضارات المختلفة.

<u>أولاً:</u> الجبر عن البابليين:

أكتشفت آثار ولوحات تعود إلى حوالي عام ٢٠٠٠ ق م. تظهر تقدم البابليين (في بلاد العراق القديمة) في الرياضيات، وأن الأعمال الحسابية عندهم كانت تصل إلى مرحلة جبرية معينة وإن كانت بالصورة اللفظية أو الكلامية، فقد وجدت أمثلة تدل على الحلول الهندسية لبعض المسائل الجبرية، ومنهما المثال الآتي الذي يعود إلى حوالي عام ١٨٠٠ق.م ونصه كالآتي" مساحة مقدارها 1000 وحدة تتكون من مجموع

مربعين: ضلع أحدهما 10 وأقل من $\frac{2}{3}$ ضلع الأخر، فما طول كل من ضلعي المربعين ".

كما وجدت مسألة أخرى يدل حلها على معادلة من الدرجة الثانية، ونصها:

" طول وعرض، إذا ضرب الطول في العرض كانت المساحة 252 وإذا جمع الطول والعرض كان الناتج 32، أوجد الطول والعرض ".

وكانت حلول تلك المسائل لفظية وبطريقة مطولة بعيدة عن الطرق المعاصرة التي يتم بها حل تلك المسائل.

ويعتقد بعض المؤرخين أن البابليين عرفوا العلاقة الآتية التي تربط بين مجموع مكعبات الأعداد ومربع مجموعها، وهي:

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3=(1+2+3+...+n)^2$$

ثانياً: الجبر عند قدماء المصريين:

تعتبر برديتا موسكو (عام ١٩٠٠ق.م) وأحمس (عام ١٧٠٠ق.م) المصدران الرئيسيان للمعلومات عن الرياضيات عند قدماء المصريين.

ويعتبر علماء تاريخ الرياضيات أن بردية أحمس هي أول وثيقة (أو كتاب) رياضي مكتوب يتضمن معالجات منظمة في أبواب اشتملت على العد وكتابة الأرقام، وقواعد العمليات الحسابية الأربعة، الكسور، المربعات والجذور التربيعية، حل معادلات من الدرجة الأولى والثانية وبعض المتواليات، إضافة إلى عدد من المسائل الهندسية.

وكانت السمة الغالبة على طرق حل المعادلات عند قدماء المصريين هي استخدام تقدير أولي للمجهول (الذي كان أحمس يسميه كومة) ثم تصحيح القيمة الافتراضية بما يتفق مع معطيات المسالة، وكانت المسائل بالطبع في صورة لفظية وذات طابع تطبيقي.

وقد ظهرت في بردية أحمس مسائل تؤول في حلها إلى معادلات من الدرجة الثانية ومنها مثلاً المسألة الآتية:

قسم 100 وحدة مربعة إلى مربعين بحيث أن طول ضلع أحد هذين المربعين يساوي $\frac{3}{4}$ طول ضلع الأخر.

ومن بين المسائل التي وردت في بردية أحمس المسالة التالية التي تتم عن معرفة بالمتواليات:

" إقسم 100 رغيف على خمسة رجال بحيث أن ما يحصلون عليه يكون توالي عددي وأن $\frac{1}{7}$ مجموع أكبر ثلاثة منهم يساوي مجموع أصغر أثنين".

ثالثاً: الجبر عند الإغريق:

نظراً لاهتمام اليونانيون القدامى (الإغريق) منذ أول علمائهم طاليس الذي عاش في الفترة (٦٤٠-٥٤٦ ق م.) بالهندسة النظرية فإن علم الجبر لم يتقدم كثيراً على أيدي علمائهم، والسبب في ذلك يعود إلى :

١- أنهم كانوا مهتمون أصلا بالهندسة لاحتياجهم إليها في حياتهم اليومية وإقامة مبانيهم وعمائرهم.

٢- عدم وجود الرموز وقصور النظام العددي السائد آنذاك مما يجعل الخوض في المسائل الجبرية صعبا وقد يكون مستحيلا في بعض الأحيان.

وبالرغم من ذلك فقد ظهرت لديهم إشارات جبرية تدل على أن الجبر كان عندهم جبر هندسي حيث قام علماؤهم بصياغة العديد من المتطابقات الجبرية بلغة الهندسة، فالعدد المربع عندهم يمثل مساحة والجذر التربيعي يمثل طول ضلع مربع.

<u>ومثال ذلك</u>: العلاقة الجبرية $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ كانت تعطى بالصورة الهندسية الآتية:

خذ مربعاً طول ضلعه $(a+b)$ ثم لاحظ تقسيمه إلى أربع مساحات هي:

المربع الذي طول ضلعه a (أي المساحة a^2) والمربع الذي طول ضلعه b (أي المساحة b^2) ومستطيلان بعداً كل منهما a,b (أي مساحتهما 2ab).

كما قام الإغريق بحل معادلات من الدرجة الثانية هندسياً ويوضح ذلك المثال الآتي:

قسم مستقيماً طوله 13 إلى جزئين بحيث أن مساحة المستطيل الناشئ بهذين الجزئين تكون مساحته 36.

وتكافئ هذه المسالة المسألة الجبرية التالية:

أوجد عددين مجموعهما 13 وحاصل ضربهما 36.

وبلغتنا المعاصرة: إذا كان العددان هما x,y فإن:

$$x+y=13 \quad , \quad xy=36$$

ومن ذلك نجد أن: $y=13-x$ أي أن $x(13-x)=36$، وبذلك فإن $13x-x^2=36$ أو $x^2-13x+36=0$ وهي معادلة من الدرجة الثانية.

رابعاً: الجبر في العصر السكندري – الجبر الديوفانتي:

أنشأ الأسكندر الأكبر المقدوني مدينة الإسكندرية في مصر عام ٣٣٢ ق. م وفي عهد خليفته بطليموس الأول تم إنشاء مدرسة الإسكندرية التي تعتبر أشهر مدرسة علمية عليا(أو جامعة) في التاريخ القديم، وكان ذلك عام ٣٠٠ق.م وظلت تلك المدرسة (أو الجامعة) منارة للعلم والحضارة قرابة ثمانمائة عام، وكان يعمل بها عدد من ألمع الرياضيين في تلك الفترة، وعلى رأسهم الرياضي الشهير إقليدس (٣٣٠-٢٧٥ق.م) أول أستاذ للرياضيات ومؤسس قسم الرياضيات بتلك الجامعة، وصاحب كتاب الأصول في الهندسة الأقليدية.

ومن أساتذة الرياضيات في تلك الجامعة أيضاً نذكر العالم الكبير أرشميدس (٢٨٧-٢١٢ق.م) صاحب الأعمال المتميزة في الهندسة والجبر وحل المعادلات ورسم المنحنيات والذي إليه يعود الفضل في تطوير طريقة التقريب المتتالي للمساحات والتي بدأت على يد الرياضي والفيلسوف اليوناني إيودوكسوس (٤٠٨-٣٥٥ ق.م) والتي أصبحت بعد ذلك أساس حساب التكامل الحديث.

ومن علماء الرياضيات في العصر السكندري أيضاً نذكر :

أبولونيوس (٢٦٢-١٩٠ق.م) صاحب المعالجات المتميزة في الهندسة المستوية والنظريات الهامة في هندسة القطوع المخروطية.

وأستمر عطاء أساتذة مدرسة الإسكندرية حتى جاء **ديوفانتس (٢١٠-٢٩٤م)** الذي عاش في الإسكندرية في القرن الثالث الميلادي، والذي يعتبر أبرز علماء العصر السكندري في دراسة الجبر كعلم، ومن أهم أعماله كتاب (الأريتماطيقا) أو الحساب الذي ظهر حوالي عام ٢٥٠م وهو كتاب يقدم معالجة تحليلية لنظرية الأعداد الجبرية ويتضمن حلولاً لمعادلات من الدرجة الأولى والثانية، كما يتضمن حلولا لمعادلات غير محددة مثل المعادلة $x^2+y^2=z^2$ أو $x^2+y^2=z^3$ وهي معادلات في ثلاث متغيرات (x,y,z) ولها العديد من الحلول، وقد أطلق عليها العرب اسم المعادلات السيالة عندما قاموا بترجمة كتاب ديوفانتس إلى العربية، ويسميها علماء الغرب: المعادلات الديوفانتية.

وكان ديوفانتس يعترف في حل معادلاته بالأعداد الموجبة فقط ويكتفي بحل واحد (جذر واحد) في حلول معادلاته، كما أستخدم الاختزال أيضاً في كتابه المعادلات حيث كان يستخدم الأحرف الأولى للكلمات الإغريقية للدلالة علي المجهول وعلى عمليتي الجمع والطرح وعلى المقلوب وعلامة التساوي، وبذلك يعتبر مؤرخو العلم أن ديوفانتس هو أول من نقل الجبر من المرحلة اللفظية (أو الكلامية) إلى مرحلة الاختزال، وكان ذلك تمهيداً للمرحلة الرمزية التي كان أول من استخدمها العالم العربي أبو الحسن على القلصادى (١٤١٢-١٤٨٦م) حوالي عام ١٤٥٠م أي بعد ديونوفانتس بحوالي ١٢٠٠سنة، كما قام العالم الفرنسي فرانسوا ڤييت (١٥٤٠-١٦٠٣) بنشرها في أوربا بعد ذلك بنحو مائة وخمسون عاماً.

(٣) <u>الجبر عند العرب (عصر الخوارزمي وما بعده):</u>

أ- جاء العلماء العربي بدءاً من القرن التاسع الميلادي (الثالث الهجري) فقاموا بنقل التراث اليوناني في الرياضيات والطب والفلك إلى اللغة العربية، ثم قاموا بنقده

وإصلاح ما به من خلل وأضافوا إليه إضافات مؤثرة بل وأعادوا صياغة الكثير مما نقلوه، وأوجدوا فروعاً جديدة في الرياضيات مثل حساب المثلثات المستوية والكروية، ومثل الجبر الذي جعلوا منه علماً مستقلاً عن الحساب وأعطاه الخوارزمي الاسم الذي عرف به في سائر لغات العالم. ويحاول بعض المؤرخين الأوربيين التقليل من شأن الانجازات العربية في الرياضيات والفلك بقولهم أن من نبغ من علماء تلك الفترة إنما هم من أصل فارسي أو من بلاد ما وراء النهر، وصحيح أن كثير من علماء تلك الفترة لهم هذه الأصول، ولكنهم في حقيقة الأمر كانوا جميعاً نتاج الحضارة العربية الإسلامية، حيث كانوا يكتبون ويفكرون ويتواصلون باللغة العربية، وهم جزء أساسي من هذه الثقافة ويستحيل فصلهم عنها، كما أن معظمهم كانوا يتنقلون في مناطق العالم الإسلامي التي لم يكن بينها حدود فاصلة، ومثال على ذلك أن الخوارزمي الذي ولد في خوارزم في أوزبكستان (من بلاد ما وراء النهر) عاش حياته كلها في بغداد بالعراق تحت رعاية خليفة المسلمين آنذاك – الخليفة المأمون – كما كتب الخوارزمي مؤلفاته كلها باللغة العربية، أيضاً فإن الحسن بن الهيثم الذي ولد في البصرة بالعراق عاش معظم حياته في مصر وكتب مؤلفاته كلها بها، ودفن بها أيضاً ... وهكذا.

ب- جبر الخوارزمي:

كما سبق أن قلنا أن أبو عبدالله محمد بن موسي الخوارزمي هو أول من استخدم كله جبر وذلك في كتابه (الجبر والمقابلة) الذي ألفه حوالي عام ٨٣٠م.

وقد أوضح الخوارزمي أن مفهوم الجبر والمقابلة يعادل الآتي:

١- كلمة جبر: تعني النقل أي نقل أحد الحدود في المعادلة الجبرية من طرف لآخر.

٢- كلمة مقابلة: تعني الاختزال أو جمع الحدود المتشابهة وحذف الحدود المتساوية في الطرفين.

وذلك تمهيداً لحل المعادلة وإيجاد النتيجة.

ومثال ذلك

المعادلة $x^3+5x+4=4-2x+5x^2$

بالجبر (أي بالنقل) تصبح المعادلة : $x^3+7x+4=4+5x^2$

وبالمقابلة (الحذف والاختزال) تصبح المعادلة $x^3+7x=5x^2$

وعندما ترجم جبرارد الكريموني كتاب الخوارزمي إلى اللاتينية عام ١١٧٠م ترجمه تحت أسم (كتاب الجبر والمقابلة) وظل هذا الاسم متداولاً حتى القرن السادس عشر حين تم اختصار الاسم إلى (الجبر) فقط وأصبح ذلك الاسم هو الاسم المعروف لهذا العلم في جميع اللغات.

وقال الخوارزمي : إن مكونات علم الجبر تدور حول ثلاثة تقادير هي:

الجذور والأموال والأعداد المفردة

فالجذر هو المجهول أو الشيء وهو ما يرمز له حالياً بالرمز x

المال هو كل ما أجتمع من الجذر مضروباً في نفسه أي x^2

والعدد الفرد هو كل ماخلا من الجذر أي العدد الخالي من x أو هو الحد المطلق.

وقد وصف الشاعر والرياضي أبو محمد عبد الله بن حجاج المعروف بابن الياسمين (المتوفي عام ١٢٠٤م) مكونات علم الجبر عند الخوارزمي في أبيات شهيرة ضمنها قصيدته المسماة بالياسمينية في علم الجبر، وهي:

على ثلاثة يدور الجبر المال والأعداد ثم الجذر

فالمال كل عدد مربع وجذره واحد تلك الأضلع

والعدد المطلق ما لم ينسب للمال أو للجذر فأنهم نصب

<u>**أنواع المعادلات الجبرية عند الخوارزمي:**</u>

قسم الخوارزمي المعادلات الجبرية إلى ستة أنواع هي:

١- أموال تعدل جذوراً: وهي بلغتنا المعاصرة $ax^2 = bx$

٢- أمول تعدل عدداً: وهي بلغتنا المعاصرة $ax^2 = c$

٣- جذور تعدل عدداً: وهي بلغتنا المعاصرة $bx = c$

٤- أموال وجذور تعدل عدداً: وهي بلغتنا المعاصرة $ax^2 + bx = c$

٥- أمول وأعداد تعدل جذوراً: وهي بلغتنا المعاصرة $ax^2+c=bx$

٦- أموال تعدل جذوراً وعدداً: وهي بلغتنا المعاصرة $ax^2=bx+c$

حيث a,b,c تأخذ قيماً عددية.

فإذا قيل : مال وواحد وعشرون من العدد يعدل عشرة أجذاره فمعنى ذلك هو المعادلة $x^2+21=10x$ وهكذا.

والأنواع الثلاثة الأولى تسمي المعادلات البسيطة بينما تسمى الثلاثة الأخرى بالمعادلات المركبة.

وقد ذكر أبن الياسمين في قصيدته الياسمينية تلك المعادلات في الأبيات الشعرية الآتية:

فتلك ستة نصفها مركبة	***ونصفها بسيطة مرتبه***
أولها الاصطلاح الجاري	***أن يعدل الأموال بالأجذار***
وإن تكن عادلت بالأعداد	***فهي يليها ما فهم المراد***
وإن تعادل بالجذور عددا	***فتلك تتلوها على ما حددا***
وأعلم هداك ربنا أن العدد	***في أول المركبات إنفرد***
ووحدو أيضاً جذور الثانية	***وافردوا أموالهم في الثالثة***

ومعنى هذا أن المسألة الأولى هي (كما في البيت الثاني): معادلة (أي مساواة) الأموال بالأجذار أي المعادلة $ax^2=bx$، والمسألة الثانية (في البيت الثالث): معادلة الأموال بالأعداد أي المعادلة $ax^2=c$، والمسألة الثالثة (في البيت الرابع): معادلة الجذور بالعدد أي المعادلة $bx=c$، والمسألة الرابعة وهي أول المعادلات المركبة فيها العدد منفرد (في البيت الخامس) وهذا يعني المعادلة $ax^2+bx=c$، والمسألة الخامسة توحيد الجذور أي $ax^2+c=bx$ (كما في البيت الأخير)، والمسألة السادسة إفراد الأموال أي $ax^2=bx+c$ (كما في البيت الأخير أيضاً).

وقد ذكر الخوارزمي الطرق المختلفة (جبرية وهندسية) لحل تلك الأنواع الستة، وقد ذكر كارل فونك في كتابه (المختصر في تاريخ الرياضيات) أن: الخوارزمي قام بحل العادلات الجبرية بطرق هندسية لم يتوصل إليها أحد من قبله وبذلك يمكن اعتباره أول من أستخدم الهندسة في حل المسائل الجبرية.

مثال على حل معادلات الدرجة الثانية عند الخوارزمي:

ومن أمثلة حل الخوارزمي لمعادلات الدرجة الثانية نذكر حله للنوع الخامس $(ax^2 + c = bx)$ حيث أورد المثال التالي:

مال وواحد وعشرون من العدد يعدل عشرة أجذاره.

وبلغتنا المعاصرة يمكن كتابة هذا المثال على صورة المعادلة الآتية:

$$x^2 + 21 = 10x$$

وكان حل الخوارزمي لتلك المسألة كالآتي:

ننصف الأجذار فتكون $(\frac{10}{2} = 5)$ ونضربها في مثلها فتكون خمسة وعشرين ثم ننقص منها الواحد والعشرين فيبقي أربعة ، فنأخذ جذرها وهو اثنان وننقصه من نصف الأجذار وهو خمسة فيبقي ثلاثة وهو جذر المال الذي نريده والمال يكون تسعة، وإن شئت فزد الجذر على نصف الأجذار فتكون سبعة وهو جذر المال الذي نريده (بالجمع) والمال تسعة وأربعون.

وقد وصف ابن الياسمين حل هذا المثال بالأبيات الشعرية الآتية:

واطرح من التربيع في الأخرى العدد وجذر ما يبقي عليه يعتمد
فاطرحه من تنصيفك الأجذارا وان تشأ أجمعته إختيارا
فذاك جذر المال بالنقصان وذاك جذر المال بالجمعان

فالبيت الأول يعني: $\sqrt{4} = 2$, $(\frac{10}{2})^2 - 21 = 4$

والبيت الثاني يعني: $(\frac{10}{2}) + 2 = 7$, $(\frac{10}{2}) - 2 = 3$

والبيت الثالث يعني:أن جذري المعادلة (جذر المال) هما:

(بالجمعان) 7 ، (بالنقصان) 3

وهذا يعني أن الخوارزمي قد استخدم القانون التالي في حل هذا المثال:

في المعادلة $ax^2+c=bx$ يأخذ $a=1$ ، فإن : $x^2+c=bx$ حيث b هو معامل x، c هو الحد المطلق (أي العدد)، فيكون جذر المال:

$$x=(\frac{b}{2})\pm\sqrt{(\frac{b}{2})^2-c}$$

استحالة حل المسائل من الدرجة الثانية عند الخوارزمي:

بعد أن ذكر الخوارزمي المثال السابق نص على الآتي:

"وأعلم أنك إذا نصفت الأجذار في هذا الباب وضربتها في مثلها فكان مبلغ ذلك أقل من العدد فالمسالة مستحيلة، أما إذا كان مثل العدد بعينه فجذر المال يكون مثل نصف الأجذار سواء لا زيادة ولا نقصان"

وقال ابن الياسمين في ذلك:

وإن عدا التربيع مثل العدد فخذه للتنصيف دون فقد

وإن يكن يربو عليه العدد أيقنت أن ذلك لا ينعضد

ومعنى هذه الأبيات أنه إذا كان $c=(\frac{b}{2})^2$ [التربيع $(\frac{b}{2})^2$ يساوي العدد c] فإن $x=\frac{b}{2}$، أما إذا كان $c>(\frac{b}{2})^2$ فإن المسالة تصبح مستحيلة. ومعنى كلام الخوارزمي في ذلك: أنه إذا نصفنا الأجذار وضربناها في مثلها أي إذا حصلنا على $(\frac{b}{2})^2$ وكان $(\frac{b}{2})^2<c$ حيث c العدد فإن المسألة تكون مستحيلة وذلك لأن الكمية تحت الجذر أي الكمية $[(\frac{b}{2})^2-c]$ تكون سالبة، والمسألة كما يقول الخوارزمي تصبح مستحيلة، أما إذا كان $(\frac{b}{2})^2=c$ فإن جذر المال يكون مثل نصف الأجذار أي أن $x=\frac{b}{2}$ سواء لا زيادة ولا نقصان وهو نفس ما قاله ابن الياسمين في أبياته.

قانون الخوارزمي لحل معادلات الدرجة الثانية من النوعين الرابع والسادس:

(i) يمكن كتابة الحالة الرابع من معادلات الخوارزمي بالصورة: $ax^2+bx=c$ ومثال لها المسألة التالية: مالان وعشرة أجذار تعدل ثمانية وأربعون درهما.

وبالرموز الحالية: $2x^2+10x=48$

وقد قام الخوارزمي بحلها كالتالي: نقوم برد المالين إلى مال واحد وذلك بأن نرد كل شئ في المسألة إلى نصفه ويعني ذلك قسمة طرفي المعادلة على 2 فنحصل على المعادلة: $x^2+5x=24$ وصورتها العامة:

$$x^2+bx=c \text{ أي أن } b=5\,,\ c=24$$

وقد استخدم الخوارزمي لحل المسألة القانون التالي [كما ذكر ستروبك في كتابه(مصادر تاريخية في الرياضيات)]:

$$x=\sqrt{(\frac{b}{2})^2+c}-(\frac{b}{2})=\sqrt{(\frac{5}{2})^2+24}-(\frac{5}{2})=\sqrt{\frac{121}{4}}-\frac{5}{2}=\frac{11}{2}-\frac{5}{2}=3$$

(ii) أما الحالة السادسة فصورتها: $ax^2=bx+c$، وأورد الخوارزمي عليها المثال الآتي: مال يعدل ثلاثة أجذاره وأربعة من العدد، وبالرموز المعاصر: $x^2=3x+4$

وصورتها العامة: $x^2=bx+c$ أي أن: $b=3\,,\ c=4$

وقد استخدم الخوارزمي لحل المسألة القانون التالي:

$$x=\sqrt{(\frac{b}{2})^2+c}+(\frac{b}{2})=\sqrt{(\frac{3}{2})^2+4}+\frac{3}{2}=\sqrt{6.25}+1.5=2.5+1.5=4$$

ويلاحظ الآتي على هذين النوعين من المعادلات:

(i) أن القانونين المستخدمين يعطيان فقط الجذر الموجبة لكل معادلة.

(ii) أن الحالة الرابعة يمكن كتابتها بالصورة:

$ax^2=-bx+c$ وحلها $x=\sqrt{(\frac{b}{2})^2+c}-\frac{b}{2}$

والحالة السادسة وصورتها: $ax^2=bx+c$ وحلها $x=\sqrt{(\frac{b}{2})^2+c}+\frac{b}{2}$

فيمكن جمعهما في علاقة واحدة هي: $x=\sqrt{(\frac{b}{2})^2+c}\pm\frac{b}{2}$

ج- إنجازات العلماء العرب والمسلمين في علم الجبر بعد الخوارزمي:

من تلك الانجازات نذكر إنجازات العلماء الآتية أسماؤهم:

(١) أبو الحسن ثابت بن قرة الحراني (٨٣٥-٩٠١م)

الذي توصل في كتابه (تصحيح مسائل الجبر بالبراهين الهندسية) إلى أول حل لمعادلات الدرجة الثالثة التي صورتها $x^3+ax=cx^2$ باستخدام الطرق الهندسية، وقد ذكر ذلك روس بول في كتابه (مختصر تاريخ الرياضيات)، وأضاف بأن طريقة كاردانو (١٥٠١-١٥٧٦) الذي جاء بعد ثابت بنحو سبعة قرون، لحل تلك المعادلات كانت تشبه طريقة ثابت إلى حد كبير، وربما أطلع كاردانو على كتاب ثابت المذكور مما أوحى له طريقة الحل المنسوبة إليه حالياً.

(٢) أبو كامل شجاع بن أسلم الحاسب المصري (٨٥٠-٩٣٠م)

الذي أضاف إلى أعمال الخوارزمي إضافات كثيرة ضمنها كتابه (كمال الجبر وتمامه والزيادة في أصوله) حيث شرح أبو كامل كتاب الخوارزمي وأوضح مقاصده وزاد عليه الكثير مما لم يتطرق إليه الخوارزمي، وفي ذلك يقول لويس كاربينسكي في كتابه (تاريخ العلم): إن أبو كامل المصري كان وحيد عصره في حل المعادلات والمسائل الجبرية، وفي كيفية استعمالها لحل المسائل الهندسية. ويذكر أن أبو كامل قام في كتابه المذكور بحل الكثير من المسائل الرياضية بطرية مبتكرة لم يسبقه إليها أحد، وكان بذلك أول من شرح المعادلات الجبرية التي تزيد درجتها عن الثانية، وقام بحل الكثير منها.

وقد أشتمل كتاب (كمال الجبر وتمامه) على حلول لمعادلات جبرية تحوى جذور صماء وأعطي أمثلة على ذلك نذكر منها المثال الآتي:

المعادلة $4\sqrt{x-3\sqrt{x}}=(x-3\sqrt{x})+4$، وقد قام أبو كامل بحلها بالتعويض $y^2=x-3\sqrt{x}$ وبذلك كان: $4y=y^2+4$، ومنها نحصل على: $y^2-4y+4=0$ وهي معادلة من الدرجة الثانية حلها هو:

$$y=\frac{-(-4)+\sqrt{16-16}}{2}=\frac{4}{2}=2$$

وبالتالي يكون: $x-3\sqrt{x}=4$، وعليه فإن $x=16$.

(٣) <u>أبو بكر محمد الكرخي الحاسب (٩٧١-١٠٣٠)</u>

الذي أورد في الجزء الثاني من كتابه (الفخري في الجبر والقابلة) حوالي ٢٥٠ مسالة عملية تؤدي في حلها إلى معادلات جبرية من الدرجات الأول والثانية والثالثة، كما ذكر في كتابه (البديع في الجبر والمقابلة) أنواع لم يتم التطرق إليها من قبل من المعادلات غير المعينة (أو السيالة) في أكثر من متغير (x,y,z) وأوجد لها حلولاً مختلفة.

<u>قاعدة الإشارات في العمليات الجبرية عند الكرخي:</u>

ويذكر للكرخي أنه في كتابه (الكافي في الحساب) قد أورد قواعد لضرب الإشارات، مثبتا بطرق جبرية أن:

ضرب الناقص في الزائد ناقص وفي الناقص زائد، وإذا نقصنا عددا ناقصا من ناقص أكثر منه بقي تفاضلهما (أي الفرق بينهما)، ناقصاً، وإذا كان الناقص أقل من المنقوص بقي تفاضلهما زائداً، وإذا نقصنا الناقص من الزائد بقي مجموعهما زائداً، وإذا نقصنا زائداً من مرتبه خاليه (أي من الصفر) بقي فيها ذلك العدد بعينه ناقصاً، وإذا نقصنا الناقص من مرتبة خاليه بقي فيها ذلك العدد زائداً.

ويلاحظ أن تلك القواعد للإشارات هي المعمول بها حالياً في العمليات الحسابية والجبرية.

<u>قاعدة استخراج الجذر التربيعي لكمية جبرية عند الكرخي:</u>

ومن إنجازات الكرخي أيضاً طريقته في استخراج الجذر التربيعي لكمية جبرية والتي ذكرها في كتابه (البديع في الحساب) وأثبتها بعده السموأل بن يحيى المغربي (المتوفي عام ١١٧٤م) في كتابه (الباهر في الجبر)، ونورد هنا هذه الطريقة على صورة قاعدة لاستخراج الجذر التربيعي لكمية جبرية مكونه من خمسة حدود مرتبه بقوي متناقصة أو متزايدة للكمية الجبرية x، والمثالان الآتيان يوضحان تلك القاعدة:

$$\text{(i)}\ \sqrt{x^8+2x^6+11x^4+10x^2+25}$$
$$=\sqrt{x^8}+\sqrt{25}+\sqrt{11x^4-2(\sqrt{x^8}\cdot\sqrt{25})}$$
$$=x^4+5+\sqrt{11x^4-2(5x^4)}=x^4+5+\sqrt{x^4}=x^4+x^2+5$$

وللتحقق من ذلك عدديا، نفرض أن $x=1$ فيكون الجذر مساوياً:

$$\sqrt{1+2+11+10+25}=\sqrt{49}=7$$
$$x^4+x^2+5=1+1+5=7$$

$$\text{(ii)}\ \sqrt{x^8+4x^6+8x^4+8x^2+4}$$
$$=\sqrt{x^8}+\sqrt{4}+\sqrt{8x^4-2(\sqrt{x^8}\cdot\sqrt{4})}$$
$$=x^4+2+\sqrt{8x^4-4x^4}=x^4+2x^2+2$$

وللتحقق من ذلك عددياً، نفرض أن $x=1$ فيكون الجذر مساوياً:

$$\sqrt{1+4+8+8+4}=\sqrt{25}=5\quad,\quad x^4+2x^2+2=1+2+2=5$$

(٤) أبو الفتح عمر الخيام (١٠٤٨-١١٣١م)

عرف عمر الخيام برباعياته الشعرية التي كتبها بالفارسية وترجمت إلى العربية أكثر من ترجمة، كما ترجمت إلى اللغة الإنجليزية بواسطة الكاتب الإنجليزي إدوارد فتزجيرالد عام ١٨٥٩م ومن هنا عرف الغرب الخيام كشاعر مرموق.

أما الخيام كعالم رياضي فهو أقل شهرة منه كشاعر، ولكنه في الحقيقة عالم رياضي كبير أثرى علم الجبر بمؤلفاته ومنها كتابه (توضيح مسائل في الجبر والمقابلة) الذي أورد فيه الصور المختلفة لمعادلات الدرجة الثانية والثالثة مرتبة ترتيباً دقيقاً طبقاً لعدد الحدود التي تشتمل عليها تلك المعادلات، وبذل جهداً عظيماً في حل تلك المعادلات، والخيام هو أول من حل معادلة الدرجة الثالثة التي صورتها $x^3+b^2x+c^3=ax^2$ بطرق هندسية وصفها إريك بول في كتابه (تطور تاريخ الرياضيات) بأنها طريقة بديعة وصل فيها الخيام إلى درجة من النضج الرياضي لم يسبقه إليه أحد.

ويذكر للخيام أيضاً أنه أول من حل معادلات الدرجة الرابعة بطرق تحليلية وهندسية قبل أن يتوصل إليها فراري(١٥٢٢-١٥٦٥) عام ١٥٤٥ بنحو خمسة قرون.

أيضاً فإن الخيام هو أول من بحث في نظرية ذات الحدين بأس صحيح موجب كما ذكر أكثر من مرجع في تاريخ الرياضيات.

حل معادلات الدرجة الثالثة عند الخيام:

أورد الخيام في كتابه (الجبر والمقابلة) ما مجموعه خمسة وعشرون معادلة صنفها إلى مفردات ومقترنات، فالمفردات عددها ستة وهي تؤول إلى معادلات من الدرجة الأولى والثانية وهي:

عدد يعدل جذراً أي $x=c$ ، عدد يعدل مالاً أي $x^2 = c$

عدد يعدل كعباً أي $x^3=c$ ، جذور تعدل مالاً أي $x^2 = bx$

أموال تعدل كعباً أي $x^3=ax^2$ ، جذور تعدل كعباً أي $x^3 = bx$

والكعب هو مكعب الشئ أي x^3.

أما المقترنات فمنها ثلاثية (تشمل على ٣ حدود) ومنها رباعية (تشمل على ٤ حدود) وعددها تسعة عشرة معادلة نذكر منها المعادلات الآتية:

(١) مال وجذور تعدل عدداً أي $x^2 + bx = c$

(٢) مال وعدد يعدل جذوراً أي $x^2 + c = bx$

(٣) جذور وعدد تعدل مالاً أي $x^2 = bx + c$

(٤) كعب وجذور تعدل عددا أي $x^3 + bx = c$

(٥) كعب وعدد يعدل جذوراً أي $x^3 + c = bx$

(٦) جذور وعدد تعدل كعباً أي $x^3 = b + c$

(٧) كعب وأموال تعدل عدداً أي $x^3 + ax^2 = c$

(٨) كعب وعدد تعدل أموالاً أي $x^3 + c = ax^2$

(٩) عدد وأموال يعدل كعباً أي $x^3 = ax^2 + c$

(١٠) كعب وأموال وجذور تعدل عدداً أي $x^3 + ax^2 + bx = c$

(١١) كعب وجذور وعدد تعدل أموالاً أي $x^3 + bx + c = ax^2$

(١٢) كعب وأموال تعدل جذوراً وعدداً أي $x^3 + ax^2 = bx + c$

(١٣) كعب وجذور تعدل أموالاً وعدداً أي $x^3 + bx = ax^2 + c$

(١٤) كعب وأموال وعدد تعدل جذوراً أي $x^3 + ax^2 + c = bx$

(١٥) كعب يعدل جذوراً وأموالاً وعدداً أي $x^3 = ax^2 + bx + c$

وقد قام الخيام بحل معظم تلك المعادلات بطرق هندسية متطورة استخدم فيها تقاطع دائرة مع قطع مكافئ وتقاطع قطع مكافئ مع قطع زائد وتقاطع دائرة مع قطع زائد وتقاطع قطعين زائدين، وبإيجاد نقط التقاطع يمكن إيجاد قيم x، وأوضح الخيام أن بعض المسائل في تلك المعادلات ليس لها جذر موجب فتكون مستحيلة الحل وذلك لظهور جذر لعدد سالب، ومثال لذلك المعادلات رقم(٥) حيث أوضح الخيام أن بعض مسائل هذا النوع من المعادلات ليس لها حل موجب، وكذلك المعادلات رقم(١١) والمعادلات رقم(١٤).

وجدير بالذكر أن شرف الدين الطوسي (١١٣٥-١٢١٣م) في رسالته حول المعادلات عام ١١٧٠م قام بتصنيف المعادلات التي أوردها الخيام إلى معادلات لها حل موجب ومعادلات مستحيلة (ليس لها جذر موجب). والمعادلات من النوع الثاني عددها خمسة هي:

$$x^3 + c = bx \quad , \quad x^3 + c = ax^2$$

$$x^3 + bx + c = ax^3 \quad , \quad x^3 + ax^2 + c = bx$$

$$x^3 + c = ax^2 + bx$$

وقام الطوسي بحل أمثلة للمعادلات من النوع الأول مثل:

(i) $x^3 + x = 2$ $\qquad [x^3 + bx = c]$

(ii) $x^3 = x + 6$ $\qquad [x^3 = bx + c]$

(iii) $x^3 + x^2 = 2$ $\qquad [x^2 + ax^2 = x]$

وأثبت استحالة الحل لبعض أمثلة من معادلات النوع الثاني مثل:

(i) $x^3+1=x^2$ $\quad [x^3+c=ax^2]$

(ii) $x^3+4=3x$ $\quad [x^3+c=bx]$

وللرجوع إلى تلك الحلول أنظر الجبر والهندسة في القرن الثاني عشر – رشدي راشد – بيروت ١٩٩٨.

<u>**مثال**: حل الخيام للمعادلة</u> $x^3+bx=c$

استخدم الخيام في الحل تقاطع دائرة مع قطع مكافئ كالتالي:

بأخذ $b=a^2$ تصبح المعادلة $x^3+a^2x=c$ وبضرب طرفي المعادلة في x نحصل على: $x^4+a^2x^2=cx$ وبقسمة الطرفين على a^2 نحصل على:

$$\frac{x^4}{a^2}=\frac{c}{a^2}x-x^2=x(\frac{c}{a^2}-x)$$

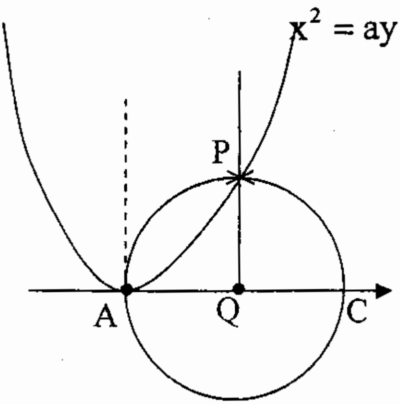
فإذا فرضنا أن: $y^2=x(\frac{c}{a^2}-x)=x(\frac{c}{b}-x)$ وهي معادلة دائرة نصف قطرها يساوي $\frac{c}{b}$ أو $\frac{c}{a^2}$، وإذا فرضنا أن $\frac{x^4}{a^2}=y^2$ فإن $x^4=a^2y^2$ ← $x^2=ay$ وهي معادلة قطع مكافئ.

إذاً يمكن حل المعادلة $x^3+bx=c$ [أو $x^3+a^2x=c$] باستخدام تقاطع الدائرة التي نصف قطرها $(\frac{c}{a^2})$ والقطع المكافئ $x^2=ay$

وتكون خطوات الحل كالآتي:

(١) نرسم القطع المكافئ $x^2=ay$

(٢) نرسم الدائرة التي نصف قطرها $AC=\frac{c}{a^2}$ على محور x (الأفقي)



(٣) لتكن نقطة P هي نقطة تقاطع الدائرة مع القطع، فيرسم العمود من P على الأفقي (محور x) ليقابله عند Q فيكون حل المعادلة التكعيبية هو AQ (الأحداثي السيني لنقطة التقاطع P).

وبأخذ الحالة الخاصة: عندما $c = 2$ ، $b = a^2 = 1$ نحصل على المعادلة التكعيبية $x^3 + x = 2$ ويكون $AC = \frac{c}{b} = \frac{2}{1} = 2$ وأيضاً:

$$AQ = 1 , PQ = 1$$

أي أن حل المعادلة التكعيبية $x^3 + x = 2$ هو العدد الحقيقي الموحد $AQ = x = 1$ ، وتختلف النتيجة بإعطاء b,c قيم أخرى.

[المصدر: موقع ماك توتر لتاريخ الرياضيات – جامعة سانت أندروز باسكتلندا – تحت عنوان: Khayyam's Construction for solving a Cubic Equation

(٥) <u>أبو عبد الله محمد بن بدر الأشبيلي (١٢٦٠-١٣٢٥م):</u>

العالم الرياضي الأندلسي، وقد ذكر في كتابه (اختصار الجبر والمقابلة) الذي كتبه حوالي عام ١٣٠٠م وطبع في مدريد باسبانيا عام ١٩١٦م، المعادلات الجبرية المختلفة وطرق حلها تحليلياً وهندسياً، ثم درس المتواليات وأوجد قانونا لمجموع حدود متوالية عددية بطريقة تشبه إلى حد كبير الطريقة المستخدمة حالياً لإيجاد هذا المجموع.

فقد قال ابن بدر في ذلك:

" إذا تفاضلت الأعداد بعدة معلومة فاضرب التفاضل في عدة الأعداد إلا واحد، فما بلغ فاحمل عليه أول الأعداد، ويكون ذلك آخر الأعداد، ثم أجمل عليه أول الأعداد واضربه في نصف العدة يكون ذلك هو المطلوب" .

والمقصود بتفاضل الأعداد: الفرق بين كل عددين متتالين، والمقصود بعدة الأعداد هو عدد الأعداد أو عدد حدود المتوالية، وكمثال لذلك:

لإيجاد مجموع الأعداد $1,3,5,7,9,11,...$ إلى عشرة حدود إتبع ابن بدر الخطوات الآتية:

١- تفاضل الأعداد هو: $3-1=2$، عدة الأعداد $=10$، أول الأعداد $=1$

٢- آخر الأعداد هو: $2\times(10-1)+1=19$

٣- آخر الأعداد + أول الأعداد هو : $19+1=20$

٤- المطلوب (مجموع الأعداد) هو: $20\times(\frac{10}{2})=100$

ومن هذا يتضح أن ابن بدر عرف القانونين الآتيين:

لتكن: $a, a+r, a+2r, \cdots$ إلى عدد n من الحدود،متوالية عددية عدد حدودها n فإن:

١- الحد الأخير (ℓ) يكون: $\ell=a+(n-1)r$

٢- مجموع الحدود (s) يكون: $s=\frac{n}{2}(a+\ell)$

وقد ذكرهما بصورة لفظية كما رأينا وذلك كعادة علماء الجبر في تلك الفترة.

(٦) **غياث الدين جمشيد الكاشي (١٣٨٠-١٤٣٦م):**

الذي أوجد قانوناً لمجموع الأعداد الطبيعة المرفوعة للقوة الرابعة، وهو أيضاً أول من عمم نظرية ذات الحدين في صورتها التي وضعها الخيام لأي أس صحيح موجب إلى أي أس حقيقي (كسر أو عدد صحيح موجب أو سالب) وهو التعميم الذي نسب إلى العالم الإنجليزي اسحق نيوتن (١٦٤٢-١٧٢٧م) بعد ذلك بنحو ثلاثة قرون.

طريقة الكاشي في حساب معاملات ذات الحدين:

تناول الكاشي في الباب الخامس من المقالة الأولة في كتابه (مفتاح الحساب) الذي ألفه عام ١٤٢٩م نظرية ذات الحدين، ومهد لها بإعطاء المفكوكات:

$$(a+1)^2, (a+1)^3, (a+1)^5$$

وأورد في كتابه هذا معاملات المفكوكات حتى القوة التاسعة، كما أنه شرح كيفية إيجاد هذه المعاملات، وبين الكاشي كيفية حساب الفرق بين $(a+1)^n$ و a^n أي إيجاد $[(a+1)^n-a^n]$ وهي الكمية الجبرية التي يحتاج إليها في حساب القيم

التقريبية للجذور، ويسوق الكاشي أمثلة عددية للتدليل على طريقة الحساب، نذكر منها المثال الآتي:

$$5^5 - 4^5 = [(4+1)^5 - 4^5]$$
$$= (5\times 4^4 + 10\times 4^3 + 10\times 4^2 + 5\times 4 + 1)$$
$$= 2101$$

وابتكر الكاشي قاعدة عامة لنظرية ذات الحدين لأي أس صحيح وطبقها في عدة حالات.

فمثلاً في حالة $n = 4$:

$$(x+y)^4 = [x^4 + 4x^3y + \frac{4\cdot 3}{2}x^2y^2 + \frac{4\cdot 3\cdot 2}{2\cdot 3}xy^3 + y^4]$$

وبمقارنتها بمفكوك ذات الحدين لأي أس حقيقي والمنسوبة إلى نيوتن:

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\times 3}x^{n-3}y^3 + \cdots + y^n$$

نجد أن نيوتن لم يزد على تعميم الكاشي لذات الحدين أي إضافة جديدة، مما حدا بالدكتور دريك سترويك في كتابه (مصادر الرياضيات خلال الفترة ١٢٠٠-١٨٠٠م) والذي خصص جزء كبير منه لإسهامات العرب والمسلمين في تقدم الرياضيات، إلى القول:

"إن الكاشي هو أول من فكر في مفكوك ذات الحدين وإليه يرجع الفضل في تطوير خواص معاملاتها"

الكاشي ومعادلات الدرجة الرابعة:

أهتم الكاشي في كتابه (مفتاح الحساب) بمعادلات الدرجة الرابعة وقام بوضع حلول هندسية متقدمة لها هي في أغلب الحالات نتيجة تقاطع القطوع المخروطية، ووضع الكاشي خمسة وستون شكلا من أشكال تلك المعادلات، نذكر منها:

$ax^4 = c$,	$ax^4 = bx$,	$ax^4 = dx^2$, $ax^4 = ex^3$
$ax^4 = bx + c$,	$ax^4 = dx^2 + c$,	$ax^4 = ex^3 + c$
$ax^4 + dx^2 = c$,	$ax^4 + bx = dx^2$,	$ax^4 + bx = ex^3$
$ax^4 = ex^3 + dx^2 + bx$,	$ax^4 = ex^3 + dx^2 + c$,	$ax^4 + ex^3 = bx + c$

وهكذا...

ونذكر هنا أن ابن البناء المراكشي (١٢٥٦-١٣٢١) كان قد قام بوضع عدد من الحلول الجبرية لبعض تلك المعادلات في كتابه (الجبر والمقابلة) قبل الكاشي بنحو مائة عام، ومن تلك المعادلات نذكر المعادلة $x^4 + 2x^3 = x + 30$ [وصورتها العامة: $ax^4 + ex^3 = bx + c$]، كما أن الحسن بن الهيثم (٩٦٥-١٠٣٩م) قد قام بحل المعادلة: $x^4 + x^3 = 3x^2 + x$ [وصورتها العامة: $ax^4 + ex^3 = dx^2 + bx$] والمعادلة $x^4 + 6x = 3x^2 + 2$ [وصورتها العامة $ax^4 + bx = dx^2 + c$] في كتابه (تحليل المسائل العددية بجهة الجبر والمقابلة مبرهناً) وذلك قبل ابن البناء المراكشي وقبل غياث الدين الكاشي.

<u>ملاحظة</u>: كان العرب يسمون x (مرفوعة للقوة 1) بالجذر أو الشئ، ويسمون x^2 (مرفوعة للقوة 2) بالمال (أي مربع الجذر)، ويسمون x^3 (مرفوعة للقوة 3) بالكعب (مكعب الشئ)، ويسمون x^4 (مرفوعة للقوة 4) بمال مال $(x^2 \cdot x^2)$ ويسمون x^5 بمال كعب $(x^2 \cdot x^3)$ ويسمون x^6 بكعب كعب $(x^3 \cdot x^3)$ ويسمون x^7 بمال مال كعب $(x^2 \cdot x^2 \cdot x^3)$ ويسمون x^8 بمال كعب كعب $(x^2 \cdot x^3 \cdot x^3)$ ويسمون x^9 بكعب كعب كعب $(x^3 \cdot x^3 \cdot x^3)$ ويسمون x^{10} بمال مال كعب كعب $(x^2 \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot x^3)$ ويسمون x^{11} بمال كعب كعب كعب $(x^2 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot x^3)$ ويسمون x^{12} بكعب كعب كعب كعب $(x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot x^3)$.

٧- **جهود العلماء العرب في المتواليات:**

نظر العلماء العرب والمسلمين في عصر حضارتهم الزاهرة في موضوع المتواليات فأبدع الكثير منهم، وقاموا بإنجازات هامة منها وضعهم لقوانين إيجاد مجموع المتواليات وإيجاد الحد العام للمتوالية، والعلاقة بين المتواليات العددية والهندسية، كما اخترعوا أنواعاً خاصة من المتواليات العددية، ونعطي فيما يلي نبذة مختصرة عن بعض تلك الإنجازات.

(١) كان أبو بكر الكرخي الحاسب (٩٧١-١٠٢٩م) هو أول من بحث في المتواليات من العلماء العرب وذلك في كتابه (البديع في الحساب) حيث وضع متوالية عددية أساسها غير الواحد وصورتها:

$$a, a+r, a+2r, a+3r, \dots$$

واستنتج أن الحد العام لها هو:

$$\ell = a + (n-1)r$$

وأن مجموع n من حدودها هو:

$$S = \frac{1}{2}n[2a + (n-1)r] = \frac{n}{2}[a + \ell]$$

وتعرف هذه المتوالية بمتوالية الكرخي، وقد استخدمها ابن بدر بعد ذلك في كتابه (اختصار الجبر والمقابلة)، الذي كتبه حوالي عام ١٣٠٠م.

ومن استنباطات الكرخي الطريفة في موضوع المتواليات نذكر الآتي:

أ- مجموع الأعداد المكعبة في متوالية طبيعية [تبدأ بالواحد والفرق بين كل عدد والذي يليه يكون دائماً الواحد] يساوي مجموع تلك الأعداد مربعاً، أي أن:

$$(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$

فمثلاً بأخذ $n = 5$ فإن:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2$$

أي أن:

$$1+8+27+64+125=(15)^2 \rightarrow 225 = 225$$

وهذا يعني أن الطرف الأيسر = الطرف الأيمن، إذاً فالمتوالية صحيحة.

ب- ومنها أيضا المتوالية الآتية:

$$5\times5+4\times6+3\times7+2\times8+1\times9=5^3-(1^2+2^2+3^2+4^2)$$

وهذا يعني أن : $25+24+21+16+9=125-(1+4+9+16)$

أي أن $95=125-30=95$

وهذا يعني أن الطرف الأيسر يساوي الطرف الأيمن أيضاً، وإذاً فالمتوالية صحيحة.

(٢) ومن المعاصرين للكرخي نذكر العالم العربي الكبير أبو علي الحسن بن الهيثم (٩٦٥-١٠٣٩م) الذي ولد في البصرة ونشأ وتعلم بها ثم أكمل بقية حياته في القاهرة في عهد الخليفة الحاكم بأمر الله وتوفي هناك.

وله العديد من المؤلفات في الرياضيات وخاصة في الهندسة، وكان مهتما بالمسلمة الخامسة لإقليدس (مسلمة التوازي) وله فيها عدة رسائل، وفي رسالته (مساحة المجسمات المكافئة) وقام ابن الهيثم بحساب حجم الجسم الناتج من دوران قطعة قائمة من قطع مكافئ حول محور عمودي على محور تماثلها، وقد أولى ابن الهيثم اهتماماً كبيراً لحساب المتواليات حيث توصل إلى مجموع المتواليات للأس الثاني والثالث والرابع للأعداد الطبيعية وهي كالآتي:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3=[\frac{n(n+1)}{2}]^2$$

$$1^4+2^4+3^4+4^4+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

وقد توصل ابن الهيثم لإثبات هذه العلاقات بطريقة الاستنتاج (الاستقراء) الرياضي كما توصل إليها في نفس الوقت أبو بكر الكرخي، ثم توصل إليها السموأل بن يحي المغربي بعد ذلك بأكثر من مائة عام وذلك في كتابه (الباهر في الجبر).

(٣) وفي المقالة الثانية من كتاب (الباهر في الجبر) للسموأل بن يحي المغربي (١١٢٥-١١٧٤م)، مهد السموأل إلى نظرية ذات الحدين وذلك بإعطاء المفكوكات التالية وكذا براهينها الهندسية:

(أ) الحدود المربعة: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

(ب) الحدود المكعبة: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

(ج) الحدود المرفوعة للقوه الرابعة:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

(د) الحدود المرفوعة للقوة الخامسة:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

وأشار السموأل إلى القاعدة التي وضعها أبو بكر الكرخي لحساب معاملات المفكوك لأي قوة حيث أورد جدولا على شكل مثلث فيه معاملات مفكوك $(a+b)^n$ لقيم n من n=1 إلى n=12 وأطلق على هذا المثلث اسم مثلث الكرخي ، وإن كان المؤرخون في الغرب ينسبونه إلى العالم الفرنسي بليز باسكال (١٦٢٣-١٦٦٢) الذي جاء بعد الكرخي بأكثر من ستة قرون فيطلقون عليه اسم مثلث باسكال.

وقد ذكر نصير الدين الطوسي (١٢٠١-١٢٧٤) في كتابه (جوامع الحساب) مثلث الكرخي لمعاملات ذات الحدين واستعمله بطريقة تدل على أن هذا المثلث كان شائع الاستعمال لدى علماء العرب والمسلمين في ذلك الوقت.

ومن قبل الطوسي فإن عمر الخيام (١٠٤٨-١١٣١) ذكر مثلث الكرخي أيضاً واستخدمه في رسالته في (البراهين على مسائل الجبر والمقابلة) والتي ترجمت بواسطة العالم الألماني ويبكه ونشرت في باريس عام ١٨٥١، حيث قام الخيام فيها بحساب معاملات ذات الحدين لأية قوة إختيارية، وفي ذلك يقول جوليان كوليدج في كتابه (رياضيات الهواة العظام) أن عمر الخيام قد كتب مصنفا في الجبر لو أنه وجد من قبل لأعطى الفضل إليه في تطوير نظرية ذات الحدين الذي ينسب إلى نيوتن.

نبذه عن مثلث الكرخي:

أشار عدد من علماء تاريخ الرياضيات في الغرب إلى أن العالم العربي السموأل بن يحيى المغربي هو الذي أكتشف نظرية ذات الحدين عام ١١٥٠م في كتابه (الباهر في الجبر) حيث أعطى مفكوكات ذات الحدين حتى القوة الخامسة بالصورة الآتية مع ملاحظة المعاملات في كل مفكوك على الجانب الأيمن:

$$(a+b) = a+b \rightarrow 1,1$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \rightarrow 1,2,1$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \rightarrow 1,3,3,1$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \rightarrow 1,4,6,4,1$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^3 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \rightarrow 1,5,10,10,5,1$$

وذكر السموأل أن أبو بكر الكرخي قد أورد معاملات مفكوكات ذات الحدين حتى القوة 12 أي في مفكوك $(a+b)^{12}$، وأن تلك المعاملات يمكن ترتيبها على شكل مثلث يمكن تسميته بمثلث الكرخي (ويعرف حالياً في المراجع الغربية بمثلث باسكال) وصورته هي [حتى $n=6$]:

	1						
$n=1$	1	1					
$n=2$	1	2	1				
$n=3$	1	3	3	1			
$n=4$	1	4	6	4	1		
$n=5$	1	5	10	10	5	1	
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1

حيث مفكوك $(a+b)^6$ يعطي بالعلاقة:

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

ومعاملاته هي: $(1, 6, 15, 20, 15, 6, 1)$

(٤) أما الرياضي الأندلسي يعيش بن إبراهيم الأموي (المتوفي عام ١٣٨٠م) فقد تناول في كتابه (مراسم الانتساب في معالم الحساب) المتواليات بصورة تفصيلية حيث ذكر ثلاثة أنواع من المتواليات هي:

أ- **المتواليات الصاعدة:**

وأعطى الأموي القاعدتين الآتيتين لإيجاد مجموع تلك المتواليات:

$$\text{(i)}\ 1\times 2+2\times 3+\cdots+n(n-1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$\text{(ii)}\ 2\times 4+4\times 6+\cdots+2n(2n+1)=\frac{4}{3}n(n+1)(n+2)$$

ب- **متواليات الأعداد المثلثة والأعداد المربعة:**

أما متوالية الأعداد المثلثة فهي:

$$1+3+6+10+15+21+\cdots$$

وذكر الأموي أن حدها العام هو: $\ell=\frac{1}{2}n(n+1)$

وأن مجموع n من حدودها هو: $s=\frac{1}{6}n(n+1(n+2)$

وأما متوالية الأعداد المربعة فهي: $1+4+9+16+\ldots$

وذكر الأموي أن حدها العام هو: $\ell=n^2$

وأن مجموع n من حدودها هو: $s=\frac{1}{6}n(n+1(n+2)$

ج- **متوالية الأعداد الهرمية:**

وهي متوالية صورتها

$$1,\ 3+r\ ,\quad 6+4\,r\ ,\quad 10+10\,r,\ldots$$

ونحصل عليها من المتوالية:

$$1\ ,\ 2+r\ ,\ 3+3\,r\ \ ,\ 4+6\,r,\ldots$$

وذلك بأخذ الحد الأول ثم الحد الأول+ الثاني ثم الحد الأول+ الثاني+ الثالث...، وهكذا

وقد بين الأموي أن الحد العام في هذه المتوالية هو:

$$\ell=\frac{1}{6}n(n+1)[3+(n-1)r]$$

وأن مجموع n من حدودها هو:

$$s=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)[4+(n-1)r]$$

(٥) وأعطى الرياضي الجزائري الأصل **ابن حمزة المغربي (١٥١٥-١٥٧٣م)** في كتابه (تحفة الأعداد لذوي الرشد والسداد)، وهو الكتاب الذي مهد فيه ابن حمزة لاكتشاف اللوغاريتمات كما أثبت ذلك قدري طوقان في كتابه (تراث العرب العلمي في الرياضيات)، نظرية بين فيها العلاقة بين المتواليات العددية والمتواليات الهندسية، وأعطى لها المثال العددي الآتي:

في المتوالية العددية ...1,2,3,4,5,6

وفي المتوالية الهندسية (التي تبدأ بالواحد الصحيح) ...1,2,4,8,16,32

إذا أخذنا العدد 16 في المتوالية الهندسية ويقابله في المتوالية العددية العدد 5 وإذا أخذنا الحدين الذين حاصل ضربهما = 16 وهما 2,8 لوجدنا أن العدد 2 في المتوالية الهندسية يقابله العدد2 في المتوالية العددية والعدد 8 في المتوالية الهندسية يقابله العدد 4 في المتوالية العددية، وعلى هذا فإن: $1-(4+2)=5$

٨- **الانتقال إلى المرحلة الرمزية في الجبر:**

كان **أبو الحسن علي القلصادي (١٤١٢-١٤٨٦)** هو أول من استخدم الرموز الجبرية في تاريخ الرياضيات وهو بذلك ينهي مرحلة هامة في تاريخ الجبر هي مرحلة الصور الكلامية حيث كانت المسائل الجبرية تكتب هي وحلولها بكلمات وألفاظ ويؤسس المرحلة التالية وهي المرحلة الرمزية حيث استخدمت الرموز للتعبير عن الكميات المختلفة الداخلة في تكوين المعادلات الجبرية.

لقد رمز القلصادي للمجهول(x) بالحرف الأول من كلمة شئ (ش) ولمربعة (x^2) بالحرف الأول من كلمة مال (م) ولمكعبه (x^3) بالحرف الأول من كلمة كعب (ك) وللجذر بالحرف الأول من كلمة جذر (جـ) ولعلامة المساواة بالحرف (ل) وهو الحرف الأخير من فعل (عادَل)، أما علامة الجمع عند القلصادي فكانت عطفاً بلاو.

وكمثال لاستخدام تلك الرموز كتابة المعادلة ٥س^{٢}=١٢س+٢٤ بالصورة: ٥^{م} ل ١٢^{ش} ٢٤ والمعادلة ٢س^{٣}+٤س^{٢} +٦=٣س كانت تكتب بالصورة: ٢^{ك}٤^{م} ٦ ل ٣^{ش} وهكذا.

وفتح القلصادي بذلك الباب أمام علماء الغرب لاستخدام الرموز في الجبر وتطويرها حتى وصلوا بها إلى الرموز المستخدمة حالياً، ومن هؤلاء العلماء نذكر:

أ- **الايطالي باسيولي (١٤٤٥-١٥٠٩م):** الذي وضع كتاباً اسماه (الملخص) لخص فيه موضوعات الرياضيات المعروفة حتى عصره مستخدما المؤلفات العربية المترجمة في تلك الموضوعات، واستخدم باسيولي رموزاً للدلالة على مكونات المعادلات الجبرية.

ب- **الألماني ستيفل (١٤٨٦-١٥٦٧):** الذي استخدم في كتاب نشره عام ١٥٤٤ الرموز (+،-) للدلالة على الجمع والطرح والرمز $\sqrt{\ }$ للدلالة على الجذر.

ج- **الفرنسي فييت (١٥٤٠-١٦٠٣):** أول من استخدام الحروف (x,y,z,...) للدلالة على المجاهيل والحروف (a,b,c,...) للدلالة على الثوابت وذلك، في كتابه الشهير (مقدمة لفن التحليل) عام ١٥٩٠، ويعتبر أول عمل ينشر في الجبر يستخدم تلك الرموز مما حدا بعلماء تاريخ الرياضيات أن يعتبرون فييت المؤسس لعلم الجبر الحديث أي الجبر المبني على استخدام الرموز.

(٤) **تطور البحث في المعادلات الديوفانتيه (الجبر الديوفانتي) – نظرية فيرما:**

أ- تعرف المعادلات الديوفانتيه أو السيالة أو غير المعينة بأنها معادلات يقل عددها عن عدد المجاهيل الواردة فيها، وبالتالي قد يكون لها عدد كبير من الحلول الممكنة وهي حلول عددية صحيحة.

وقد كان فيثاغورث (٥٧٢-٤٩٧ق م.) أول من حل أحد تلك المعادلات، كما قام هيرون السكندري (٢٠-٩٥م) بحل الكثير من تلك المعادلات، ومنها مثلاً: مسالة إيجاد مستطيلين محيط الأول يساوي ثلاثة محيط الثاني ومساحة الأول تساوي مساحة الثاني. أما ديوفانتس (٢١٠-٢٩٤م) الذي كان أستاذا بجامعة الإسكندرية القديمة فقد كان أول من بحث في تلك المعادلات وتعامل معها بالتفصيل في كتابه المسمي (أريثماطيقا) أو الحساب الذي ظهر حوالي عام ٢٥٠م ولذلك سميت المعادلات باسمه.

كما تعامل الهنود والصينيون مع أمثال تلك المعادلات، ويعتقد بأن الرياضي الشهير أريابهاتا (٤٧٦-٥٥٠م) هو أول من وضع حلاً عاماً للمعادلات الديوفانتية ذات المجهولين وذلك في أوائل القرن السادس الميلادي.

ب- وتعامل العرب مع المعادلات الديوفانتية بصورة كبيرة وتطرق إليها الخوارزمي (٧٨٠-٨٥٣م) في الجزء الأخير من كتابه (الجبر والمقابلة) وهو الجزء المخصص لمسائل التركة والقسمة، وأطلق عليها أسم المعادلات السيالة.

ويردد بعض المهتمين بتاريخ العلوم مقولة أن الخوارزمي استفاد من كتاب ديوفانتس (الأريثماطيقا) الذي ترجمه إلى العربية قسطا بن لوقا البعلبكي حوالي عام ٩٠٠م وأطلق عليه اسم (صناعة الجبر)، والرد على هذه المقولة بسيط حيث أن كتاب ديوفانتس كان مهتما بنظرية الأعداد في الأساس وانه ترجم بعد وفاة الخوارزمي بنحو خمسين عاماً وقد اسماه البعلبكي صناعة الجبر مستوحياً الاسم من اسم كتاب الخوارزمي (الجبر والمقابلة) الذي كان منتشرا في الأوساط العلمية في تلك الأيام، وعلى ذلك فإن كتاب ديوفانتس لم يكن موجودا باللغة العربية أيام الخوارزمي الذي وضع كتابه في الجبر حوالي عام ٨٣٠م أي قبل ترجمة كتاب ديوفانتس بنحو ٧٠ عاماً.

ج- وقد بين أبو كامل شجاع بن اسلم المصري (٨٥٠-٩٣٠م) في كتابه (الطريف في الحساب) أن بعض المسائل تبقي وحيدة الحل وبعضها له عدة حلول بأعداد صحيحة، وهي المسائل السيالة أو الديوفانتية، وبعضها له عدة حلول بأعداد ليست صحيحة، وأورد أبو كامل العديد من الأمثلة وحلها بطريقه تختلف عن أسلوب الرياضي الهندي اريابهاتا، وفي كتابه (كمال الجبر وتمامه والزيادة في أصوله) والذي وضعه أبو كامل حوالي عام ٨٨٠م بعد ظهور كتاب الخوارزمي في الجبر والمقابلة بنحو خمسين عاماً، عالج أبو كامل ٣٨ مسألة ديوفانتية من الدرجة الثانية وأربعة أنظمة معادلات خطية غير معينة ومجموعة مسائل تعود إلى متواليات حسابية.

د- كما تناول أبو بكر الكرخي (٩٧١-١٠٢٩م) في كتابه (البديع في الحساب) نظاماً خطياً يحتوي على خمسة مجاهيل، وفي كتابه (الفخري في الجبر والمقابلة) قام الكرخي بحل العديد من المعادلات السيالة (أو الديوفانتية)، وكأمثلة على ذلك:

مثال(١): ما العدد الذي لو أضيف إليه مربعه لكان الناتج مربعاً، ولو طرح منه مربعه لكان الناتج مربعاً.

وبلغتنا المعاصرة: إذا كان العدد= x فإن $x+x^2=a^2, x-x^2=b^2$

وأوجد الكرخي بطريقة مطوله ذلك العدد وصورته $x=\frac{25}{24}$

مثال(٢): أوجد عددين بحيث يكون الأول مع مربع الثاني يكون مربعاً والثاني مع مربع الأول يكون مربعاً أيضاً.

وبلغتنا المعاصرة: إذا كان العددان x,y فإن $x+y^2=a^2\ ,\ y+x^2=b^2$

وأوجد الكرخي العددان بالصورة $x=\frac{3}{13}, y=\frac{14}{13}$

مثال (٣): عددان مجموع مكعبيهما يساوى مربع العدد الثالث، وبلغتنا المعاصرة: إذا كانت الأعداد هي x,y,z فإن $x^3+y^3=z^2$

ولهذه المسألة عدة حلول، وقد قام الكرخي بحلها كالآتي:

نفرض أن $y=mx\ ,z=nx$ ، فبالتعويض في المعادلة الأصلية نجد أن

$$x^3+m^3x^3=n^2x^2$$

وبالقسمة على x^2 فإن: $x+m^3x=n^2$، ومنها

$$x=\frac{n^2}{1+m^3}$$

وبإعطاء m,n قيما مختلفة ينتج لنا قيما مختلفة لكل من x,y,z

فمثلاً: عندما $m=2,n=3$ فإن $x=\frac{9}{1+8}=1$ ومن ذلك نجد أن:

$y=2\times1=2\ ,\ z=3\times1=3$ وبهذا تتحقق المعادلة $x^3+y^3=z^2$.

هـ- وقد ظهرت المعادلات التي بالصورة $x^n+y^n=z^n$ حيث $n=3,4$ في أعمال أبو محمود حامد بن خضر الخجندي (المتوفى عام ١٠٠٠م) والذي كان معاصراً لأبي بكر الكرخي، حيث أثبت في أحدى رسائله أن مجموع مكعبين لا يكون مكعباً بمعنى عدم وجود أعداد صحيحة تحقق المعادلة $x^3+y^3=z^3$، كما أن أبو جعفر الخازن (المتوفي عام ١٠٣٠) جاء ليؤكد أن برهان الخجندي ليس كاملاً، وحاول أعطاء البرهان الصحيح لتلك المعادلة وذلك في كتابه (المسائل العددية) ولكنه فشل في أعطاء برهان للعلاقة $x^4+y^4=z^4$.

وجاء عمر الخيام (١٠٤٨-١١٣١) ليذكر دون برهان استحالة وجود أعداد صحيحة غير صفرية تحقق المعادلة $x^n+y^n=z^n$ حيث $n=3,4$

وفي القرن الثالث عشر الميلادي حاول كل من ابن الخوام البغدادي (المتوفي عام ١٣٢٤) وكمال الدين الفارسي (المتوفي عام ١٣٢٠م) حل بعض المعادلات الديوفانتية ومنها المعادلة $x^3+y^3=z^3$ مؤكدين عدم وجود أعداد صحيحة تحقق أي من تلك المعادلات.

و- وفي القرن السادس عشر الميلادي ذكر بها الدين العاملي (١٥٤٧-١٦٢٢) في كتابه (خلاصة الحساب) ما اسماه بالمستصعبات وهي مسائل مستحيلة الحل وأهمها:

(i) استحالة تقسيم مربع عدد إلى مربعين أي: $2z^2=x^2+y^2$

(ii) واستحالة تقسيم مكعب إلى مكعبين أي: $z^3=x^3+y^3$، بشرط أن تكون x,y,z كلها أعداد صحيحة.

وقد أورد العاملي هاتين المستصعبتين بالصورة الآتية:

(i) مجذور إذا زدنا عليه عشرة، كان للمجتمع جذراً، أو نقصناها منه، كان الباقي جذرا.

ورياضياً: إذا كان z هو العدد المجذور وهو عدد صحيح، وكانت x,y أعداد صحيحة فإن:

$$z^2+10=x^2 \quad , \quad z^2-10=y^2$$

وبالجمع نحصل على: $2z^2 = x^2 + y^2$

(ii) عدد مكعب يقسم بقسمين مكعبين، ورياضياً $z^3 = x^3 + y^3$

ز- وفي القرن السابع عشر ذكر الفرنسي بيردي فيرما (١٦٠١-١٦٦٥) الذي ظهر بعد بهاء الدين العاملي بنحو خمسين عاماً، المستصعبة $x^3 + y^3 = z^3$ وحاول برهانها، وأكد عام ١٦٣٧ عدم وجود أعداد صحيحة تحقق تلك المستصعبة بشرط أن حاصل الضرب (xyz) لا يساوي صفراً.

وقد نسبت تلك النظرية إلى فيرما وأصبح يطلق عليها منذ ذلك الوقت اسم (نظرية فيرما).

وقد حاول العلماء منذ ذلك الوقت إثبات نظرية فيرما بعد تعميمها إلى الصورة $x^n + y^n = z^n$، وكان أول من حاول إثباتها ليونارد أويلر (١٧٠٧-١٧٨٣) عام ١٧٧٠ وذلك عندما n=3.

وفي القرن التاسع عشر قامت العالمة الفرنسية صوفي جيرمين S.Germain (١٧٧٦-١٨٣١) عام ١٨٢٠ بإثبات صحة العلاقة $x^n + y^n = z^n$ في حالات خاصة للعدد n، وفي عام ١٨٢٨ أثبت الألماني بيتر دريشليه (١٨٠٥-١٨٥٩) صحة العلاقة عندما n=5، وفي عام ١٨٣٩ قام العالم الايطالي جبرييل لامي (١٧٩٥-١٨٧٠) ببرهان صحة العلاقة عندما n=7 ولكن برهانه كان يحتوى على بعض الأخطاء قام بتصحيحها الرياضي الفرنسي هنري لبيغ H. Lebesgus (١٨٧٥-١٩٤١) عام ١٩٠٤، وفي عام ١٨٤٩ أثبت الرياضي الألماني إرنست كومر E. Kummer (١٨١٠-١٨٩٣) صحة نظرية فيرما للأعداد الأقل من 100 ما عدا الأعداد 37,59,67 ومنح على ذلك الميدالية الذهبية من أكاديمية العلوم الفرنسية عام ١٨٥٠م.

ولم يتم إثبات نظرية فيرما بصورة عامة ونهائية إلا عام ١٩٩٥ على يد الرياضي الإنجليزي المعاصر أندرو وايلس A. Wiles (١٩٥٣-....) الذي حصل عام ١٩٩٥م على جائزة فيلدز في الرياضيات وهي من أهم الميداليات العلمية في مجال

الرياضيات، وعلى الميدالية الذهبية من الجمعية الملكية البريطانية عام ١٩٩٦، وعلى جائزة الملك فيصل العالمية في تخصص الرياضيات عام ١٩٩٨م.

(٥) ظهور الجبر الخطي- المصفوفات والمحددات:

أ- يعتبر الجبر الخطي من أهم فروع الجبر الحديث، حيث أنه الجسر الذي يربط بين المجرد والمحسوس من المفاهيم الرياضية، وبين النظرية والتطبيق، يجسد ذلك التطبيقات المختلفة والملموسة للجبر الخطي في الكثير من فروع العلم.

ومن أهم الموضوعات في الجبر الخطى دراسة ما يعرف بالمصفوفات وكذلك المحددات، ولهما تطبيقات متعددة في الفيزياء وفروع مختلفة للرياضيات المعاصرة كأنظمة المعادلات الخطية والمعادلات التفاضلية والبرمجة الخطية والعلوم الإحصائية وغيرها.

ب- ويقال أن مفهوم المصفوفة كان معروفا لدى البابليين والصينيين القدامى، وكذلك ظهر في بعض أعمال العلماء العرب، غير أن أول من أطلق عليها اسم المصفوفة وعبر عنها بمستطيل منتظم هو الرياضي الألماني كارل جاوس (١٧٧٧-١٨٥٥) عام ١٨٢٩ وذلك عند دراسته لبعض التحويلات الخطية، كما عبر الألماني فرديناند أيزنشتاين F. Eisenstein (١٨٢٣-١٨٥٢) عن المصفوفة بدلالة الرموز وبين أن ضرب المصفوفات ليس إبداليا وكان ذلك عام ١٨٥٠ قبل وفاته بعامين، ويلاحظ أن أيزنشتاين قد توفي مبكراً وكان عمر ٢٩ عاماً.

وفي عام ١٨٥٨ تعامل الرياضي الإنجليزي أرثركايلي (١٨٢١-١٨٩٥) مع المصفوفات المربعة من الدرجة الثانية والثالثة.

ج- أما المحددات وهي عبارة عن أعداد مقترنة مع المصفوفات فيعود ابتكارها إلى الألماني جوتفريد ليبنتز (١٦٤٦-١٧١٦) عام ١٦٩٢ وإلى الفرنسي بيير لابلاس (١٧٤٩-١٨٢٧) الذي عم استخدامها وقام بشرح خواصها عام ١٧٨٠، وكذلك إلى الفرنسي الكسندر ڤاندرموند (١٧٣٥-١٧٩٦) الذي أسهم في وضع نظريات المحدد وله محدد شهير باسمه (محدد ڤاندرموند).

وقد قام الفرنسي أوجستين كوشي (١٧٨٩-١٨٥٧) بتطوير نظرية المحددات ووضعها بالشكل الذي نستخدمه اليوم وذلك عام ١٨١٢.

وحوالي عام ١٧٤٠ ظهر أول تطبيق للمحددات حيث استخدمها الرياضي السويسري جبرييل كرامر (١٧٠٤-١٧٥٢) في حل المعادلات الخطية المشتملة على عدة مجاهيل بطريقة نسبت إليه (طريقة كرامر).

أما العالمان الدنمركي جورجن جرام J. Gram (١٨٥٠-١٩١٦) والألماني إيرهارد شميدت E. Schmidt (١٨٧٦-١٩٥٩) فقد استخدما المحددات في حل أنظمة لا متناهية من المعادلات اللامتناهية المجاهيل وذلك بطريقة نسبت إليهما (طريقة جرام – شميدت) وكان ذلك عام ١٩٠٨.

(٦) <u>ظهور الكميات المتجهة (المتجهات):</u>

تمثل المتجهات كميات غاية في الأهمية تظهر في العلوم الهندسية والفيزيائية، وتعرف المتجهات بأنها تلك الكميات التي يتحدد كل منها بمقدار واتجاه.

وقد ظهرت المتجهات في المستوى أول الأمر مقترنة بالأعداد المركبة (المكونة من عدد حقيقي وعدد تخيلي) في أعمال كل من النرويجي كاسبار فسيل (١٧٤٥-١٨١٨) والسويسري جان أرجاند (١٧٦٨-١٨٢٢) والألماني كارل جاوس (١٧٧٧-١٨٥٥) في النصف الثاني من القرن الثامن عشر وبدايات القرن التاسع عشر، ثم استخدمت المتجهات في علم الاستاتيكا لتمثيل القوى في المستوى، وحيث أن القوى ليست قاصرة على المستويات فقط فقد عمم الرياضي الأيرلندي وليام هاملتون (١٨٠٥-١٨٦٥) المتجهات المستوية إلى الفراغ ذي الأبعاد الثلاثة وأدخل متجهات الوحدة الأساسية $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ التي تمثل متجهات ذات قيمة تساوي الواحد واتجاهات هي اتجاهات المحاور الثلاثة في هذا الفراغ، وقام بكتابة أي متجه بدلالة مركباته بالصورة $\bar{A} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$ حيث a, b, c هي مركبات المتجه $\bar{A}$ وهي كميات قياسيه (ليس لها اتجاه).

وفي عام ١٨٩٣ ظهر الجزء الأول من كتاب (النظرية الكهرومغناطيسية) للفيزيائي الإنجليزي أوليفر هفيسايد (١٨٥٠-١٩٢٥) وكانت فيه مقدمه وافيه عن جبر المتجهات، وأدى ذلك إلى ظهور العديد من المؤلفات حول المتجهات وخواصها، وكان أول كتاب صدر في ذلك بعنوان (تحليل المتجهات) للرياضي والفيزيائي الأمريكي ويلارد جيبس (١٨٣٩-١٩٠٣) وقد صدر عام ١٩٠١ وفصل فيه مؤلفه ما احتواه كتاب هفيسايد عن جبر المتجهات وأضاف إليه الكثير من خواص تلك الكميات، وانتشرت بعد ذلك المؤلفات الخاصة بالمتجهات ودراسة الجبر الخاص بها وكذلك عمليات التحليل (من تفاضل وتكامل) لها وتطبيقاتها في العلوم الفيزيائية والهندسية.

(٧) <u>ظهور الجبر الحديث (أو المجرد)- نظرية المجموعات وتطورها:</u>

أ- تعتبر المجموعات (Sets) القاعدة الأساسية لدراسة الرياضيات الحديثة، ويمكن القول بأن اكتشاف المجموعة قد أحدث تطوراً هائلاً في كل فروع الرياضيات خلال القرنين التاسع عشر والعشرين، عمل على التقريب بين الحساب والهندسة والجبر والتحليل متجها بها نحو التجريد الذي وسع شمولية المفاهيم الرياضية وقلل قوانينها مما ساعد على اكتشاف فروع جديدة في الرياضيات أدت إلى تطبيقات مختلفة في جميع المجالات العلمية، ومن تلك الفرع نظرية الزمر ونظرية الحلقات وعلم التوبولوجي وغيرها.

وكان أهم إنجازات قدمته نظرية المجموعات هي: إعطاء تفسير واضح لمفهوم الدوال والعلاقات مما ساعد على إعطاء تفسير واضح ومقبول لمفهوم العدد واللانهاية. وأصبحت الرياضيات بعد ظهور نظرية المجموعات وتطويرها عبارة عن دراسة للعلاقات بين مجموعات معينة، كما أصبحت صحة أي برهان رياضي يقوم على ما بين عناصره من علاقات منطقية، وبذلك ظهر الجبر الحديث (أو التجريدي) الذي يعتمد أساساً على مفهوم المجموعة وما تفرع منها كالزمرة والحلقة.

وبمقارنة المفهوم الرياضي للمجموعة مع معطيات الرياضيات التقليدية يمكن القول بأن هذا المفهوم يناظره مفهوم العدد الطبيعي في نظرية الأعداد (الحساب) أو مفهوم النقطة والمستقيم في الهندسة.

ب- وكان أول ظهور للمجموعة عام ١٨٤٧ عندما وضع الفيلسوف والرياضي الأيطالي برنارد بولزانو B. Bolzano (١٧٨١-١٨٤٨) أول تعريف لمفهوم المجموعة اللانهائية (infinite Set) عام ١٨٤٧، قبل وفاته بعام، وتلي ذلك الأعمال التي نشرها الرياضي الألماني جورج كانتور (١٨٤٥-١٩١٨) عام ١٨٧٣ وذلك عند دراسته لمتسلسلات الدوال المثلثية، ووصف كانتور المجموعة على أنها تجمع من الأشياء المختلفة المعرفة تعريفاً جيداً ليمكن الحكم فيها إذا كان شيء ما ينتمي إلى تلك المجموعة أم لا، وأطلق كانتور على الأشياء المكونة للمجموعة اسم عناصر المجموعة، وقد نشر كانتور أبحاثه حول ذلك بعد لقائه لريتشارد ديدكند الرياضي المرموق في سويسرا وتأثره بالنظرة التجريدية لديدكند للموضوعات الرياضية.

وقد قوبلت أبحاث كانتور بفتور شديد من بعض الرياضيين آنذاك وعلى رأسهم كرونيكر الأستاذ بجامعة برلين وكذلك هيرمان شوارز H. Shwarz(١٨٤٣-١٩٢١)، وكان من المؤيدين لأراء كانتور بالطبع رتشارد ديدكند (١٨٣١-١٩١٦) وكذلك كارل فيرشتراس (١٨١٥-١٨٩٧). وقام كانتور في الفترة من ١٨٧٩ وحتى ١٨٨٤ بنشر سلسلة من الأبحاث المطولة حول نظرية المجموعات في مجلة الحوليات الرياضية (Mathematicsche Annalen) ، وفي البحث الخامس منها والذي ظهر عام ١٨٨٣ ناقش كانتور المجموعات المرتبة جيداً (Well – Ordered set) كما عرف جمع وضرب الأعداد فوق المحدودة (Trans finite Numbers).

وبين عامي ١٨٩٥، ١٨٩٧ قام كانتور بنشر بحثين آخرين حول نظرية المجموعات في نفس المجلة. وفي عام ١٨٩٧ عقد في زيورخ أول مؤتمر دولي لعلماء الرياضيات، وفي هذا المؤتمر لقى كانتور تأييداً كبيراً لأعماله في نظرية المجموعات من عدد كبير من الرياضيين، وشكل هذا إنتصاراً كبيراً لأفكاره الرياضية.

ومن المفيد أحياناً أن تمثل المجموعات بأشكال أو مخططات بهدف تسهيل دراستها، وقد قام بذلك الرياضي الإنجليزي جون فن (١٨٣٤-١٩٢٣) عام ١٨٩٠ وكان بذلك أول من أستخدم الأشكال لتمثيل المجموعات، وقد نسبت تلك الأشكال إليه فسميت بأشكال فن.

ج- ومن العلماء الذين قدموا إضافات هامة لنظرية المجموعات في القرن العشرين نذكر العالم الألماني إرنست زرميلو E. Zermelo (١٨٧١-١٩٥٣) الذي وضع ما يعرف بمسلمة الاختيار (Axiom of Choice) عام ١٩٠٤ حيث أثبت تكافؤها لقاعدة الترتيب الجيد (well Ordering) التي تنص على أن أي مجموعة يمكن ترتيبها جيداً، والتي وضعها جورج كانتور، حين اكتشافه للمجموعات عام ١٨٧٣، كإحدى طرق البرهان المكافئة لطريقة الاستقراء (أو الاستنتاج) الرياضي، وطورها جوزيب بيانو G. Peano (١٨٥٨-١٩٣٢) واستخدمها في إثبات وجود حلول لمنظومة من المعادلات التفاضلية عام ١٨٩٠.

وفي عام ١٩٣٠ وضع الرياضي الأمريكي ماكس زورن M. Zorn (١٩٠٦-١٩٩٣) نظرية مكافئة لمسلمة الاختيار أطلق عليها اسم نظرية زورن، كذلك فإن الرياضي الألماني فليكس هاوسدورف F. Hausdorff (١٨٦٨-١٩٤٢) الذي وضع الأسس الأكسيوماتيه لنظرية الزمر وعلم التوبولوجى وصاحب الفراغ التوبولوجى المعروف باسمه (فراغ هاوسدورف)، قد أسهم في وضع قاعدة عرفت باسمه تعتبر من القواعد المكافئة لمسلمة الاختيار لزرميلو، وكان ذلك عام ١٩١٤.

ومن علماء الرياضيات الذين أسهموا في تطوير نظرية المجموعات في القرن العشرين أيضاً نذكر العالمين:

١- البولندى ڤاكلوسربينسكي W. Sierpinski (١٨٨٢-١٩٦٩) الذي أسس مدرسة وارسو الشهيرة بالعلوم الرياضية وعضو أكاديمية العلوم البولندية عام ١٩٦٠. وقد وضح كتاباً حول الأعداد فوق المحددة (عام ١٩٢٨)، وكتاباً حول تساوق (Congruence) المجموعات وتكافؤها بالتفريق (Decomposition) المحدود (عام ١٩٥٤)، كما أشتهر بكتابة في التوبولوجي العام (عام١٩٥٢).

٢- عالم الرياضيات والمنطق الأمريكي من أصل نمساوي كورت جوديل K.Godel (١٩٠٦-١٩٧٨) والذي قام بأعمال أساسية في المنطق الرياضي وبرهن نظرية عرفت باسمه حول مسلمة الاختيار وذلك عام ١٩٤٠، ومؤداها أنه إذا لم تكن نظرية

المجموعات متناقضة فإن النظرية الحاصلة من دمج الفرضية والمحتوى من مسلمة الاختيار لا تكون أيضاً متناقضة. وبذلك أوضح جوايل أن مسلمة الاختيار لا يمكن برهانها بأستخدام المسلمات الأخرى لنظرية المجموعات. وقد أثبت الرياضي الأمريكي بول كوهن P. Cohen (١٩٣٤-٢٠٠٧)، عام ١٩٦٣ أن مسلمة الاختيار مستقلة عن المسلمات الأخرى لنظرية المجموعات، ونال على ذلك ميدالية فيلدز الشهيرة التي لا تعطي إلا لكبار الرياضيين.

(٨) تطور البحث في الجبر المجرد- ظهور نظرية الزمر وتطورها:

أ- تطور البحث في المفاهيم التجريدية لعلم الجبر منذ النصف الثاني من القرن الثامن عشر وعلى وجه التحديد منذ عام ١٧٧٧م أثناء محاولة إيجاد الحلول الجبرية لكثيرات الحدود، حيث قام الرياضي الفرنسي جوزيف لاجرانج (١٧٣٦-١٨١٣) بدراسة الزمرات S_2 ، S_3 ، S_4 لعلاقتها بحلول معادلات الدرجة الثانية والثالثة والرابعة على التوالي وذلك في كتابه الشهير (ملاحظات حلول الحلول الجبرية للمعادلات).

ب- وكان أول من بين استحالة الحل الجبري للمعادلات من الدرجة الخامسة (Quintic equation) هو الرياضي الإيطالي باولو روفيني P. Ruffini (١٧٦٥-١٨٢٢) في بحثين نشرهما عامي ١٧٩٩، ١٨٠٢، حيث أدخل ما يعرف بزمر التبديلات (Groups of Permutation) وقسم زمر التبديلات إلى بسيطة ومركبة، كما قسم المركبة إلى زمر متعدية (Transitive) أولية، وزمر متعدية غير أولية، وزمر غير متعدية (Intransitive).

ج- وقام الرياضي النرويجي نيلز أبيل (١٨٠٢-١٨٢٩) عام ١٨٢٤ بإثبات استحالة وجود قانون عام لحل معادلات الدرجة الخامسة، وقد فتح الطريق بذلك لمن جاء بعده لإيجاد زمرة تبديلات لجذور المعادلات، وقام الرياضي الفرنسي المعاصر لأبيل: إيفارست جالوا (١٨١١-١٨٣٢) عام ١٨٣١ بإكتشاف الشروط الواجب توافرها في معادلة درجتها تساوي أو أكبر من خمسة لكي يكون لها حلا جبرياً، وكان عمره

آنذاك ٢٠ عاماً، وقد توفى جالوا في العام التالي وفي تلك السن المبكرة بعد أن قرن المعادلات الجبرية بالزمر حين أوضح أن الحل الجبري لمعادلة ما يرتبط ببنية زمرة التبديلات وأرتباطها بالمعادلة، وقبل وفاته مباشرة (عام١٨٣٢) إكتشف جالوا زمرات فرعية خاصة تعرف بالزمرات الفرعية المعتدلة (Normal Subgroups). كما وضع جالوا نظرية من أهم النظريات في علم الجبر المجرد (الحديث) هي نظرية جالوا، ولم تعرف أعمال جالوا إلا عندما قام ليوفيل (١٨٠٩-١٨٨٢) عضو أكاديمية العلوم الفرنسية بنشر أعمال جالوا والتعليق عليها عام ١٨٤٦(أي بعد وفاة جالوا بنحو ١٥عاماً).

ج- وفي عام ١٨٤٥ قام الفرنسي أوجستين كوشي (١٧٨٩-١٨٥٧) بتطوير نظرية التبديلات وأثبت نظرية هامة في الزمر المنتهية تنص على الآتي:

إذا كانت G زمرة منتهية رتبتها mp حيث p عدداً أولياً فإن G تحوى زمرة جزئية رتبتها p.

وفي عام ١٨٥١ قام الرياضي الإيطالي إنريكوبتي E. Betti (١٨٢٣-١٨٩٢) بنشر مقال ربط فيه بين نظرية التبديلات ونظرية المعادلات، وفي الحقيقة فإن بتي هو أول من برهن أن زمرة جالوا المرتبطة بمعادلة هي في الواقع زمرة تبديلات.

وفي العام ١٨٥٤ استخدم الرياضي الإنجليزي أرثركايلي A. Kayley (١٨٢١-١٨٩٥) الخاصية التجميعية والعنصر المحايد في محاولة منه لتعريف دقيق للزمرة.

د- وفي عام ١٨٦٧ تعامل الرياضي الفرنسي مارى جوردان M. Jordan (١٨٣٨-١٩٢١) مع الزمر غير المنتهية، كما عرف الزمر القابلة للحل، وقد نشر چوردان كتابه (التباديل والمعادلات الجبرية) عام ١٨٧٠، حيث عرض فيه ما عرف في وقته عن زمر التبادل وعلاقتها بنظرية جالوا، إضافة إلى العديد من النتائج الجديدة في تمثيل الزمر وما يعرف بالتشاكل الزمري (Isomorphism).

وفي عام ١٨٧٢ وسع الرياضي النرويجي بيترسيلو P. Sylow (١٨٣٢-١٩١٨) أعمال جالوا وكوشي إلى الزمر المنتهية من الرتبة mp^n ، ونشر أعمالاً هامة حول الزمر الجزئية ومنها النظريات المعروفة باسمه (نظريات سيلو).

وفي نفس العام ربط العالم الرياضي الألماني فليكس كلاين F.Klein (١٨٤٩-١٩٢٥) بين علم الهندسة ونظرية الزمر حيث استخدم تلك النظرية لتعريف علم الهندسة تعريفاً دقيقاً وشاملاً.

هـ- ولا يفوتنا هنا ذكر الرياضي النرويجي ماريوس لي M. Lie (١٨٤٢-١٨٩٩) الذي كانت تربطه صداقة متينه مع فليكس كلاين، والتقى معه في باريس عام ١٨٦٩ حيث أطلع الاثنان على أعمال جالوا وجوردان وتأثر الاثنان بأعمال هذين العالمين كثيراً، وعمل الاثنان معاً على نظرية المتغيرات في التحليل والهندسة، وعلى دارسة الزمر الجزئية، وعندما أعلنت الحرب بين فرنسا وألمانيا ذهب كلاين إلى ألمانيا وعاد ماريوس لي إلى بلاده حيث حصل على الدكتوراه من جامعة كريستيانا (أوسلوا حالياً) عام ١٨٧٢، وعمل منذ عام ١٨٧٣ على زمر التحويلات المتصلة والتي أوصلته إلى ما سمي بعد ذلك زمرلي (Lie Groups)، وبدأ لي بإعداد نظريته حول تلك الزمر وتوصل إليها عام ١٨٨٣، وكأن لتلك النظرية أثر كبير عند كل علماء عصره وحتى اليوم، وحصل لي عام ١٨٩٨ على جائزة لوبا تشفسكي الرياضية الرفيعة المستوى على أبحاثه وعلى كتابه المسمي (نظرية تحولات زمرلي) الذي نشره عام ١٨٩٣.

ويعتبر جبرلي (Lie Algebra) الآن حجر الزاوية في كثير من فروع الفيزياء النظرية وخاصة فيزياء الجسيمات الأولية والتماثلات الحادثة في عالم تلك الجسيمات.

و- أما التعريف الدقيق للزمرة والمعروف حالياً والذي يصف الزمرة بأنها مجموعة منتهية مغلقة من التبادل فقد وضعها الرياضي الألماني هنريك ڤيبر H.Weber (١٨٤٢-١٩١٣) عام ١٨٨٢ ونشرها في كتاب له بعنوان (أسس عام الجبر) الذي صدر في ٣ مجلدات في الفترة (٩١-١٨٩٦). ولا ننسى هنا الكتاب الذي صدر عام ١٨٩٧ بعنوان (نظرية الزمر ذات الرتبة المحدودة)، من تأليف الرياضي الإنجليزي وليام بيرنسايد W. Burnside (١٨٥٢-١٩٢٧) أحد مؤسسي النظرية الكلاسيكية للتمثيلات الخطية للزمر.

ز- وكان الرياضي الإنجليزي أرثر كايلي (١٨٢١-١٨٩٥) قد قدم مفهوم الزمرة المجردة عام ١٨٥٤، وكانت الزمر المعروفة حتى ذلك الوقت هي زمر التبديلات فقط، وبعدها انطلقت نظرية الزمر في التطور بسرعة كبيرة كأحد الفروع الهامة للجبر المجرد (التجريدي)، وأصبح لتلك النظرية تطبيقات واستخدمات عديدة في العلوم الهندسية والفيزيائية، ولها كذلك ارتباطات قوية مع العديد من فروع الرياضيات الأخرى مثل نظرية المعادلات الجبرية ونظرية المعادلات التفاضلية ونظرية الأعداد وغيرها.

وقد ساهم الألمانيان أوتو هولدر O. Holder (١٨٥٩-١٩٣٧) ويوجبين نيتو E. Netto (١٨٤٨-١٩١٩) في تقدم نظرية الزمر بأبحاثهما في تلك الفترة، وكذلك فالتر فون ديك W. Von Dyck (١٨٥٦-١٩٣٤) تلميذ كلاين ومساعده، وقد قام بنشر بحثين هامين عامي ٨٢، ١٨٨٣ أوضح فيهما بناء الزمرات الحرة، وعرف الزمرات المجردة بدلالة المولدات والعلاقات.

ح- ومن المفاهيم الهامة في نظرية الزمر نذكر مفهوم شبه الزمر (Semi-Group) والذي كان الرياضي الأمريكي ليونارد ديكسون L. Dickson (١٨٧٤-١٩٥٤) أول من نشر بحثاً حول هذا المفهوم عام ١٩٠٥، وبعد ٣٥ عاماً من ذلك وفي عام ١٩٤٠ قامت الرياضية الأمريكية مينا ريس M. Rees (١٩٠٢-١٩٩٧) تلميذة ديكسون بإدخال مفهوم المصفوفة على الزمر الصفرية وأثبتت أن أنصاف الزمر البسيطة غير المنتهية تشمل على نواة، وكان المعروف آنذاك أن كل شبه زمرة منتهية تشمل على نواة.

ويعد الكتاب الذي كتبه الرياضيان الأمريكيان ألفريد كليفورد A. Clifford (١٩٠٨-١٩٩٢) وجوردون بريستون G. Preston (١٩٢٥-٠٠٠) بعنوان: النظرية الجبرية لأشباه الزمر، وصدر في جزئين (عامي١٩٦١، ١٩٦٧) من أهم المراجع الأساسية في نظرية أشباه الزمر.

ط- وفي عام ١٩١١ وضع الرياضي الإنجليزي وليام بورنسايد W. Burnside (١٨٥٢-١٩٢٧) نظرية حول ما يعرف بالزمر القابلة للحل (Solvable Group) وتنص على أن أي زمرة منتهية ذات رتبة فردية هي زمرة قابلة للحل. ولم يستطع بورنسايد إثبات تلك النظرية، وقام عدد من الرياضيين خلال القرن العشرين بمحاولة إثباتها حتى تمكن الأمريكيان والترفييت W. Feit (١٩٣٠-٢٠٠٤) وجون طومسون J. Thompson (١٩٣٢-٠٠٠) من إثبات تلك النظرية عام ١٩٦٢ ونشر الإثنان بحثهما في العدد ١٣ من مجلة الباسفيك الرياضية عام ١٩٦٣، ويقع البحث في (٢٥٠) صفحة، استخدما فيه مفاهيم ونظريات متقدمة جداً في الزمر وغير الزمر.

(٩) <u>ظهور نظرية الحلقات والحقول وتطورها:</u>

أ- نشأت الحلقات عد دراسة كثيرات الحدود كثيرات الحدود ذات المعاملات أعداد صحيحة، وكان أول من أستخدم كلمة حلقة (ring) للدلالة على مجموعة الأعداد الجبرية التي تكون حلولا لكثيرات حدود معاملاتها أعداد صحيحة هو الرياضي الألماني دافيد هلبرت D .Hilbert (١٨٦٢-١٩٤٣) عام ١٨٩٧ ، وفي عام ١٩١٤ ظهر أول تعريف شبه دقيق للحلقة من قبل الألماني أدولف فرانكل A. Frankel (١٨٩١-١٩٦٥) الذي توصل إلى مشاركة حقيقية وأساسية بين المنطلق الرياضي واكسيوماتية نظرية المجموعات.

أما التعريف الدقيق للحلقة فقد جاء من قبل العالمة الرياضية الألمانية إيمي نويثر E. Noether (١٨٨٢-١٩٣٥) عام ١٩٢١، وهي أشهر علماء القرن العشرين الذين بحثوا في الجبر التبديلي وغير التبديلي والحلقات النويثرية التي أصبحت أساساً لما يعرف بالجبر النويثري (Noetherian Algebra).

ب- وكان العالم الألماني إرنست كومر E. Kummer (١٨١٠-١٨٩٣) هو أول من أكتشف ما يعرف بالمثاليات (ideals) أو الأعداد المثالية عام ١٨٤٧ وذلك في بحث نشره بعنوان (نظرية الأعداد المثالية) وكان يحاول فيه إثبات نظرية فيرما التي تنص

على أنه لا توجد أعداد صحيحة غير صفرية x,y,z تحقق المعادلة $x^n + y^n = z^n$ حيث $n > 2$ عدد صحيح.

وقد وسع العالم الرياضي الألماني رتشارد ديدكند R. Dedekind (١٨٣١-١٩١٦) مفهوم المثاليات عام ١٨٧١ وعرفها تعريفا دقيقاً وأستخدمها لمعالجة ما يعرف بأكسيومامتية الأعداد الحقيقية، كما وسع مفهوم الأعداد الأولية بتعريف المثاليات الأولية، كما عرف حاصل ضرب مثاليين ودرس خواصه، ويذكر لديدكند إيجاده لأحد فروع الرياضيات الحديثة (Algebraic Geometry) وهو الهندسة الجبرية بشكلها الحالي وذلك بالاشتراك مع الرياضي الألماني المعاصر له هنريك ڤيبر (١٨٤٢-١٩١٣).

كما يذكر أيضاً لديدكند اشتراكه مع الرياضي الألماني المعاصر له أيضاً چورج كانتور (١٨٤٥-١٩١٨) في تأسيس نظرية المجموعات، وقيام الاثنين بوضع الشكل النهائي للنظرية الحديثة للأعداد الحقيقية.

ومن علماء القرن العشرين الذين كانت لهم إسهامات هامة حول المثاليات وعلاقتها بالحلقات نذكر الرياضي الألماني ولفجانج كرول W. Krull (١٨٩٩-١٩٧٠) صاحب نظرية كرول الشهيرة حول المثاليات.

ج- أما مفهوم الحقل (field) فقد ظهر للمرة الأولى في أعمال نيلز أبيل التي نشرها عام ١٨٢٦، كما استخدم الرياضي الشاب إيفارست جالو مفهوم أبيل للحقل دون أن يعطي تعريفا دقيقا له وكان ذلك عام ١٨٣١ وكان عمره آنذاك عشرون عاماً.

وكان مفهوم أبيل وجالوا للحقل على أنه مجموعة من الأعداد مغلقة بالنسبة للعمليات الأساسية من جمع وطرح وضرب وقسمة، غير أن الرياضي الألماني ديدكند أحد مؤسسي نظرية المجوعات جاء عام ١٨٧١ ليعطي اسم الحقل(Field) لهذه المجموعة من الأعداد، وقام ديدكند في نفس العام بتعريف الحقل تعريفاً دقيقاً، ووضع مجموعة من المسلمات عن الحقول العددية.

أما التعريف المستخدم حالياً للحقل على أنه عبارة عن حلقة إبدالية ذات عنصر محايد بشرط أنه لكل عنصر غير صفري فيها يوجد معكوس ضربي فقد وضعه الرياضي الألماني هنريك ڤيبر عام ١٨٩٣.

ويعتبر الرياضي الألماني إرنست ستاينتز E. Steinitz (١٨٧١-١٩٢٨) أول من قام بتصنيف الحقول عام ١٩٠٤، كما يعتبر أول من أثبت أن لكل حقل يوجد حقل جزئي أولي، ووضع نظرية في هذا الصدد عرفت باسمه (نظرية ستاينتز – Steinitz Theorem).

وتعد الحلقات والحقول من أهم البنى الجبرية ، لدخولهما في كثير من التخصصات الرياضية والتطبيقية.

ويذكر أن هناك نوعين من أهم أنواع الحلقات لكثرة تطبيقهما في الهندسة الجبرية وفي فروع الجبر الأخرى، ويطلق على إحداهما الحلقات النويثرية نسبة إلى إيمي نويثر، ويطلق على الثانية الحلقات الأرتينية نسبة إلى الرياضي الأمريكي من أصل ألماني إميل أرتين E. Artin (١٨٩٨-١٩٦٢) أحد أهم العلماء في الجبر التجريدي خلال القرن العشرين.

ثالثاً: علم الهندسة

(١) تعريف علم الهندسة وبداياته عند قدماء المصريين والبابليين:

أ- يعتبر علم الهندسة من العلوم القديمة التي نشأت في الحضارة الإنسانية المتقدمة، وكان الدافع الأساسي إلى ابتكار هذا العلم هو قياس مساحات الأراضي ذات الأشكال الهندسية المختلفة، وكذلك قياس الارتفاعات والأطوال.

وتعرف الهندسة على أنها فرع من الرياضيات يتعامل مع النقطة والمستقيم والسطح والفضاء (أو الفراغ)، وقد عرفت قديما بعلم القياس، وهي العلم الذي يؤدي إلى دراسة الأشكال من حيث مجموع قياس زواياها ومساحاتها وحجومها، وتحديد درجات تقوس أو انحناء سطح، وغيرها.

ب- عن نشأة هذا العلم يذكر المؤرخ اليوناني القديم هيرودوت في كتابه (تاريخ العالم): أن المصريين هم الذين اخترعوا علم الهندسة وذلك نتيجة بحثهم عن قواعد عملية تمكنهم من قياس مساحات بعض الأشكال وحجومها. وأنهم استخدموا هذا العلم لمسح الأراضي وتشييد الأبنية. وفي بردية أحمس (عام ١٧٠٠ق.م) توجد قوانين وعلاقات لتقدير مساحة الحقول والأراضي الزراعية عن قدماء المصريين.

وقد وجد الأثريون دلائل تدل على أن البابليين (في أرض العراق) كانت لهم معرفة بمساحات بعض الأشكال الهندسية كالمثلث والمربع والمستطيل والدائرة وكذلك بحجوم بعض الأشكال مثل حجم الأسطوانة ومتوازي السطوح ذو الستة أوجه المستطيلة الشكل.

كما عثر على أدلة أثرية تثبت أن المصريين القدماء وكذلك البابليين عرفوا مساحة المثلث قائم الزاوية ومساحة شبه المنحرف، وأنهم أدركوا أن الزاوية المرسومة في نصف دائرة تكون قائمة، وقاموا بقياس حجم متوازي المستطيلات والمخروط المقطوع، وكذلك حجم الهرم والهرم الرباعي المقطوع.

(٢) **الهندسة عند الإغريق:**

أ- أخذ اليونانيون القدامى (الإغريق) كثير من القواعد والمفاهيم الهندسة التي كانت عند المصريين والبابليين وأضافوا إليها إضافات هامة، بحيث يمكن القول بأنهم أول من صاغوا الهندسة كعلم له أصوله وقواعده.

وكان أول علمائهم طاليس (٦٢٤-٥٤٦ ق.م) الذي درس الهندسة على يد الكهنة في مصر وقام بقياس إرتفاع الهرم الأكبر بطريقة هندسية، فانتقل بالهندسة من قياس الأطوال والمساحات إلى التحديد واستنتاج النظريات الهندسية بل واستخدم المنطق الرياضي في برهان تلك النظريات.

ومن النظريات التي نسبت إلى طاليس نذكر النظريات الآتية:

١- زاويتا المثلث المتساوي الساقين متساويتين.
٢- ينطبق المثلثان إذا تساوي فيهما زاويتان وضلع.
٣- إذا تقاطع مستقيمان فالزاويتان المتقابلتان بالرأس متساويتان.
٤- الزاوية المرسومة في نصف دائرة تكون قائمة.
٥- يقسم قطر الدائرة، الدائرة إلى قسمين متساويين.
٦- أضلاع المثلثات المتشابهة تكون متناسبة.

ب- وجاء بعد طاليس العالم الرياضي فيثاغورث (٥٧٢-٤٩٧ ق.م) الذي درس الرياضيات وخاصة الهندسة والفلك في مصر لمدة ١٢ عاماً وعاد إلى بلاده عام ٥١٢ ق.م حيث أسس في مدينة كروتون المدرسة الفيثاغورية التي تخرج منها عدد كبير من مشاهير علماء الرياضيات اليونانيين. وقد اشتهر فيثاغورث بإثباته للنظريتين الآتيتين:

١- مربع الوتر في المثلث القائم الزاوية يساوي مجموع مربعي الضلعين الآخرين.
٢- مجموع زوايا المثلث تساوي زاويتين قائمتين.

ويرجع الفضل إلى المدرسة الفيثاغورية في تعريف كثير من المصطلحات الرياضية، إذا أنهم أول من أستخدم كلمة Mathematics للدلالة على الرياضيات وذلك من الكلمة اليونانية Mathema التي تعني (علم) فكأن الرياضيات عندهم مرادفة للعلم.

ج- ثم جاء عالم ثالث هو: أبقراط الكيوسي (من مدينة كيوس) والذي عاش في الفترة (٤٧٠-٣٩٠ ق.م) ويسمى أبو الهندسة، وهو غير أبقراط الكوسي (من مدينة كوس) والذي يعرف بأبي الطب.

ولابقراط الكيوسي مآثر جمه في الهندسة فقد قام بدراسة الأشكال الهندسية مثل المربع والمكعب والدائرة والأشكال الهلالية المعروفة بهلاليات أبقراط، وقام بوضع أول كتاب في الهندسة في التاريخ ضمنه عدد كبير من المعارف والنظريات الهندسية، مع عدد كبير من المسائل المحلولة في ترتيب منطقي سليم، وقد فقد هذا الكتاب، ولم يصل إلينا منه إلا أجزاء تم ذكرها في مؤلفات العلماء اللاحقين.

د- وكان ثياتيتوس (Theaetetos) الذي عاش في الفترة (٤١٥-٣٦٩ ق.م) أول من كتب عن المجسمات المنتظمة، وأول من أكتشف الشكل المضلع المنتظم ذو العشرين وجها.

كما كان ميناخموس (Menaechmos) الذي عاش في الفترة (٣٨٠-٣٢٥ ق.م) هو أول من اكتشف ما يعرف بالقطوع المخروطية، وكان أخوه دينوستراتوس (Dinostratus) الذي عاش في الفترة (٣٧٠-٣١٠ ق.م) هو أول من أوجد مساحة الدائرة بمعلومية المحيط ونصف القطر.

هـ- <u>هندسة إقليدس:</u>

إنتقل العلم اليوناني في القرن الثالث قبل الميلاد إلى مدينة الإسكندرية التي أنشأها الإسكندر الأكبر عام ٣٣٢ ق.م حيث جامعتها الشهيرة التي أنشئت عام ٣٠٠ ق.م ، وكانت منارة للعلم والمعرفة في ذلك الوقت، وكان أول أستاذ للرياضيات بها هو العالم

الشهير إقليدس (٣٣٠-٢٧٥ ق.م) الذي أسس مدرسة رياضية مرموقة بتلك الجامعة تخرج فيها أعداد من كبار الرياضيين قدموا إنجازات هامة للرياضيات في تلك الفترة وما بعدها.

وقد كتب إقليدس كتابه الشهير في الهندسة والذي اسماه (الأصول)، وجمع فيه كل ما كان معروفاً لديه في علم الهندسة سواء الهندسة المستوية أو الهندسة الفراغية، ويتكون الكتاب من ثلاثة عشر جزءاً أو فصلاً، اشتملت على الهندسة المستوية التي استخدمت فيها طريقة المسلمات لبناء القواعد الهندسية وإثبات النظريات، وكذلك على الهندسة المجسمة (أو الفراغية) حيث أوجد حجم الكرة والهرم والمخروط والأسطوانة، وكذلك المجسمات (متعددات الوجوه) المنتظمة، كما خصص إقليدس في كتابه عدة فصول للحساب ونظرية الأعداد.

وقد أعتمد إقليدس في كتابه أن برهان أي نظرية يعتمد على ما سبقها من نتائج وفرضيات ومسلمات، وهذا النظام للبناء الهندسي يعرف بالنظام المسلماتي أو الأكسيوماتي (Axiomatic System) وتعرف الهندسة التي تتبنى هذا النظام بهندسة المسلمات أو الهندسة الأقليدية (Euclidean Geometry) (أنظر الباب الأول حيث تحدثنا عن مسلمات إقليدس بالتفصيل) .

د- <u>الهندسة بعد إقليدس:</u>

وفي بداية القرن الثاني قبل الميلاد جاء أحد تلاميذ مدرسة إقليدس وهو الرياضي السكندري هيبسيكليس (hypsicles) (٢٢٠-١٦٠ ق.م) وأضاف إلى كتاب الأصول الفصلين الرابع عشر والخامس عشر والذي عالج فيهما المجسمات بصورة أوسع حيث درس المجسمات المنتظمة ذات العشرين وجها (Icosahedrons) وذات الأثنى عشر وجهاً (Dodecahedron).

ومن أتباع مدرسة إقليدس الرياضية بجامعة الإسكندرية كان الرياضي الشهير أبولونيوس (٢٦٢-١٩٩ ق.م) الذي اقترنت القطوع المخروطية باسمه والتي كان

ميناخموس أول من عرفها قبل أبو لونيوس بنحو مائة عام، غير أن أبو لونيوس قام بدراسة خواصها. وهو الذي أطلق عليها أسماء القطع الناقص والزائد والمكافئ.

وفي القرن الثاني الميلادي ظهر بطليموس الإسكندري الذي عاش في الفترة (٨٧-١٦٥م) وأشتهر بكتابه في علم الفلك والمسمى (المجسطى) أي (الكبير) والذي ضم إلى جانب الفلك معلومات وافيه في الحساب والهندسة تضمنت خواص بعض الأشكال الهندسية ومحاولة لإثبات أحدى مسلمات إقليدس والمعروفة بمسلمة التوازي.

وفي نهاية القرن الثالث وبداية القرن الرابع الميلادي ظهر بابوس الأسكندري وهو من أواخر العلماء الذين عملوا كأساتذة للرياضيات بجامعة الإسكندرية القديمة وعاش في الفترة (٢٦٠-٣٢٠م) ووضع نظريته الشهيرة بنظرية بابوس والتي تنص على أن: " حجم المجسم الدورانى يساوى مساحة القطع المولد للحجم مضروباً في محيط الدائرة الناتجة عن دوران مركز ثقل تلك المساحة "، واستخدمت تلك النظرية في تحديد مراكز الأثقال لبعض المساحات والأشكال الهندسية، وقد بين بابوس أيضاً كيفية رسم قطع مخروطي يمر بخمسة نقاط معلومة.

(٣) <u>انتقال علم الهندسة إلى علماء العرب والمسلمين:</u>

أ- جاء العرب بداية من عصر الخليفة العباسي أبو جعفر المنصور الذي حكم في بغداد في الفترة (٧٥٣-٧٧٥م) ، فاهتموا بالعلوم من طب ورياضيات وفلك اهتماماً كبيراً، وكان اهتمامهم بالرياضيات يمثل اهتماماً خاصاً وذلك لعلمهم بأنها كانت في عهد قدماء المصريين والإغريق أداة لحل المشكلات اليومية، وفي ذلك يقول سترويك في كتابه (مختصر تاريخ الرياضيات).

" إن العلماء العرب جمعوا التراث الإغريقي وترجموه بإخلاص إلى اللغة العربية، ومن تلك الترجمات تعرف العالم الغربي علي أعمال إقليدس وأرشميدس وأبولونيوس وبطليموس وغيرهم"

وكان لتشجيع الخلفاء للعلماء وتقريبهم إليهم وتوفير كافة الإمكانات لهم من تشييد لمراكز العلم والتعليم وجلب الكتب القديمة لترجمتها ومنح المترجمين حوافز مادية كبيرة، أثر كبير في تقدم العلوم وازدهارها في ذلك الوقت.

وقد ترجم العلماء العرب والمسلون في تلك الفترة عدداً كبيراً من الكتب في مختلف فروع العلم ومنها الرياضيات، ثم قاموا بنقد ما رأوه مجافٍ للمنطق والحقيقة في تلك الكتب وزادوا عليها إضافات قيمة، وفي هذا يقول جورج سارتون في كتابه (مقدمة في تاريخ العلم):

" لولا إضافات العرب والمسلمين الهامة إلى كنوز الحكمة اليونانية التي ترجموها لتوقف سير المدنية بضعة قرون، والواقع أن المسلمين أنقذوا العلوم القديمة وحفظوها من الضياع وأضافوا إليها إضافات أساسية هامة"

ومن أوائل الكتب الرياضية التي تم نقلها إلى العربية – ونقلها عنهم الغرب بعد ذلك– كتاب الأصول لإقليدس، وكان أول من قام بترجمته: الحجاج بن يوسف بن مطر (٧٨٦–٨٣٥م) الذي ترجم الفصول الستة الأولي من الكتاب والخاصة بالهندسة المستوية، ثم قام حنين بن أسحق (٨٠٩–٨٧٣م) شيخ المترجمين في عهد الخليفة المأمون بترجمة الكتاب كاملاً، وجاء أبنه إسحق بن حنين (٨٢٧–٩١٠م) فأعاد النظر في بعض ترجمات أبيه لأنه كان أفصح منه بالعربية وكانت ترجماته أوثق من ترجمات سابقيه، وقام إسحق بن حنين بإعادة ترجمة كتاب الأصول كما قام بالتعليق عليه.

وتأتي ترجمة كتاب الأصول في بدايات عصر الترجمة كدلالة على إهتمام العرب آنذاك بعلم الهندسة ، ونلاحظ أن العرب في تلك الفترة قد توسعوا في البحث في الهندسة أكثر من بحثهم في فروع الرياضيات الأخرى، ومن الأسباب التي دعت إلي ذلك نذكر ما يلي:

١– وجود تلازم منطقي وتتابع محكم بين القضايا الهندسية على المستوى النظري، فمن بديهيات ومسلمات تتصف بالوضوح والصدق، يستنتج الباحث قضايا هندسية تتميز بدرجة كبيرة من الدقة واليقين.

٢- احتياج الباحثين في العلوم الأخرى كالعلوم الطبيعية والفلك والميكانيكا (أو علم الحيل كما كان يسمى) إلى الهندسة وخواص الأشكال الهندسية المختلفة لفهم طبيعة الظواهر المُوّجودة في تلك العلوم والمساعدة في شرح خواصها.

٣- علاقة الهندسة بالحياة اليومية التي منها إيجاد المساحات والحجوم بغية استخدامها في العمران والبناء والمجالات الأخرى كاستخراج المسافة بين بلدين وأستخراج سمت القبلة وإيجاد ارتفاع قمة جبل معين وغيرها.

ونظراً للارتباط الوثيق بين الهندسة والجبر فقد استخدم علماء الجبر بعد ترجمة كتاب الأصول ونقد محتوياته، القواعد الهندسية وخواص الأشكال وخاصة القطوع المخروطية في حل المعادلات الجبرية واستخراج المجاهيل وهو ما عرف بالحلول الهندسية للمسائل الجبرية، وللعرب في تلك الحلول إنجازات ليس لها مثيل ظهرت في مؤلفاتهم سواء المنشورة أو التي مازالت مخطوطة.

ب- أنتقل العلماء العرب بعد مرحلة النقل (أو الترجمة) إلى مرحلة دراسة وتمحيص المؤلفات التي ترجموها، وقاموا بنقد بعض ما ورد بها وأضافوا الكثير إليها، وكان أول من تصدى لتلك المهمة هو:

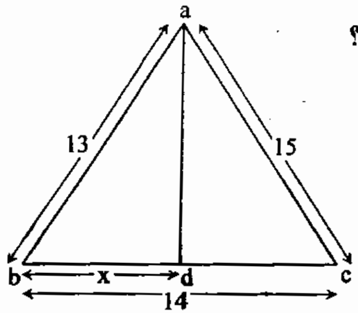
أبو عبدالله محمد بن موسى الخوارزمي (٧٨٠-٨٥٣م) مؤسس علم الجبر، حيث اشتمل كتابه الشهير في (الجبر والمقابلة) على عدة موضوعات هندسية منها برهانه لنظرية فيثاغورث في حالة المثلث القائم الزاوية والمتساوي الساقين، وقيامه بحساب مساحة المعين بالنسبة لقطريه وبالنسبة لقطر وضلع من إضلاعه، وقيامه بحساب مساحة المثلث مختلف الزوايا، وإيجاده للنسبة التقريبية (بين محيط الدائرة وقطرها).

وفي ذلك يقول المؤرخ الرياضي كاجوري في كتابه (تاريخ الرياضيات):

" إن ابتكار الخوارزمي لعلم الحبر قد ساعده على تطوير علم الهندسة، حيث وضع القواعد لحساب المساحات، وذكر البراهين الخاصة بها، كما درس المسطحات (المساحات المستوية) خاصة المثلث والمربع والدائرة، وأشار إلى العلاقات بين مربع الضلع الأكبر في المثلث ومجموع الضلعين الآخرين"

أمثلة لمسائل هندسية وردت عند الخوارزمي

مثال (١): إيجاد مساحة مثلث معروف أطوال أضلاعه الثلاثة



المثال يقول: مثلث أضلاعه 13,14,15 فكم مساحته؟

الحل: نوجد ارتفاع المثلث أي ad

نسمي bd بالشيء (x)

$\therefore dc = 14 - x$

ونطبق نظرية فيثاغورث على المثلث adc

القائم الزاوية عند d :

$$(15)^2 = (ad)^2 + (14 - x)^2 \rightarrow (ad)^2 = (15)^2 - (14 - x)^2 \qquad (1)$$

وبتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث abd القائم الزاوية عند d أيضاً:

$$(13)^2 = (ad)^2 + x^2 \rightarrow (ad)^2 = (13)^2 - x^2 \qquad (2)$$

بمساواة (2),(1) نجد أن:

$$(15)^2 - (14 - x)^2 = (13)^2 - x^2$$

$$\therefore 225 - (196 - 28x + x^2) = 169 - x^2$$

$$\therefore 140 = 28x \quad \rightarrow \quad x = \frac{140}{28} = 5$$

ومن ثم فإن:

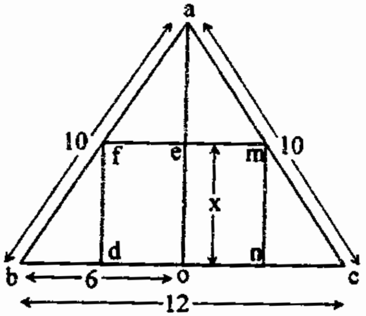
$$(ad)^2 = (13)^2 - (5)^2 = 169 - 25 = 144 \rightarrow ad = 12$$

وتصبح المساحة المطلوبة: مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ القاعدة × الأرتفاع

$$\therefore S = \frac{1}{2}(14)(12) = 84$$

مثال(٢): إيجاد طول ضلع مربع رسوم داخل مثلث متساوي الساقين

المثال يقول: مثلث أطوال أضلاعه 10,10,12 والمطلوب إيجاد طول ضلع المربع المرسوم فيه.



الحل: نطبق نظرية فيثاغورث على المثلث abo

$$(ab)^2 = (ao)^2 + (bo)^2$$

$$\therefore (10)^2 = (ao)^2 + (6)^2$$

$$\therefore (ao)^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \rightarrow ao = 8$$

وهو أرتفاع المثلث

مساحة المثلث abc:

$$s = \frac{1}{2} \times 12 \times 8 = 48 \qquad (1)$$

نفرض طول ضلع المربع $= x$، $bo = 6$، $od = \frac{x}{2}$، $bd = 6 - \frac{x}{2}$، $ae = 8 - x$

مساحة المثلث abc = مساحة المربع + مساحات المثلثات الثلاثة الباقية حيث:

مساحة المربع = x^2.

مساحة المثلثات:

$$\Delta bfd = \frac{1}{2}(db)(fd) = \frac{1}{2}(6 - \frac{x}{2})(x) = \Delta mnc$$

$$\Delta afm = \frac{1}{2}(fm)(ae) = \frac{1}{2}(x)(8 - x)$$

$$\therefore 48 = x^2 + 2[\frac{1}{2}(6 - \frac{x}{2})(x)] + \frac{1}{2}(x)(8 - x)$$

$$= x^2 + 6x - \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{x^2}{2} = 10x \rightarrow x = \frac{48}{10} = 4.8$$

وهو طول ضلع المربع.

ج- ومن العلماء العرب الذين أسهموا في تطور علم الهندسة، نذكر أبو الحسن ثابت بن قرة (٨٣٥-٩٠١م) الذي كان يحسن عدة لغات منها اليونانية والسريانية والعبرية ويجيد الترجمة إلى العربية من هذه اللغات، وقد ترجم كتاب المجسطي لبطليموس وترجم مؤلفات أرشميدس وأولونيوس وهيبسكليس وقام بنقدها وأضاف الكثير إليها، ومن أهم الكتب التي ترجمها ثابت:

كتاب المخروطات لأبولونيوس وكتاب الكرة والأسطوانة لأرشميدس وكتاب المخروطات لثيودوسيوس وغيرها، كما ألف ثابت كتاباً في (المسائل الهندسية) وكتاباً في (تصحيح مسائل الجبر بالبراهين الهندسية) وكتاباً في (مساحة الأشكال المسطحة والمجسمة)، ورسالة في (المخروط المكافئ) ورسالة أخرى في (المثلث القائم الزاوية) وغيرها.

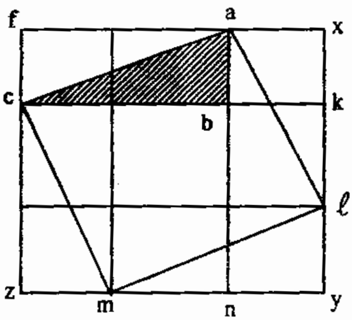
وقد وصفه كارل فنك في كتابه (المختصر في تاريخ الرياضيات):

بأنه أعظم عالم هندسي في القرون الوسطى وأنه ترجم وعلق على ثمانية كتب عن القطوع لأبولونيوس وأرشميدس وبطليموس والتي بقيت مدة طويلة مرجعاً أساسياً للدارسين في الغرب بعد ترجمتها إلى اللاتينية.

وقد قام ثابت بإيجاد حجم الجسم المتولد عن دوران القطع المكافئ حول محوره، وبذل جهداً كبيراً في إيجاد برهان يعمم به نظرية فيثاغورث لأي مثلث مختلف الأضلاع بعد أن أثبتها للمثلث القائم الزاوية.

<u>إثبات ثابت بن قرة لنظرية فيثاغورث للمثلث قائم الزاوية:</u>

ذكر هذا الإثبات الدكتور بول روس في كتابه (ملخص تاريخ الرياضيات)



ليكن لدينا Δabc القائم الزاوية في b

ننشئ مربعاً على كل ضلع من أضلاعه.

والمطلوب إثبات أن:

$$(ac)^2 = (ab)^2 + (bc)^2$$

نوجد مساحة المربع xyzf

بطريقتين كالآتي:

$$\square xyzf = \square acm\ell + 4\Delta \ell ym \qquad (1)$$

$$\square xyzf = \square abkx + \square bczn + 4\Delta \ell ym \qquad (2)$$

من (2),(1) بالطرح نجد أن: $\square acm\ell = \square abkx + \square bczn$

$$\therefore (ac)^2 = (ab)^2 + (bc)^2$$

وهو المطلوب.

وقد ذكر الدكتور هوارد إيفز هذا البرهان في كتابه (تاريخ الرياضيات) وقال أن ثابت بن قرة قام بتعميم هذا البرهان لأي مثلث مختلف الأضلاع وذلك في رسالة له نشرت عام ٨٩٠م. ، وذكر الدكتور إيفز البرهان كاملاً.

ويذكر لثابت بن قرة أيضاً محاولته برهان المسلمة (أو المصادرة) الخامسة لإقليدس والمعروفة بمسلمة التوازي وذلك في مقالة شهيرة تحمل عنوان (برهان المصادرة المشهورة من إقليدس).

د- ومن العلماء العرب الذين أسهموا في تطور الهندسة أيضا نذكر:

إبراهيم بن سنان الحراني (٩٠٨-٩٤٦م) حفيد ثابت بن قرة، وله في الهندسة مآثر جمه، فقد كتب – كما يقول ابن النديم في كتابه (الفهرست) – ثلاثة عشر مقالة في الهندسة ثم أتمها بمقالة ذكر فيها إحدى وأربعون مسألة هندسية من أصعب المسائل وقام بحلها بدقة ومهارة، وهي مسائل تتعلق بالدوائر والخطوط والمثلثات وغيرها من الأشكال الهندسية.

وله كتاب بعنوان (رسم القطوع) درس فيه خواص القطوع المخروطية وطرق رسمها باستخدام البركار (البرجل) والمسطرة والبركار المخروطي، وله أيضاً رسالة بعنوان (استخراج المسائل الهندسية بالتحليل والتركيب) ذكر فيها كيفية حل المسائل الهندسية بطريقتي التحليل والتركيب، وما يتعرض إليه العاملون في الهندسة من أخطاء في تلك الحلول.

هـ- ومنهم أيضاً: أبو الوفاء محمد البوزجاني (٩٤٠-٩٩٨م)، والذي قال عنه ابن خلكان في كتابه (وفيات الأعيان): "وله في علم الهندسة إستخراجات غريبة لم يسبقه إليها أحد".

وهو أول من أوجد حلولاً هندسية متقدمة للمعادلات الجبرية من الدرجة الرابعة.

وقد وضع البوزجاني في الهندسة كتابين هامين هما:

١- كتاب (ما يحتاج إليه الصناع من أعمال الهندسة) ويحتوى على عدد من الإنشاءات الهندسية الهامة وخاصة في مجال إيجاد مساحة الأراضي والهندسة المعمارية، وبه أجزاء نظرية متقدمة للغاية لشرح تلك الإنشاءات. والكتاب يمكن تصنيفه على أنه ينتمي إلى الهندسة العملية أو التطبيقية.

٢- كتاب (عمل المسطرة والبركار والكونيا) والبركار هو ما يطلق عليه في العامية (البرجل) والكونيا هي المثلث القائم الزاوية الذي يستخدمه المهندسون والصناع في قياساتهم، ويحتوى الكتاب على عدد كبير من العمليات الهندسية الإنشائية، وقد ترجم الكتاب إلى اللاتينية بواسطة جيرارد الكريموني حوالي عام ١١٧٠ تحت اسم (الإنشاءات الهندسية) وأعتبر بذلك أول كتاب في الإنشاءات الهندسية والرسم الهندسي في تاريخ العلم.

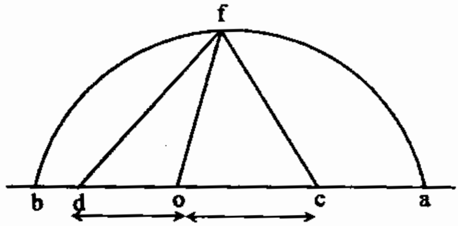
و- ومن علماء العرب والمسلمين الذين لهم مساهمات قيمة في علم الهندسة نذكر: <u>أبو على الحسن بن الهيثم (٩٦٥-١٠٣٩م)</u> العالم الموسوعي الكبير الذي قال عنه ابن القفطى في كتابه (أخبار العلماء بأخبار الحكماء):" أنه صاحب التصانيف والتأليف في علم الهندسة، حيث كان عالماً بهذا الشأن متقناً له ، متفنناً فيه، قيماً بغوامضه ومعانيه"

ونذكر من مؤلفاته في الهندسة: كتاب (شرح مسلمات كتاب الأصول لإقليدس)، شرح فيه كتاب الأصول وفصل ما غمض منه، كتاب (حل شكوك إقليدس في الأصول وشرح معانيه)، حاول فيه حل الشكوك التي أثيرت في بعض المسائل والبراهين التي وردت عند إقليدس. وقد حاول الحسن في هذين الكتابين برهان المسلمة الخامسة لإقليدس والمعروفة بمسلمة التوازي، وتوصل في هذا البرهان إلى نتائج هامة شغلت بال علماء الغرب بعد ترجمتها إلى لغاتهم وحتى القرن الثامن عشر.

ومن مؤلفات ابن الهيثم في الهندسة أيضاً نذكر كتابه (في المساحات على جهة الأصول) ذكر فيه قواعد عامة لإيجاد مساحات الأشكال الهندسية المستوية والمجسمة وأعطى قوانين دقيقه لمساحات المثلث والكرة والهرم والأسطوانة المائلة والقطاع الدائري والقطعة الدائرية.

وله أيضاً في الهندسة كتاب (تحليل المسائل الهندسية وتركيبها).

وقد وضع ابن الهيثم العديد من المسائل في كتابه الأخير هذا وقام بإثباتها رياضياً، ونذكر منها المسألة الآتية على سبيل المثال:



إذا كانت c,d نقطتان

على القطر ab بعداهما عن

مركز الدائرة o متساوٍ ، فيكون

مجموع مربعي كل خطين يخرجان من النقطتين

ويلتقيان على المحيط يساوى ضعف مجموع مربع نصف القطر مع مربع الخط الواصل بين إحدى النقطتين ومركز الدائرة، أي أن:

$$(fd)^2+(fc)^2=2[(of)^2+(oc)^2]$$

ولإثبات ذلك (بطريقة ابن الهيثم):

نعتبر f نقطة على محيط الدائرة التي مركزها o ونصف قطرها ab وأن c,d نقطتان على ab بحيث أن : $co=od$

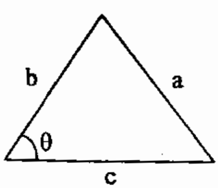
ففي Δfco: (1) $(fc)^2=(of)^2+(oc)^2-2(of)(oc)\cos(foc)$

وفي Δfdo: (2) $(fd)^2=(of)^2+(od)^2-2(of)(od)\cos(fod)$

وحيث أن $od=co$ فجمع (1),(2): $(fc)^2+(fd)=2[(of)^2+(oc)^2]$

وهو المطلوب.

وجدير بالذكر أن ابن الهيثم طبق هنا قانون جيب التمام الذي ينسبه بعض المؤرخي إلى غياث الدين الكاشي الذي ظهر بعد ابن الهيثم بنحو ٤٠٠ عام، وإن كان البعض ينسبه أيضاً لأبي النصر منصور بن عراق (٩٧٠-١٠٣٧) الذي كان معاصراً لأبن الهيثم.



وينص هذا القانون على الآتي: إذا كانت θ هي الزاوية الحادة بين الضلعين اللذان طولاهما b , c في مثلث وكان a هو طول الضلع المقابل للزاوية فإن: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\theta$

ز- ومن العلماء الذين أسهموا أيضاً في تطوير الهندسة نذكر **أبو بكر الكرخي الحاسب (٩٧١-١٠٢٩م)** الذي عمم قانون هيرون السكندري القاضي بتعيين مساحة المثلث بدلالة أطوال أضاعه، وهو : $s=\sqrt{\ell(\ell-a)(\ell-b)(\ell-c)}$

حيث ℓ = نصف محيط المثلث، a,b,c أطوال أضلاع المثلث.

بحيث صار ينطبق على أي شكل رباعي، فإذا كانت ℓ تمثل نصف محيط الشكل الرباعي، وكانت أطوال أضلاعه هي a,b,c,d فإن الكرخي أوجد الصورة الآتية: لمساحة أي شكل رباعي: $s=\sqrt{(\ell-a)(\ell-b)(\ell-c)(\ell-d)}$

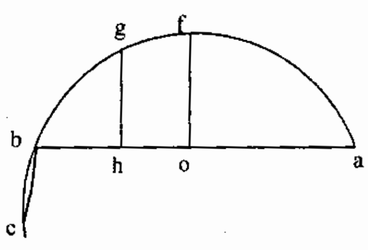
ويعرف هذا القانون بقانون الكرخي لمساحة الشكل الرباعي.

ح- ومنهم أيضاً **أبو الريحان محمد البيروني (٩٧٣-١٠٤٨)** الذي كان له براعة كبرى في علم الهندسة، ومن كتبه الهندسية كتاب (استخراج الأوتار في الدائرة بخواص الخط المنحنى فيها)، وقد أراد البروني في هذا الكتاب كما ذكر هو في مقدمته: تصحيح دعوى (نظرية) لقدماء اليونانيين في انقسام الخط المنحنى في كل قوس (من محيط دائرة) بالعمود النازل عليها من منتصفها (منتصف القوس) والبحث عن خواصه.

والذي يعنيه البيروني هنا قضيتين:

١- إذا رسمنا قوساً ورسمنا في داخلها خطاً مستقيماً، ثم أخذنا نقطة في منتصف جزء القوس المحدودة بذلك الخط وأسقطنا منها عموداً على الخط المرسوم في داخل القوس فإن هذا العمود ينصف ذلك الخط المستقيم.

٢- إذا رسمنا قوساً ورسمنا في داخلها خطاً منحنياً، ثم أخذنا نقطة في منتصف جزء القوس المحدودة بطرفي ذلك المنحنى وأسقطنا منها عموداً على الجزء الكبير من الخط المنحنى، فإن هذا العمود ينصف ذلك المنحنى بحيث يكون القسم الكبير من الخط المنحنى مساوياً للقسمين الباقيين منه، ولنمثل ذلك بالصورة الآتية:



ليكن ab خطاً مستقيماً في القوس afgbc،

فإذا كانت f هي منتصف القوس afgb،

وكان fo العمودي على ab فإن ao=ob

وإذا كانت g هي منتصف القوس afgbc

وكان gh عمودي على ab، فإن: $ah = hb + bc$

ويبني أبو الريحان البيروني في كتابه (استخراج الأوتار في الدائرة) الدعوى (أو القضية أو النظرية) الآتية:

"إذا قسمت قوس بنصفين ثم بقسمين مختلفين، فإن مضروب وترى القسمين المختلفين أحداهما بالآخر مع مربع وتر ما بين النصف وبين أحد المختلفين مساو لمربع وتر نصف القوس"

وهذا يعني أنه إذا قسم القوس afgbc بنصفين عند نقطة g ثم بقسمين مختلفين ab,bc، وكان gb هو ما بين النصف g والقسم cb، وكان نصف القوس هو ag فإن:

$$(\text{وتر } ab \times \text{وتر } bc) + \text{وتر } (gb)^2 = \text{وتر } (ag)^2$$

وإذا كان $gb = ab - ag \leftarrow (gb)^2 = (ab-ag)^2 = (ag-ab)^2$

وتصبح العلاقة السابقة: $(\text{وتر } ab \times \text{وتر } bc) + \text{وتر } (ag-ab)^2 = \text{وتر } (ag)^2$

ويمكن تعميم هذه العلاقة كالآتي: إذا كان لدينا قوس فيها خط منحنى بقسمين غير متساويين $ab = A\ ,\ bc = B$ فإن: $ag = \dfrac{A+B}{2}$

وبذلك فإن:

$$(A \times B) + \left(\frac{A+B}{2} - A\right)^2 = \left(\frac{A+B}{2}\right)^2$$

ولنطبق هذه العلاقة بأخذ رقم وليكن 10 ونقسمه قسمين غير متساويين

$$A = 7,\ B = 3$$

$$\therefore (7\times 3) + \left(\frac{7+3}{2} - 7\right)^2 = \left(\frac{7+3}{2}\right)^2 \rightarrow 21 + (-2)^2 = (5)^2 \rightarrow 25 = 25$$

أي أن الطرف الأيمن يساوي الطرف الأيسر.

ط- ومنهم أيضاً: نصير الدين الطوسي (١٢٠١-١٢٧٤م) نابغة عصره في الرياضيات والفلك، وصاحب المؤلفات المتميزة في الهندسة والتي منها:

كتاب (قواعد الهندسة)، كتاب (تحرير أصول إقليدس)، كتاب (مساحة الأشكال البسيطة والكروية)، إضافة إلى رسالتين حاول فيهما برهان مسلمة التوازي لإقليدس وهما:

الرسالة الشافية عن الشك في الخطوط المتوازية، رسالة في المصادرة (المسلمة) الخامسة لإقليدس.

وقد ترجمت مؤلفات الطوسي في الهندسة بواسطة العالم الإنجليزي چون واليس (١٦١٦-١٧٠٣م) في القرن السابع عشر وكانت أساساً لمحاضراته في الهندسة بجامعة أكسفورد آنذاك.

(٤) <u>مسلمة التوازي ومحاولات إثباتها:</u>

أ- تعرض إقليدس في كتابه (الأصول) وفي المقالة الأولى منه إلى أساسيات الهندسة، ووجد أنها تعتمد على مجموعة من التعريفات وخمس مسلمات (أو فرضيات أو مصادرات كما أسماها بعض العلماء العرب عند ترجمتهم لكتاب الأصول) هندسية تقبل صحتها بدون برهان، وكان أهم تلك المسلمات المسلمة الخامسة المعروفة بمسلمة التوازي وتنص على الآتي:

" من أي نقطة خارجة عن مستقيم معلوم يمكن رسم مستقيم واحد موازٍ له"

ولم يستطع إقليدس إثبات تلك المسلمة أو عرضها على هيئة نظرية.

وكان أول من لاحظ قصوراً في هندسة إقليدس هو العالم الشهير أرشميدس (٢٨٧-٢١٢ق.م) الذي قال: أن إقليدس وضع النسب بين الأطوال والحجوم والمساحات ولم يقدم كيفية قياسها بطريقة دقيقة، كما أن مسلمة التوازي كانت تبدو معقدة جدا، وحاول أرشميدس معالجة هذا القصور بوضعه مسلمات أو فرضيات جديدة عرفت بمسلمات أرشميدس حاول فيها إسقاط مسلمة التوازي (انظر الباب الأول في ذلك).

وكان الشغل الشاغل للعلماء في تلك الأزمنة هو محاولة إيجاد إثبات نظري لتلك المسلمة (مسلمة التوازي)، حيث كان معظم هؤلاء العلماء ينظرون إلى هندسة إقليدس ونتائجها على أنها صادقة صدقا مطلقاً، غير إن مسلمة التوازي التي لم يتم برهانها منذ البداية جعلها توضع في موضع شك من طرف العديد من العلماء.

وكان أول العلماء الذين شغلتهم تلك المسلمة وحاولوا إثباتها في القرن الخامس الميلادي على يد الرياضي والفيلسوف اليوناني بروكلس Proclus (٤١٠-٤٨٥م) وذلك بمحاولته إثبات مسلمة مكافئة لها.

ب- وبعد انتقال الهندسة إلى العلماء العرب والمسلمين وترجمتهم لكتاب إقليدس حوالي عام ٨١٠م على يد الحجاج بن مطر أولا ثم حوالي عام ٨٣٠م على يد حنين بن إسحق ، قام العديد منهم بمحاولات جادة لإثبات مسلمة التوازي، ونذكر من تلك المحاولات:

١- محاولة العباس بن سعيد الجوهري (٧٩٥-٨٦٠م) الذي كان معاصراً للخوارزمي وقام بدراسة المسلمات في كتابه (إصلاح كتاب الأصول) وحاول برهان المسلمة الخامسة، ولكن برهانه كان غير كامل.

٢- محاولة ثابت بن قرة الحراني (٨٣٥-٩٠١م) والذي ظهر له في هذا الموضوع مقاله في (برهان المصادرة المشهورة من إقليدس) ومقاله في (أن الخطين إذا أخرجا على أقل من زاويتين قائمتين التقيا).

٣- محاولة الحسن بن الهيثم (٩٦٥-١٠٣٩م) والذي عالج المسلمة بالتفصيل في كتابين هما: شرح مسلمات إقليدس، حل شكوك كتاب إقليدس في الأصول وشرح معانيه.

وقد حاول الحسن إعطاء برهان لتلك المسلمة وتوصل إلى نتائج هامة شغلت بال علماء الغرب الذين ترجموا كتابيه حول هذا الموضوع ودرسوهما بالتفصيل واستفادوا من محاولته تلك وذكروا ذلك في مؤلفاتهم.

٤- محاولة عمر الخيام (١٠٤٨-١١٣١م) وذلك في كتابه (شرح ما أشكل من مصادرات كتاب إقليدس) حيث قام ببرهان المصادرة (أو المسلمة) الخامسة بالاستناد إلى مسلمة أخرى مكافئة لها هي: أن المسافة بين مستقيمين متوازيين ثابتة، واستخدم الخيام في برهانه رباعي أضلاع فيه ثلاث زوايا قائمة، وأثبت أن الزاوية الرابعة في الشكل تكون قائمة، وهي مسلمة مكافئة لمسلمة التوازي.

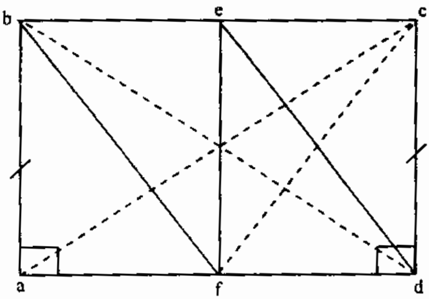
٥- محاولة **نصير الدين الطوسي (١٢٠١-١٢٧٤م)** وهو صاحب أدق وأوضح ترجمة عربية لكتاب (الأصول)، وقام في كتابه (تحرير أصول إقليدس) وفي رسالتيه: رسالة في المصادرة الخامسة لإقليدس، الرسالة الشافية عن الشك في الخطوط المتوازية، بإعطاء عدة براهين مختلفة لتلك المسلمة.

٦- محاولة **شمس الدين السمرقندي (١٢٢١-١٢٩١)** وهو آخر من حاول برهان مسلمة إقليدس من العلماء العرب والمسلمين وذلك في كتابه (أشكال التأسيس في الهندسة) والذي أشتمل على إثبات ٣٥ نظرية من أصل ٤٨ نظرية وردت في كتاب إقليدس، كما قام بإثبات المسلمة الخامسة مستخدماً إحدى تلك النظريات.
وفي كتابه القيم: رياضيات الحضارة الإسلامية وتطبيقاتها للدكتور فالح الدوسري (مكة المكرمة- ٢٠٠٣م) عرض تفصيلي لتلك المحاولات لمن أراد الرجوع إليها.

مثال لمحاولة الخيام برهان مسلمة التوازي لإقليدس:

أثبت الخيام المسلمة المكافئة لمسلمة إقليدس الخامسة وهي أنه إذا أحتوى الشكل الرباعي على ثلاث زوايا قوائم فإن زاويته الرابعة تكون أيضاً قائمة، وقسم البرهان إلى ثلاثة أجزاء:

الجزء الأول: إذا كانت ad قطعة مستقيمة رسم عليها العمودان المتساويان ab,dc فينتج لدينا الشكل الرباعي abcd الذي فيه زاويتين متجاورتين a,d قائمتين، وساقين متقابلين ab,dc متساويين.



ثم برهن الخيام تساوي الزاويتين abc، dcb وذلك بتطابق المثلثين abd , adc (ضلعان وزاوية محصورة بينهما) ومن التطابق نجد أن $ac = bd$، وبالتالي فإن المثلثين abc , bcd يكونان متطابقان (التساوي الأضلاع الثلاثة في كل منهما) ومن التطابق ينتج تساوي الزاويتين b,c.

الجزء الثاني: يثبت الخيام أن العمود المقام من منتصف bc ينصف ad ويكون عمودياً عليه، وذلك بتطابق المثلثين fab , fdc.

ومن التطابق ينتج أن: cf = bf، الزاوية afb = الزاوية cfd ومنه ينتج أن الزاوية efb = الزاوية cfe وبالتالي فإن المثلثين fec، feb يكونان متطابقان، ومن التطابق ينتج أن be = ec وكذلك الزاوية feb = الزاوية fec، وحيث أن هاتين الزاويتين متجاورتين فتكون كل منهما قائمة، وإذن يكون fe عمود منصف للقمة bc، وإذا يكون ad موازياً لـ bc بسبب تساوي الزاويتين efa و fec المتبادلتين.

الجزء الثالث: وباعتبار أن المسافة بين مستقيمين متوازيين ثابتة، أعاد الخيام البرهان على الشكل الرباعي efdc المتساوي الساقين واستنتج أن الزاوية fec = الزاوية dce = ٩٠ درجة وبذلك تكون الزاوية الرابعة في الشكل الرباعي ذي ثلاث زوايا قوائم قائمة أيضاً، ويكون الشكل الرباعي abcd مستطيلاً، وبذلك نكون قد أثبتنا المسلمة الخامسة.

ج- وبعد انتقال العلم إلى الغرب وأفول نجم الحضارة العربية الإسلامية وابتداء من القرن السابع عشر الميلادي، ظهرت محاولات متعددة لإثبات مسلمة التوازي لإقليدس، ومن تلك المحاولات نذكر المحاولات التالية:

١- محاولة الرياضي الإنجليزي **جون واليس** (١٦١٦-١٧٠٣) أول من استخدم العلامة (∞) كرمز للمالانهاية، والذي قام بترجمة أعمال نصير الدين الطوسي حول نظرية المتوازيات إلى اللاتينية، وأعطى هو أيضاً إثباتاً آخر لتلك المسلمة.

٢- محاولة الرياضي الايطالي **جيرولا موسكاري G. Sacchari** (١٦٦٧-١٧٣٣) الذي درس مؤلفات ابن الهيثم والطوسي، وحاول إثبات المسلمة الخامسة في كتابه (إقليدس، المخلّص من كل خطأ) الذي نشر عام ١٧٢٣.

٣- محاولة الرياضي الفرنسي **جوهان لامبيرت** (١٧٢٨-١٧٧٧) الذي كتب عام ١٧٦٣ بحثاً حول مسلمة التوازي لإقليدس، وإثباتها عن طريق تحويلها إلى مسلمات مكافئة.

٤- محاولة الرياضي الفرنسي **أدريان ليجندر** (١٧٥٢-١٨٣٣) الذي قدم عام ١٨٢٣ محاولة لإثبات المسلمة الخامسة باستخدام بقية المسلمات ونظريات إقليدس الأخرى.

٥- محاولة الرياضي المجري **ولفجانج بولياى** (١٧٧٥- ١٨٥٦) لإثبات تلك المسلمة في كتاب له صدر عام ١٨٣٢، وكانت هذه المحاولة هي آخر المحاولات لإثبات مسلمة التوازي في تلك الفترة.

(٥) ظهور الهندسات اللا إقليدية:

أ- كانت المحاولة الأولي لظهور هذا النوع من الهندسات هي محاولة الرياضي الروسي لوباتشفسكي (١٧٩٤-١٨٥٦) الذي أثبت عام ١٨٢٩ أن مسلمة التوازي مستقلة منطقياً عن باقي مسلمات إقليدس، وأنها لا تنتج عن باقي المسلمات الأخرى، وقام لوباتشفسكي بوضع هندسة جديدة تستند على كل مسلمات إقليدس ما عدا المسلمة الخامسة والتي استبدلها بمسلمة جديدة مخالفة لها، وتنص على الآتي:"

"من نقطة خارج خط معين يمكن رسم عدد محدود من الخطوط الموازية له"

وقد أدى ذلك إلى نتيجة هامة مؤداها أن: "مجموع زوايا المثلث يمكن أن تكون أقل من زاويتين قائمتين".

ولم ينشر لوباتشفسكي فكرته تلك إلا عام ١٨٤٠ في كتاب له بعنوان: (نظرية المتوازيات).

ويلاحظ أنه بعد ثلاث سنوات من توصل لوباتشفسكي إلى تلك الهندسة المخالفة لهندسة إقليدس، وفي عام ١٨٣٢، نشر الرياضي المجري چون بولياى (١٨٠٢-١٨٦٠) – في ملحق لكتاب والده ولفجانج بولياى صاحب آخر المحاولات لإثبات مسلمة إقليدس الخامسة- لاكتشافه لنفس النوع من الهندسة.

وقد أهتم علماء الرياضيات في ذلك الوقت بدراسة هندسة لوباتشفسكي والتي أطلق عليها چون بولياي أسم الهندسة اللاإقليدية، وكان أولهم الرياضي الايطالي يوجينو

بلترامي (١٨٣٥-١٩٠٠) الذي أثبت عام ١٨٦٨ إتساق تلك الهندسة إعتماداً على مبادئ الهندسة التفاضلية، وفي عام ١٨٧١ قدم الرياضي الألماني فليكس كلاين (١٨٤٧-١٩٢٥) برهاناً آخر لاتساق هندسة لوباتشفسكي أعتماداً على مبادئ الهندسة الإسقاطية، وقام بإثبات استقلالية مسلمة التوازي لإقليدس.

ويلاحظ أن لوباتشفسكي في البداية أطلق على هندسته أسم: الهندسة التخيلية (Imaginary Geometry)، وقال أن الهندسة الاقليدية قابلة للتطبيق أي أنها عملية وأن هندسته الجديدة أفضت إلى المفهوم الجديد للفراغ المجرد (abstract Space) وهو نظام مفيد في التحليل الرياضي وله تطبيقات عديدة في فروع الرياضيات المختلفة.

ب- وفي عام ١٨٥٤ توصل الرياضي الألماني چورج ريمان (١٨٢٦-١٨٦٦) إلى نوع جديد من الهندسة اللاإقليدية تختلف عن هندسة لوباتشفسكي، وبناها ريمان على افتراض عدم وجود خط موازٍ لأي مستقيم أي أنها لا تحتوى على خطوط متوازية، وذلك بوضعه المسلمة الآتية:

"من نقطة خارج مستقيم لا يمكن رسم أي موازٍ له، وأن أي مستقيمين كيفما كان وضعهما لا بد أن يتقاطعاً".

وقد أدى ذلك إلى ظهور النتيجة الآتية وهي:

أن مجموع زوايا المثلث يمكن أن يكون أكبر من زاويتين قائمتين.

وقد استخدمت الهندسة اللاإقليدية الجديدة التي أكتشفها ريمان فيما بعد من قبل ألبرت أينشتين (١٨٧٩-١٩٥٥) في نظريته النسبية العامة (عام ١٩١٧) وأطلق عليها أسم: الهندسة الريمانية (Riemannian Geometry).

ج- وقد قام فليكس كلاين عام ١٨٧١ بوضع العلاقة بين الهندسة الاقليدية ونوعى الهندسة اللاإقليدية (اللوباتشكيه والريمانية) فقال:

إن هندسة إقليدس تشير إلى سطح انحناؤه يساوي صفرا ويمكن تسميتها بالهندسة المكافئية (Parabolic Geometry)، بينما هندسة لوباتشفسكي تشير إلى سطح موجب الانحناء ويمكن تسميتها بالهندسة الزائدية (Hyperbolic Geometry)، بينما

تشير هندسة ريمان إلى سطح سالب الانحناء، وبذلك يمكن تسميتها بالهندسة الناقصية (Elleptic Geometry).

(٦) ظهور الهندسة التفاضلية:

أ- توصل كارل جاوس عام ١٨٢٧ في دراسته للفراغ الهندسي إلى مجموعة من الخصائص العامة للسطوح، والتي شكلت ما يعرف بالهندسة الذاتية أو الداخلية (Intrinsic Geometry) للسطوح.

وتهتم هذه الهندسة بدراسة الخواص التي يمكن ملاحظتها عن طريق ملاحظ أو مراقب (Observer) بواسطة قياسات على السطح نفسه مثل الأطوال والمساحات والزوايا، وكان منشأ هذه الهندسة هو الهدف العملي من عملية مسح الأراضي.
وخلافاً لذلك فإن أي دراسة أخرى للسطوح تسمى الهندسة الخارجية (Extrinsic Geometry).
وتعرف الهندسة الذاتية بأنها دراسة هندسة السطح دراسة ذاتية بغض النظر عن الفضاء المغمور فيه هذا السطح، ويعتبر ليونارد أويلر أول من درس تلك الهندسة بصورة مستفيضة وذلك عام ١٧٧١.

ب- وفي عام ١٨٦٨ نشر بلترامي تفسيره لهندسة لوباتشفسكي اللاإقليدية المستوية حيث قال: أن تلك الهندسة يمكن اعتبارها تحت شروط معينة هندسة ذاتية لبعض السطوح، وقد مكنه ذلك من أن يجعل الهندسة اللاإقليدية المستوية والهندسة الاقليدية المستوية تقع ضمن مجال حقيقي كامل كجزء من نظرية السطوح.

ج- وتعنى الهندسة التفاضلية بدراسة الخواص المحلية والموسعة للمجموعات التفاضلية (المنحنيات والسطوح) في الفراغ الأقليدي، وبصورة أخرى فهي تعني بدراسة المنحنيات والسطوح في الفضاءات المختلفة (ومنها الفضاء الإقليدي) باستخدام التفاضل والتكامل والجبر الخطي أيضاً

وقد بين جاوس عام ١٨٢٧ أن الخواص المحلية (المستنتجة عن طريق المشتقات التفاضلية) الهندسية تظل لا تغيريه (Invariant) طالما أن المسافة على السطح تظل لا تغيريه.

كما عرف ريمان عام ١٨٥٤ السطح بدون النظر إلى فـراغ يحتويـه، واستنتج خواصه المحلية من تعريف المسافة عليه. أما أويلر فقد عرف طول قـوس منحنـى ونصف قطر الإنحناء وإنحناء السطح سنة ١٧٦٠، كما قام بدراسة السطوح المعرفـة بمعادلات بارامترية عام ١٧٧١.

د- وتهتم الهندسة التفاضلية أيضاً بالدالة أو الدوال التي تولد المنحنى أو السطح المعروف بعديد الطيات (Manifold)، ويتم فيها دراسة الأشكال والمواضع الهندسية باستخدام خواص المشتقات التفاضلية وما يرتبط بها من جبر وتوبولوجي.

ومن العلماء الذين أسهموا في تأسيس الهندسة التفاضلية بعـد جـاوس وبلترامـي وريمان نذكر:

الفرنسي جاسبا مونج G. Monge (١٧٤٦-١٨١٨) الذي يعود إليه الفضل في إيجاد نظرية الغلافات (Envelopes) ونظرية خطوط الإنحناء ودراسته للمنحنيـات، وقـد نشر مونج أبحاثه في الفترة (٨٥-١٧٩٥).

وكذلك الفرنسي جاستون داربو G. Darbous (١٨٤٢-١٩١٧) صاحب النظريـة العامة للسطوح (المساحات) وثلاثي السطوح المعروف باسمه والـذي أدخـل مفهـوم الإطار المتحرك (Moving Frame) وعرفه ودرس خواصه حـوالي عـام ١٨٨٠، وقام بعد ذلك في بدايات القرن العشرين(حوالي عام ١٩٢٠) إيلي كارتان E. Cartan (١٨٦٩-١٩٥١) بتعميمه واستخدامه في حل العديد من مسائل الهندسـة التفاضـلية، وكذلك الفرنسي فردريك فرينيه F. Frenet (١٨١٦-١٩٠٠) صاحب ثلاثيات سطوح فرينيه، وصيغ (أو علاقات سيريه - فرينيه) لإيجاد صيغ الانحناء واللـي للمنحنيـات الفراغية، والتي كان للرياضي الفرنسي المعاصر لفرينيه: جوزيف سـيريه J.Serret (١٨١٩-١٨٨٥) دور كبير في صياغتها وذلك في كتابه (التطبيقات العملية للهندسـة) الذي نشر عام ١٨٥٠م.

ويعود الفضل للرياضي الإيطالي لويجى بيانكي J. Bianchi (١٨٥٦-١٩٢٨) في اكتشاف تعبير (الهندسة التفاضلية) عام ١٨٩٤، وذلك في كتاب له بهذا الاسم، وهو أول كتاب حمل اسم الهندسة التفاضلية.

(٧) ظهور الهندسة الاسقاطية:

أ- في نفس الوقت الذي بدا فيه جاوس دراساته عن نظرية السطوح (عام ١٨٢٧) ولوباتشفسكي دراساته حول نظرية التوازي (عام١٨٢٩) ظهر نوع جديد من الهندسة على يد الرياضي الفرنسي چان بونسليه J. Poncelet (١٧٨٨-١٨٦٧) وذلك عام ١٨٢٢ من خلال أول كتاب صدر بعنوان: الهندسة الأسقاطية (Projective Geometry). وكانت هذه الهندسة محكومة من خلال مفاهيم تصوريه (Pictorial Concepts)، كما كانت في أول الأمر بعيدة عن مشاكل المسلمات المعقدة التي أفرزتها الهندسة الاقليدية (هندسة المسلمات).

وقد أستخدم بونسليه في كتابه (الهندسة الاسقاطية) مفهوم المنظور (perspective) والقطوع المخروطية التي كان الرياضي الفرنسي جيرارد ديسارج G. Desargue (١٥٩٣-١٦٦٢) قد وضعها عام ١٦٣٦م.

ب- وفي عام ١٨٧٥ أعطى فليكس كلاين تفسيراً عاماً للأنظمة الهندسية الاقليدية (لإقليدس) واللاإقليدية (لكل من لوباتشفسكي وريمان) مبنياً على المبادئ التي وضعها بونسلية في الهندسة الاسقاطية، وكانت دراسات كلاين مرتبطة بشدة بمفهومه للهندسة على أنها دراسة اللامتغيرات (Invariants) لزمرة معينة من زمرات التحويل.

وكان كلاين قد وضع عام ١٨٧١ برنامج إيرلانجن الشهير أو برنامج (المدخل النظري للهندسة المبني على نظرية الزمر) والذي مكنه من إعطاء تصنيف للأنظمة الهندسية المختلفة والتحويلات المرتبطة معها، وأنها كلها يمكن استنتاجها من منظور الهندسة الإسقاطية، وعلى ذلك فإن كلاين في برنامجه أعتبر أن الهندسة الإسقاطية هي أم الهندسات المختلفة.

(٨) **ظهور الهندسة التحليلية وتطورها:**

أ- ظهر نظام الأحداثيات المتعامدة أول الأمر عند علماء الرياضيات في مدرسة الإسكندرية القديمة، وذلك في أعمال أرشميدس (٢٨٧-٢١٢ق.م) في كتابه (تربيع القطع المكافئ)، وفي أعمال أبو لونيوس (٢٦٢-١٩٠ق.م)، الذي استخدم الأحداثيات المتعامدة والمائلة في حل بعض المسائل. وعند انتقال العلم اليوناني إلى العرب تمت ترجمة أعمال أرشميدس وأبو لونيوس إلى العربية، وقام العلماء العرب بدراسة هذه الأعمال وتفسيرها ونقدها أيضاً، وكان ثابت بن قرة الحراني (٨٣٥-٩٠١م) أول من عالج المسائل الهندسية بأسلوب جبري وهو مجال الهندسة التحليلية، ولذلك فإن بعض المؤرخين يرون أن ثابت بن قرة هو أول من مهد لظهور الهندسة التحليلية، ومنهم كاچوري وسميث في كتابيهما عن (تاريخ الرياضيات) كل على حدة.

وتوالت إنجازات العلماء العرب والمسلمين في هذا المجال، وكان أهمهم: عمر الخيام (١٠٤٨-١١٣١م) الذي استخدم إحداثيات أبولونيوس عند حله لمعادلات الدرجة الثالثة والرابعة بطرق هندسية (وذلك عن طريق تقاطع القطوع المخروطية)، وكذلك عند حسابه للجذور التكعيبية.

ب- وبعد انتقال العلم إلى أوربا وفي القرن السابع عشر الميلادي استخدم الرياضي الفرنسي رنيه ديكارت (١٥٩٦-١٦٥٠) نظام الإحداثيات المتعامدة الذي ظهر في أعمال أرشميدس وأبولونيوس، واستخدمه الخيام (وغيره من العلماء العرب والمسلمين) في حل المسائل الهندسية بالطرق الجبرية، وقام ديكارت بتطوير هذا النظام وأصبح هو أول من استخدم هذا النظام من الإحداثيات في حل المسائل الهندسية، ولذلك أطلق على هذا النظام إسم الإحداثيات الديكارتية (أو الكارتيزية).

وقد قام كل من بييردي فيرما (١٦٠١-١٦٦٥) الذي كان معاصراً لديكارت، ثم ليونارد أويلر (١٧٠٧-١٧٨٣) الذي ظهر بعدهما بمائة عام، بتطوير نظام الاحداثيات الديكارتي هذا وطبقاه في حل مسائل هندسية مختلفة، ومن هنا نشأت الهندسة التحليلية وتطورت.

ج- ومن أهم الموضوعات التي تدرس باستفاضة في الهندسة التحليلية موضوع: القطوع المخروطية (Conic Sections)، ويعود اكتشافها إلى علماء الرياضيات اليونانيين القدامى، وكان أولهم ميناخموس (٣٨٠-٣٢٥ق.م) الذي اكتشف تلك القطوع وكان أول من استخدمها كمحاولة أولية لحل المعادلات الجبرية بطرق هندسية، إلا أن تلك القطوع اقترنت باسم أبولونيوس (٢٦٢-١٩٠ق.م) الذي وضع كتابه الشهير (قطوع المخروط) حوالي عام ٢٢٠ق.م ودرس فيه الخواص الهندسية لتلك القطوع، وهو الذي أطلق عليها أسماءها (المكافئ، الناقص، الزائد).

وعندما جاء العلماء العرب قاموا بترجمة ما كتبه اليونانيون عن القطوع المخروطية ودرسوه جيدا وألفوا فيه مؤلفات قيمة، ومن هؤلاء العلماء نذكر: ثابت بن قرة في كتابه: الشكل الملقب بالقطاع، ورسالته: مساحة قطع المخروط المسمى بالمكافئ. ومنهم: إبراهيم بن سنان حفيد ثابت بن قرة في كتابه (رسم القطوع) الذي درس فيه كيفية رسم القطوع المخروطية الثلاثة بطرق هندسية، مختلفة، ومنهم أيضاً: أبو سعيد أحمد السجستاني (٩٥٠-١٠٢٤) في كتابه (الشكل الملقب بالقطاع).

د- وكان غياث الدين جمشيد الكاشي (١٣٨٠-١٤٣٦) أول من طبق دراسته حول القطوع المخروطية على مدارات الكواكب، ففي كتابه (نزهة الحدائق) درس الكاشي القطوع المخروطية باستفاضة وأثبت أن مدارات القمر وكوكب عطارد هي مدارات إهليلجية (أي على شكل قطع ناقص).

وكان ربط الكاشي بين مدارات الكواكب والقطع الناقص مقدمه لتطبيق خواص القطوع المخروطية في علم الفلك، حيث تصور الفلكي البولندي كوبرنيكس (١٤٧٣-١٥٤٣) عام ١٥٤٢ (أي بعد وفاة الكاشي بنحو مائة عام) أن الكواكب تدور حول الشمس في مدارات دائرية، ولكن الفلكي الألماني جوهانز كبلر(١٥٧١-١٦٣٠) جاء عام ١٦٠٩ ليكمل نظام كوبرنيكس ويضع قوانينه الثلاثة الشهيرة المنظمة لحركة الكواكب وأهمها القانون الأول الذي ينص على أن " الكواكب تدور حول الشمس في مدارات على شكل قطوع ناقصة تقع الشمس في إحدى بؤرتيها ".

وقد أحدثت تلك القوانين طفرة كبرى في علم الفلك وفي الميكانيكا السماوية.

ومن أهم التطبيقات الحديثة والمعاصرة للقطوع المخروطية هو حساب مدارات المذنبات (Comets) في نظامنا الشمسي والذي أشهرها مذنب هالي الذي يتحرك في مدار على شكل قطع ناقص. وقم تم اكتشاف (٦١٠) مذنباً حتى عام ١٩٧٠ من بينهم (٢٤٥) مذنب تتحرك في مدارات على شكل قطوع ناقصة، (٢٩٥) مذنب ذات مدار على شكل قطع مكافئ، (٧٠) مذنب مدار كل منها على شكل قطع زائد.

رابعاً: حساب المثلثات

(١) تعريف علم حساب المثلثات وبداياته:

يعرف حساب المثلثات بأنه العلم الذي يبين النسب بين أضلاع المثلث وزواياه، أو هو علم الزوايا وعلاقتها بالأبعاد.

وتكمن أهميته في كثرة تطبيقاته وخاصة في علم الفلك، حيث كانت بعض علاقاته تطبق لشرح العديد من الظواهر الفلكية، ولم يكن لتلك العلاقات استقلال ذاتي عن علم الفلك بل كانت جزء لا يتجزأ من هذا العلم.

وكان اليونانيون القدامى هم الذين استخدموا بعض النسب في المثلثات المنتظمة أي النسبة بين كل زاوية من زوايا المثلث وبين الضلع المقابل لها، وذلك في المثلثات سواء المستوية أو الكروية. وقد قام الفلكي اليوناني هيباركوس Hipparchus (١٩٠-١٢٠ق.م) بأرصاد بين عامي ١٦١ ق.م و ١٢٧ق.م في مرصده بجزيرة رودس وأجرى حسابات لإيجاد زاوية الإزاحة الظاهرية لنجم قريب ومنها تمكن من إيجاد بعد هذا النجم. وقد اعتبره بعض المؤرخين لذلك أول من تحدث في حساب المثلثات.

وقد ورد في كتاب المجسطي في الفلك لبطليموس(٨٧-١٦٥م) بعضاً من تلك العلاقات وذلك أثناء إجرائه لعمليات الرصد الفلكي في الفترة بين عامي١٢٥و١٥١ ميلادية.

أما الهنود فقد تقدموا في حساب المثلثات شوطاً أطول وخصوصاً فيما يتعلق بقياس ما أسموه جيب الزاوية وعرفوه بأنه الضلع المقابل للزاوية مقسوماً على الوتر في المثلث القائم الزاوية، وكلمة جيب مأخوذة من الكلمة الهندية (جيفا أو جيف) التي تعني نصف الوتر وترجمها العرب جيب.

أما العرب فإن فضلهم على هذا العلم كبير جداً فقد قاموا بتنظيم المعارف المتعلقة به والتي تناولوها من الهنود خاصة، ثم وضعوه بشكل علمي منظم حيث أصبح علماً

خاصاً مستقلاً عن علم الفلك، مما جعل كثير من المؤرخين يعتبرونه علماً عربياً، فقد قال روم لانداو في كتابه (فضل العرب على الحضارة):

إن حساب المثلثات في أوربا كان مأخوذاً من علم المثلثات عند المسلمين.

(٢) **إنجازات العلماء العرب والمسلمين في حساب المثلثات:**

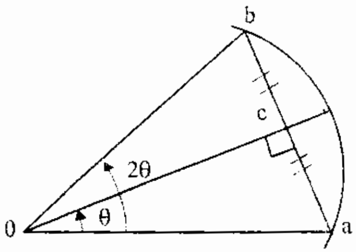
كان لعلماء الحضارة العربية والإسلامية فضل كبير في تطوير حساب المثلثات وصياغته بالصورة التي عليها الآن، ومن إنجازاتهم في ذلك نذكر ما يلي:

أ- كان **الخوارزمي (٧٨٠-٨٥٣م)** أول من قام بحساب جداول الجيوب وذلك في كتابه (زيج السندهند) وهو عبارة من جداول فلكية احتوت على دالة الجيب، وكانت هذه الأزياج مبنية على مصادر هندية كانت تستخدم كلمة جيفا للدلالة على نصف الوتر وترجم الخوارزمي هذه الكلمة إلى كلمة جيب علماً بأنها بعيدة كل البعد عن معنى جيب الثوب في اللغة العربية.

ب- أما **محمد بن جابر البتاني (٨٥٤-٩٢٩م)** فيرجع إليه الفضل في إرساء المفاهيم الحديثة للدوال المثلثية وإيجاد بعض العلاقات بين النسب المثلثية وبعضها.

ويعتبر البتاني أول من أدخل مفهوم الجيب (نصف الوتر) المستخدم عند الهنود بدلا من وتر ضعف القوس الذي استعمله اليونانيون وعلى الأخص بطليموس في كتابه (المجسطي).

ويوضح الشكل مفهوم جيب الزاوية عند الإغريق والهنود:



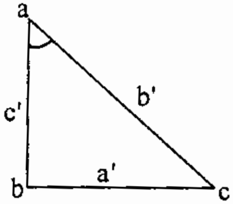
فعند الإغريق

$$\text{جيب الزاوية} = \frac{ab}{a0} = \frac{\text{طول وتر ضعف القوس}}{\text{نصف القطر}}$$

وعند الهنود:

$$\text{جيب الزاوية} = \frac{ac}{a0} = \frac{\text{نصف وتر ضعف القوس}}{\text{نصف القطر}} = \text{جا}\ \theta$$

كما أدخل البتاني مفهوم ظل الزاوية (أو المماس) وعرفه بأنه قياس الزاوية المفروضة بالضلع المقابل لها مقسوماً على الضلع المجاور أي أن



$$\text{ظل الزاوية}\ a = \frac{a'}{c'}$$

واستنتج البتاني العلاقة الآتية بين جيب الزاوية وظلها:

$$\text{جا}\ \theta = \frac{\text{ظا}\ \theta}{\sqrt{1+\text{ظا}^{2}\ \theta}}$$

وهي علاقة لم تكن معروفة من قبل، وادخل البتاني أيضاً نسبة جيب التمام (جتا) للزاوية، كما أدخل البتاني النسبة ظل التمام (ظتا) للزاوية أيضاً، وقد أوجد البتاني نسبتي الظل وظل التمام عند دراسته للمزاول الشمسية الرأسية والأفقية والتي أخذ فيها الظلال الرأسية والأفقية في الاعتبار، وكان البتاني أول من أعد جدولاً لنسبة ظل التمام.

وقد ترجمت أعمال البتاني في القرن الثاني عشر الميلادي (حوالي عام ١١٣٦م) بواسطة الرياضي والفلكي الإيطالي المولد أفلاطون التيفولي Plato of Tivoli والذي عاش في برشلونة وتوفي حوالي عام ١١٥٠م وكان رياضياً وفلكياً وقام بترجمة العديد من المؤلفات العربية في الرياضيات والفلك.

وفي ترجمة أفلاطون هذا لأعمال البتاني ظهر لأول مرة الكلمة اللاتينية (sinus) التي تقابل كلمة جيب العربية.

لم تقتصر جهود البتاني على دراسة المثلثات المستوية بل تناولت المثلثات الكروية – التي كان اليونانيون أيضا قد تناولوها لصلتها الوثيقة بعلم الفلك – فقام البتاني بتعريف العلاقة بين الأضلاع والزوايا في المثلث الكروي، وأعتبر بذلك أول من أسهم

في تطوير هذا الفرع من حساب المثلثات، ويذكر للبتاني أيضا أنه أول من أستعمل المعادلات المثلثية (وهي المعادلات التي تربط بين النسب المثلثية وبعضها) وقام بتطويرها.

ج- ومن علماء المسلمين الذين اشتغلوا بحساب المثلثات ولهم فيه إسهامات كبيرة نذكر أبو الوفاء محمد بن يحي البوزجاني (٩٤٠-٩٩٨م) الذي عاش في القرن العاشر الميلادي (الرابع الهجري)، ومن إنجازاته في ذلك نذكر أنه أول من حدد الظل كخط على مماس الدائرة (وأطلق عليه أسم المماس) كما أوجد طريقة جديدة لحساب جداول الجيوب، كما حسب جدولا لنسبة الظل لعدة أرقام عشرية، وفي دراسته لمثلث الظل في المزاول الشمسية أقترح البوزجاني نسبتين جديدتين هما قاطع الزاوية (قا-Sec) وقاطع تمام الزاوية (قتا-Cosec)، وبذلك اكتملت النسب المثلثية الست في حساب المثلثات (وهي الجيب وجيب التمام والظل وظل التمام والقاطع وقاطع التمام) على أيدي علماء العرب والمسلمين.

وفي ذلك يقول موريس كلاين في كتابه (الأفكار الرياضية):

إن البوزجاني هو مبتكر القاطع(قا) وقاطع التمام (قتا)، ويقول جوزيف هوفمان في كتابه (تاريخ الرياضيات حتى سنة ١٨٠٠م):

"إن أبو الوفاء قد نجح في حساب جداول دوال علم حساب المثلثات حتى ثمانية أرقام عشرية"

وقد أولى البوزجاني المتطابقات المثلثية عناية كبيرة وتوصل إلى عدد كبير منها مازالت تستخدم حتى اليوم، وقد ذكر دافيدسميث في كتابه (تاريخ الرياضيات) تلك المتطابقات وهي:

$$(1)\ \tan a = \frac{\sin a}{\cos a} \quad , \quad \cot a = \frac{\cos a}{\sin a}$$

$$(2)\ \sin a = 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} \rightarrow \sin 2a = 2\sin a\cos a$$

$$(3)\ 2\sin^2\frac{a}{2} = 1-\cos a \rightarrow \sin^2 a = \frac{1}{2}(1-\cos 2a)$$

$$(4)\ \sec^2 a = 1+\tan^2 a \quad , \quad \operatorname{cosec}^2 a = 1+\cot^2 a$$

كما وضع العلاقة الخاصة بجيب مجموع والفرق بين زاويتين وهي :

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$
$$= \sqrt{\sin^2 a - \sin^2 a \sin^2 b} \pm \sqrt{\sin^2 b - \sin^2 a \sin^2 b}$$

ومن ذلك نرى أن البوزجاني يمكن اعتباره أحد المؤسسين الحقيقيين لعلم حساب المثلثات بصورته الحالية.

د- ومن الذين أسهموا في حساب المثلثات نذكر <u>ابن يونس المصري</u> (الذي توفي عام ١٠٠٩م) والذي أوجد علاقة من أهم العلاقات في حساب المثلثات وهي العلاقة الخاصة بحاصل ضرب نسبتين مثلثتين وحاصل جمعهما أو الفرق بينهما، وفي تلك يقول جورج سارتون في كتابه (المدخل إلى تاريخ العالم):

أن ابن يونس هو أول من توصل إلى المعادلتين المثلثتين الآتيتين:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin a \sin b &= \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)] \\ \cos a \cos b &= \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)] \end{aligned}}$$

وهما المعادلتان اللتان حولتا علميات الضرب في النسب المثلثية إلى عمليات جمع وطرح، وكان لهما أهمية بالغة للمشتغلين بعلم الفلك حيث أنهما أديا إلى إحداث تبسيط هائل في الحسابات الفلكية.

وإذا ما عوضنا في القانون الثاني لابن يونس بالقيمتين $c = a + b \ , \ \ d = a - b$

فإننا نحصل على القانون الآتي: $\cos c + \cos d = 2(\cos\frac{c+d}{2})(\cos\frac{c-d}{2})$

وهو القانون المعروف لمجموع دوال جيوب التمام لزاويتين مختلفتين.

<u>الإثبات:</u>

بوضع $c = a + b, d = a - b$ في القانون الثاني لأبن يونس نحصل على:

$$\text{coa}\, a \cos b = \frac{1}{2}[\cos d + \cos c] \rightarrow \cos c + \cos d = 2\cos a \cos b$$

ولإيجاد a,b بدلالة c,d حيث أنه من العلاقتين $c = a + b\ ,\ d = a - b$

بالجمع نحصل على: $c + d = 2a$ ومنها $a = \dfrac{c+d}{2}$، وبالطرح نحصل على:

$c - d = 2b$ ومنها $b = \dfrac{c-d}{2}$ ويصبح القانون الثاني لأبن يونس بالصورة:

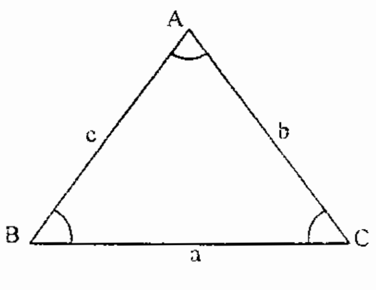
$$\cos c + \cos d = 2(\cos\frac{c+d}{2})(\cos\frac{c-d}{2})$$

هـ- ومنهم أيضاً <u>أبو الريحان محمد البيروني (٩٧٣-١٠٤٨م)</u> صاحب كتاب (القانون المسعودي) الذي كان أول من استعمل النسب المثلثية بالمعنى الذي نفهمه اليوم، وقد قام البيروني في كتابه هذا بحساب جيب الدرجة الواحدة على أساس أنها نصف جيب قوس الدرجتين فحصل على القيمة الآتية (بالنظام الستيني): $\sin(1) = 1,24943$

وعليه فإن هذه القيمة بالنظام العشري تكون: $\sin(1) = 0.016679$

أما في كتابه (استخراج الأوتار) فقد أثبت البيروني أن طول ضلع المعشر المنتظم (المضلع ذو الأوضاع العشرة) المرسوم داخل دائرة نصف قطرها r يساوي $2\sin 18^o$ ومنها أوجد قيمة $\sin 18^o = 0.30901$.

وفي كتابه (القانون المسعودي) ظهر قانون الجيوب في المثلثات المستوية بالصورة الآتية:



$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

حيث a,b,c أطوال أضلاع المثلث المقابلة للزوايا A,B,C

وبذلك فإن:

$$\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$$

بمعنى أن جيوب الزوايا تتناسب مع أطوال الأضلاع المقابلة لها في المثلث المستوى، ويعرف ذلك بقانون البيروني (أو قانون الجيب).

و- وقد قام كل من أبو نصر منصور بن عراق (٩٧٠-١٠٣٤م) [أستاذ أبي الريحان البيروني] ونصير الدين الطوسي (١٢٠١-١٢٧٤م) بدارسة المثلثات الكروية واثبات أن نسبة جيوب الأضلاع في المثلث الكروي بعضها إلى بعض كنسبة جيوب الزوايا المقابلة لتلك الأضلاع بعضها إلى بعض، كما أثبت الاثنان (كل على حده) قانون الجيب الذي يحدد العلاقة بين أضلاع المثلث الكروي وزوايا. كما ينسب بعض المؤرخين قانون جيب التمام في حساب المثلثات المستوية إلى منصور بن عراق.

وقام نصير الدين الطوسي أيضاً في كتابه عن حساب المثلثات بوضع المتطابقات المثلثية الخاصة بالمثلث الكروي القائم الزاوية، وفي ذلك يقول الدكتور دافيد سميث في كتابه تاريخ الرياضيات (الجزء الثاني):" ولم تدرس المثلثات الكروية بصورة جديدة وجديه إلا على أيدي العرب والمسلمين في القرن العاشر الميلادي".

ويذكر البارون كارادیفو في كتابه (تراث الإسلام): أن الطوسي أمتاز على زملائه في علم حساب المثلثات الكروية، حيث قدم هذا الموضوع بأسلوب سهل ومقبول.

كما يقول الدكتور إريك بول في كتابه (الرياضيات وتطورها عبر التاريخ):

" أنه كان لكتاب نصير الدين الطوسي في حساب المثلثات الأثر الكبير على علماء الرياضيات في الشرق والمغرب، بما فيه من الابتكارات الجديدة التي أفادت وطورت هذا العلم " .

ز- ومن الذين أسهموا في حساب المثلثات الكروية نذكر الرياضي والفلكي الأندلسي جابر بن افلح الأشبيلي (١٠٨٠-١١٤٥) الذي ترجمت أعماله بواسطة جيرارد الكريموني ولكنها لم تنشر إلا عام ١٥٣٣ في نورمبرج بألمانيا.

وقد خصص جابر كتاباً كاملاً من كتبه التسعة في الفلك لحساب المثلثات الكروية حيث قام ببرهان قانون الجيوب في المثلث القائم الزاوية وقام ببرهان العديد من المتطابقات المثلثية الخاصة بهذا المثلث، ومنها الصيغ الثلاثة التي وضعها البتاني حوالي عام ٩١٥م لقانون جيب التمام في المثلث الكروي المائل.

ويذكر هنا أن نصير الدين الطوسي قد ذكر المتطابقات التي قام جابر بن أفلح ببرهانها للمثلث الكروي وذلك في كتابه (الشكل الملقب بالقطاع) والذي كتب حوالي عام ١٢٦٠م أي بعد وفاة جابر بنحو مائة عام.

ح- وكان آخر العلماء العرب الذي أثروا حساب المثلثات بمؤلفاتهم: **غياث الدين جمشيد الكاشي (١٣٨٠-١٤٣٦م)** الذي اثبت قوانين الجيب في حساب المثلثات وكذلك قانون جيب التمام الذي يحدد العلاقة بين أضلاع المثلث وزوايا وهو قانون مناظر لقانون الجيب، وينسبه البعض أيضاً إلى منصور بن عراق كما أسلفنا.

وفي رسالته (استخراج جيب الدرجة الأولي): قال الكاشي:

" إذا علم جيب قوس وأريد معرفة جيب ثلاثة أمثالها، يضرب مكعب ذلك الجيب في أربع، وينقص الحاصل من ثلاثة أمثاله فالباقي هو الجيب المطلوب" وبلغه الرياضيات المعاصرة فهذا يعني العلاقة المثلثية التالية:

$$\sin(3x) = 4\sin^3 x - 3\sin x$$

أو بالرموز العربية: جا ٣س = ٤جا^{٣}س-٣جاس

وقام الكاشي بحساب جيب الدرجة الواحدة ($\sin 1^{\circ}$) إلى ثمانية عشر مرتبة عشرية كما أثبت أن نصف قطر الدائرة التي يحيط بها المثلث ABC هو:

$$r = \frac{bc\sin A}{a+b+c}$$

حيث a,b,c أطوال أضلاع المثلث المقابلة الزوايا A,B,C

(٣) **انتقال حساب المثلثات إلى الغرب إبان عصر النهضة:** وفي عصر النهضة في أوربا بدأ العلماء في الغرب يترجمون المؤلفات العربية إلى اللاتينية، واستمرت حركة الترجمة تلك عدة قرون.

ومن العلماء الذين أهتموا بترجمة المؤلفات العربية في الرياضيات والفلك نذكر العالم الألماني ريجيو مونتانوس Regiomontanus (١٤٣٦-١٤٧٦) واسمه الأصلي جوهان مولر، وقد ولد في نفس العام الذي توفي فيه العالم العربي جمشيد الكاشي (عام

١٤٣٦م) وقام أولا بترجمة عدد من الكتب اليونانية الشهيرة في الرياضيات والفلك إلى اللاتينية من طبعاتها العربية، نذكر منها: كتاب (القطوع المخروطية) لأبولونيوس وكتاب المجسطي في الفلك لبطليموس والأعمال الميكانيكية لهيرون الأسكندري، ثم قام ريجيو مونتانوس بترجمة بعض أعمال الكاشي ومنها (جداول الجيب). وقد تم نشر هذه الترجمات عام ١٥٣١ في نورمبرج بألمانيا بعد وفاة ريجيو مونتانوس بأكثر من نصف قرن.

كما قام ريجيو مونتانوس بوضع أول كتاب عنوانه (حساب المثلثات) وذلك عام ١٤٦٣، وأورد فيه كل القوانين التي وضعها العلماء العرب والمسلمين: البتاني والبوزجاني وابن يونس والطوسي والكاشي وذلك في صورة رياضية منسقة، مما حدا ببعض المؤرخين أن يصفو ريجيومونتانوس بأنه هو الذي أوجد هذا العلم، وحقيقة الأمر أنه كان مترجماً وجامعاً للقوانين والجداول الخاصة بحساب المثلثات والتي كان العلماء العرب أول من وضعها وطبقها.

وقد أعترف بذلك بعض المؤرخين المتصفين في الغرب ونذكر منهم العالم الكبير المختص بتاريخ العلوم فلورين كاجوري في كتابه (تاريخ الرياضيات) حيث قال: " أن هناك أموراً كثيرة وبحوثاً عديدة في علم حساب المثلثات نسبت إلى ريجيو مونتانوس، وثبت أنها من وضع المسلمين والعرب وأنهم كانوا قد سبقوه إليها"

كما قال دافيد سميث نفس هذا الكلام في كتابه (تاريخ الرياضيات) وذلك حين أشار إلى إن مؤلفات ريجيو مونتانوس قد اعتمدت على كتب العرب والمسلمين، وأنه نقل عنهم الكثير من البحوث وخاصة فيما يتعلق بعلم حساب المثلثات، وقال ذلك أيضاً جورج سارتون في كتابه (مقدمة في تاريخ العلم).

ونذكر هنا أيضاً الرياضي الألماني ألبرت جيرارد (١٥٩٥-١٦٣٢م) الذي ألف كتاباً في حساب المثلثات عام ١٦٢٣ (بعد ظهور كتاب ريجيو مونتانوس بأكثر من مائة وخمسين عاماً) وظهرت في كتاب جيرارد هذا ولأول مرة الاختصارات sin, cos, tan للجيب وجيب التمام والظل.

خامساً: حساب التفاضل والتكامل – المعادلات التفاضلية والتكاملية

(١) الدوال:

أ- يدرس حساب التفاضل والتكامل الدوال القابلة للتفاضل (الاشتقاق) والدوال القابلة للتكامل.

وأول من أستعمل كلمة دالة هو العالم الألماني ليبنتز (١٦٤٦-١٧١٦) عام ١٦٩٤ للتعبير عن طول قطعة مستقيمة بدلالة مستقيمات مرتبطة بمنحنيات معينة، بعد ذلك استخدمت كلمة دالة لتعني كمية تعتمد على كمية أو كميات أخرى، وعلى هذا الأساس تكون مساحة المثلث دالة في طول أضلاعه، وحجم الغاز المحصور في أسطوانة دالة لدرجة الحرارة والضغط الواقع عليه، والضغط الجوي دالة للارتفاع عن سطح البحر، وهكذا.

ب- ثم تطور مفهوم الدالة خلال القرنين التاسع عشر والعشرين ليصبح من المفاهيم الرياضية المهمة المستخدمة في مختلف فروع الرياضيات والعلوم الأخرى لنتمكن من وصف العلاقات بين عناصر المجموعة الواحدة أو عناصر المجموعات المختلفة.

وكان الرياضي السويسري جوهان (چان) برنولي (١٦٦٧-١٧٤٨) قد أستخدم الرمز ϕ_x عام ١٧١٨ للتعبير عن الدالة، ولكن تلميذه ليونارد أويلر (١٧٠٧-١٧٨٣) استخدم عام ١٧٣٤ الرموز $f(x)$ للتعبير عن الدالة، ومازال هذا الرمز يستخدم حتى الآن.

(٢) النهايات والاتصال:

أ- يعتبر مفهوم النهاية من المفاهيم القديمة في الرياضيات فقد أوجد أرشميدس (٢٨٧-٢١٢ق.م) قيمة تقريبية للكمية (2π) كنهاية لمحيط مضلع مرسوم داخل دائرة نصف قطرها الوحدة، وفي عصر الحضارة العربية الإسلامية الزاهرة أستخدم بعض العلماء العرب مثل ثابت بن قرة والحسن بن الهيثم أنواعاً مختلفة من النهايات لحساب المساحة والحجوم.

ب- وفي القرن السابع عشر وضع الرياضي الإنجليزي السير إسحق نيوتن (١٦٤٣-١٧٢٧) والألماني جوتفريد ليبنتز (١٦٤٦-١٧١٦) تصوراً جديداً لمفهوم النهاية، وقام الاثنان بحساب نهايات معقدة، لكن أياً منهما لم يعطي تعريفاً دقيقاً لمفهوم النهاية.

ج- وفي عام ١٨٢١ أعطى الرياضي الفرنسي البارون أوجستين كوشي (١٧٨٩-١٨٥٧) تعريفاً تصورياً أو حدسياً لمفهوم النهاية، وفي عام ١٨٦٠ أعطى الرياضي الألماني كارل ڤيرشتراس (١٨١٥-١٨٩٧) التعريف الدقيق للنهاية والذي نستخدمه اليوم.

د- أما مفهوم الاتصال والدوال المتصلة فقد قدمه لأول مرة البارون كوشي عام ١٨٢١ أيضاً، وربطه بمفهوم النهايات.

(٣) <u>المشتقات:</u>

أ- كان أول من أستخدم المشتقة هو العالم العربي شرف الدين الطوسي (المتوفي عام ١٢١٣م) في القرن الثاني عشر الميلادي، وذلك عند معالجته للجذور الموجبة لمعادلات الدرجة الثالثة، ويعتبر كتاب (الجبر والمقابلة) الذي كتبه عام ١١٧٠م. نقطة تحول في نظرية المعادلات الجبرية لابتكاره مفهوم المشتقة والقيم العظمى لكثيرات الحدود وتطبيقها لمعرفة وجود أو عدم وجود حل لتلك المعادلات، وقد ذكر الطوسي في كتابه هذا أن: "مشتق الكعب ثلاثة أمثال المال" وبلغتنا المعاصرة يعني هذا أن مشتقة x^3 هي $3x^2$.

ب- وقد تطور مفهوم المشتقة عند دراسة ميل المماس لمنحنى وذلك عند الرياضيين الفرنسيين رنيه ديكارت (١٥٩٦-١٦٥٠) وبيير فيرما (١٦٠١-١٦٦٥) وذلك عام ١٦٣٧، وعند الرياضيين الهولندي كريستيان هيجنز (١٦٢٩-١٦٩٥) والإنجليزي إسحق بارو (١٦٣٠-١٦٧٧) عام ١٦٦٨.

ووضع المفهوم في صورته الحالية من قبل كل من الإنجليزي نيوتن والألماني ليبنتز كل على حده، وأستخدم نيوتن الرمز 'y للدلالة على المشتقة بينما أستخدم ليبنتز الرمز $\frac{dy}{dx}$ للمشتقة.

وقد وضعت قواعد الاشتقاق (قوانين التفاضل) من قبل نيوتن (عام ١٦٨٣) وليبنتز (عام ١٦٨٤) لتسهيل عملية إيجاد المشتقات.

(٤) <u>تطبيقات التفاضل (المشتقات):</u>

أ- من أهم تطبيقات المشتقات (التفاضل) هي عملية إيجاد القيم القصوى للدوال أي القيم العظمى والصغرى لها، ولتلك القيم تطبيقات متعددة. وكان أول من استخدمها هو شرف الدين الطوسي (المتوفي عام ١٢١٣م) عند دراسته لمعادلات الدرجة الثالثة حيث استخدم القيم القصوى لتحديد الجذور الموجبة لتلك المعادلات.

ب- وفي القرن السابع عشر طبق الإيطالي جاليليو (١٥٦٤-١٦٤٢) القيم القصوى لإيجاد أقصى ارتفاع تصل إليه قذيفة مدفع تطلق بزاوية معينة وكان ذلك عام ١٥٩٣، كما استخدم بيير فيرما (١٦٠١-١٦٦٥) القيم القصوى للحصول على قاعدة أقصر زمن لانتقال الضوء في أوساط مختلفة، وذلك عام ١٦٥٧، وتعرف بقاعدة فيرما.

ج- أما نظرية رول للقيم القصوى فقد وضعها وأثبتها الفرنسي ميشيل رول (١٦٥٢-١٧١٩) عام ١٦٩١، كما أثبت الفرنسي جوزيف لاجرانج (١٧٣٦-١٨١٣) نظرية القيمة المتوسطة عام ١٧٩٥.

د- وتطور علم التفاضل من قبل الأخوين جاك (جاكوب) برنوللي (١٦٥٤-١٧٠٥) وجان (جوهانز) برنوللى (١٦٦٧-١٧٤٨) فقد أدخل جاك الإحداثيات القطبية في تمثيل الدوال وهو أول من لاحظ أن النقاط الحرجة التي تصل عندها الدالة إلى قيمة قصوى محلية ليس بالضرورة أن يكون للدالة مشتقة عندها، وهو الذي أقترح على ليبنتز بأن يسمى العلم بحساب التفاضل والتكامل بعد أن كان يسمى: حساب الكميات المتناهية في الصغر.

هذا وللأخوان برنوللي إسهامات في إيجاد أطوال المنحنيات ونقاط الانقلاب وغيرها من تطبيقات التفاضل والتكامل.

هـ – وقد قام الرياضي السويسري ليونارد أويلر (١٧٠٧-١٧٨٣) تلميذ جوهانز برنوللي في القرن الثامن عشر بتطوير علم التفاضل وذلك في كتابه (مقدمة في التحليل اللانهائي) عام ١٧٤٨ محولا جميع النسب المثلثية إلى دوال وقام بإيجاد مشتقاتها التفاضلية، وأعطى تطبيقات عليها.

و– <u>الدوال الأسية واللوغارتمية والزائدية:</u>

ومن بين الموضوعات التي تدرس في التفاضل لإيجاد مشتقاتها نذكر الدوال الأسية واللوغارتمية والزائدية، والتي تعرف أيضاً بالدوال المتسامية.

وقد عرفت الأسس أو القوى لعدد حقيقي وبرهنت قواعدها في البداية عند العالمين العربيين أبو بكر الكرخي (٩٧١-١٠٢٩م) والسموأل بن يحي المغربي (١١٢٥-١١٧٤م).

كما قام ابن حمزة المغربي (١٥١٥-١٥٧٣م) من علماء القرن السادس عشر الميلادي بتعريف اللوغارتمات في كتابه (تحفة الأعداد لذوى الرشد والسداد)، وينسب تعريف اللوغارتم في المراجع الغربية إلى الرياضي الاسكتلندي جون نابير (١٥٥٠-١٦١٧) في كتابه (وصف قوانين اللوغارتمات) الذي نشر عام ١٦١٤ أي بعد وفاة ابن حمزة المغربي بنحو ٤٠ عاماً فقط، مما يوحي بأن جون نابير ربما يكون قد أطلع على أعمال ابن حمزة المغربي.

أما الدوال الزائدية فتعتبر نوع خاص من الدوال الأسية وقد درست بالتفصيل من قبل الرياضي الفرنسي چان (يوحنا) دالمبيرت (١٧٧٧-١٨٢٨) وقام بتطبيقها في عدد من الموضوعات الهندسية.

ز– <u>الصيغ غير المعينة:</u>

ومن الموضوعات التي تدرس في حساب التفاضل أيضاً نذكر: الصيغ غير المعينة، وهي صيغ تظهر في نهايات الدوال ولا يمكن إيجاد قيمه معرفة محدودة لأي منها

ومن تلك القيم مثلاً: القيمة $\left(\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}\right)$ أو القيمة صفر مرفوع للقوة صفر (صفر$^{\text{صفر}}$) وغيرها، وقد درست النهايات التي تؤول لتلك الصيغ غير المعينة لأول مرة بواسطة جوهانز برنوللى (١٦٦٧-١٧٤٨) معتمداً على القاعدة التي وضعها الفرنسي جيلوم دي لوبيتال (١٦٦١-١٧٠٤) عام ١٦٩٤ في كتابه (التفاضل والتكامل) وتعرف بقاعدة لوبيتال، ويعتمد برهان تلك القاعدة على التعميم الذي وضعه كوشي لنظرية القيمة المتوسطة في حساب التفاضل.

(٥) ظهور التكامل وتطوره:

أ- يعرف التكامل في أبسط صوره بأنه العملية العكسية للتفاضل، وقد بدأ ظهور التكامل عند أرشميدس في القرن الثالث قبل الميلاد كتجميع كبير لكميات متناهية في الصغر، وتطور هذا المفهوم مع العالم العربي ثابت بن قرة الحراني(٨٣٥-٩٠١م) في القرن التاسع الميلادي والذي أوجد في كتابه (مساحة قطع المخروط المسمى بالمكافئ) مساحة قطعة من هذا القطع بطريقة مجموع التكاملات المختلفة عن طريق أرشميدس مبتدئاً بتقسيم القطعة إلى أجزاء غير متساوية تتناسب مع مربعات الأعداد الطبيعية مثبتا أن تلك المساحة تساوى ثلثي مساحة متوازي الأضلاع المشترك معه بنفس القاعدة ونفس الارتفاع.

كما اثبت ابن قرة أيضاً في كتابه (مساحة المجسمات المكافئة) وبطريقة مختلفة عن طريقة أرشميدس بأن حجم المجسم المكافئ المتولد من دوران القطعة من القطع المكافئ (ABC) حول محوره BC يساوى نصف حجم الأسطوانة التي قطرها قاعدة القطعة AC وارتفاعها محور القطعة BC.

ب- وقد عمم الحسن بن الهيثم (٩٦٥-١٠٣٩م) نتائج أرشميدس، وأثبت في كتابه (مقالة في مساحة المجسم المكافئ) بطريقة مختلفة عن سابقيه بأخذه مقاطع اسطوانية محاطة يكون محورها محور دوران المجسم المدروس، ووجد أن حجم المجسم الناتج من دوران قطعة قطع مكافئ ABC حول محوره BC يساوى $\left(\frac{8}{15}\right)$ من حجم الأسطوانة التي قاعدتها AC وارتفاعها BC.

ج- وفي بداية القرن السابع عشر الميلادي ظهرت مصطلحات المتغير والمتغير التابع، ونشطت الدراسة لبعض المنحنيات الهامة حيث تم حساب المساحة تحت المنحنى $y = x^n$ لقيم n الصحيحة، واثبت العالم الإيطالي كفاليري (١٥٩٨-١٦٤٧) وباستخدام نفس طرق الحسن بن الهيثم أن $\int_0^a x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ وهي النتيجة التي عممها الرياضي الإنجليزي جون واليس (١٦١٦-١٧٠٣) ليقم n الكسرية وذلك في كتابه (الحساب المتناهي في الصغر)، كما أوجد واليس قيمة التكامل $\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$ الذي يعرف بتكامل واليس (Wallis Integral).

د- أما تطبيق التكامل لإيجاد طول قوس من منحنى فقد ظهر في كتابات الرياضي والفيزيائي الهولندي كريستيان هيجنز (١٦٢٩-١٦٩٥) والرياضي الاسكتلندي چيمس جريجورى (١٦٣٨-١٦٧٥) الذي تميز أيضاً بإنجازاته الشهيرة في الفيزياء وأهمها التلسكوب الذي يحمل اسمه (تلسكوب جريجوري).

هـ- وكان الإنجاز الأهم لكل من الإنجليزي إسحق نيوتن (١٦٤٢-١٧٢٧) والألماني وليام ليبنتز (١٦٤٦-١٧١٦) هو اكتشافهما في وقت واحد تقريباً أن عمليتي التفاضل والتكامل هما وجهان لموضوع رياضي واحد، حيث بين نيوتن عام ١٦٨٣ إمكانية حساب المساحة تحت منحنى باستخدام ما يسمى بالمشتقة العكسية، أما ليبنتز فكان أول من أستخدم الرمز ($\int$) للتكامل، ووصف في مقال له عام ١٦٨٤ طرق حساب المساحة باعتبارها العملية العكسية لإيجاد ميل المماس.

و- وكان إسحق بارو(١٦٣٠-١٦٧٧) الرياضي الإنجليزي والأستاذ بجامعة كمبردج، وأستاذ إسحق نيوتن، حيث خلفه نيوتن في كرسي الرياضيات بتلك الجامعة، فقد أوجد النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل والتي ربطت التكامل بالتفاضل وذلك حوالي عام١٦٦٨، وقام بإثباتها بطريقة هندسية، كما أوجد العلاقة بين مسألة المماس والمسألة

المقابلة لها في حساب المساحات، وقد قام كل من نيوتن وليبنتز بعد ذلك بإثبات تلك النظرية كل على حده.

ز- وقد ظهر التعريف الدقيق للتكامل المحدود عند الرياضي الألماني برنارد ريمان (١٨٢٦-١٨٦٦) الذي توفي مبكراً وعمره لم يتجاوز الأربعين عاماً، حيث قام بدراسة النتائج التي توصل إليها كوشي (١٧٨٩-١٨٥٧) في حساب التكاملات المحدودة عام ١٨٤٢، وقام ريمان بتعميم تلك النتائج وذلك عام ١٨٦٢، كما قام بتعريف الدوال القابلة للتكامل مما أدى إلى فصل حساب المساحة عن التفاضل كمفهوم مبني على أخذ النهاية لمجموع عدد من المساحات أطلق عليها فيما بعد مجموع ريمان، فإن وجدت تلك النهاية تكون الدالة قابلة للتكامل بمفهوم ريمان.

(٦) <u>ظهور المعادلات التفاضلية:</u>

أ- تحتوى معظم النماذج الرياضية لكثير من مسائل الفيزياء والكيمياء والهندسة والأحياء والعلوم الأخرى على معادلات تحتوى على مشتقة أو عدة مشتقات لدالة ما، ويطلق عليها اسم المعادلات التفاضلية، وقد ظهرت تلك المعادلات للمرة الأولى عام ١٦٧٥ في أعمال الرياضي الألماني ليبنتز (١٦٤٦-١٧١٦) الذي تنسب إليه طريقة فصل المتغيرات، وطرق حل المعادلات التفاضلية المتجانسة ذات الرتبة الأولى، وما يمكن تحويله إليها من معادلات، حيث قام عام ١٦٩١بحل المعادلات الخطية من الرتبة الأولى، والتي يمكن تحويلها إلى معادلات ذات متغيرات منفصلة بتغير مناسب للمتغيرات فيها.

ب- وقد قام الأخوان السويسريان چاكوب (يعقوب) برنوللي (١٦٥٤-١٧٠٥) وچوهانز (يوحنا) برنوللي (١٦٦٧-١٧٤٨) بصياغة العديد من المسائل في علم الميكانيكا كمعادلات تفاضلية ثم قاما بحلها، ووضع چاكوب برنوللي المعادلة التفاضلية المعروفة باسم معادلة برنوللي عام ١٦٩٥.

وقد أستخدم ليبنتز عام ١٦٩٦ تعويضاً مناسباً تم بموجبه تحويل معادلة برنوللي إلى معادلة خطية.

ج- وقام العالم الرياضي والفيزيائي الفرنسي أليكس كليـرو (١٧١٣-١٧٦٥) بدراسة المعادلات التفاضلية التامة في نظريته التي وضعها عن شكل الأرض (عـام ١٧٤٣) وعبر عن العديد من المسائل الفلكية ومنها نظريته حول القمر (عام ١٧٥٢) بمعادلة تفاضلية عرفت باسمه (معادلة كليرو).

د- وفي بداية القرن الثامن عشر بحث الرياضي الايطالي جـاكوب ريكاتى (١٦٧٦-١٧٥٤) في المعادلات من الشكل $f(y,y',y'')=0$ ، كمـا بحـث عـام ١٧٢٤ في معادلة غير خطية من الرتبة الأولى ووضع شروطاً لحل تلـك المعادلـة التفاضلية والتي تعرف باسم معادلة ريكاتى، وقام ريكاتي بوضع فكرة تخفيض الرتبة، وباستخدام تحويلات معينة تمكن ريكاتى من تحويل معادلته إلى معادلة برنوللي.

(٧) <u>المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية:</u>

أ- أهتم الرياضيون بدراسة المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الثانية منذ بداية القرن الثامن عشر، ففي عام ١٧٣٣وصف دانيال برنوللي (١٧٠٠-١٧٨٢) ابن جوهان برنـوللي حركة سلسلة ثقيلة مثبتة من الجانبين ومتذبذبة بمعادلة تفاضلية من الرتبة الأولى، ثـم قام بوصف حركة السلسلة إذا كانت غير منتظمة ويوجد توزيع لوزنها علـى طولهـا بمعادلة تفاضلية من الرتبة الثانية.

ب- وكـان ليونـارد أويلـر (١٧٠٧-١٧٨٣) تلميـذ جوهـان(جـان) برنـوللي (١٦٦٧-١٧٤٨) وصديق إبنه دانيال برنوللي، قد بدأ عام ١٧٢٨ بدراسة المعـادلات التفاضلية من الرتبة الثانية بشكل منظم، وفي عام ١٧٣٤ كتب دانيال برنوللي رسـالة إلى أويلر تتضمن معادلة تفاضلية من الرتبة الرابعة تصف انحناء قضيب مثبت مـن الجانبين، ونتيجة لذلك قام أويلر بدراسة المعادلات ذات الرتبة الثانية والمعادلات ذات الرتبة الأعلى بعاملات ثابتة.

ج- أما تحويل المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية إلى الرتبة الأولى باستخدام تبـديل (أو تحويل) مناسب للمتغيرات فقد قام به أويلر أيضاً وكذلك دالمبيـرت (١٧١٧-١٧٨٣)،

حيث قدم أويلر عام ١٧٣٩ معالجة عامة للمعادلات التفاضلية ذات المعاملات الثابتة، وساهم في إيجاد طريقة متسلسلات القوى لحل المعادلات التفاضلية.

د- أما المعادلات التفاضلية ذات المعاملات المتغيرة فقد درست من قبل كل من: أويلر (١٧٠٧-١٧٨٣) ولاجرانج (١٧٣٦-١٨١٣) وليجندر (١٧٥٢-١٨٣٣) وجاوس (١٧٧٧-١٨٥٥)، وبسيل(١٧٨٢-١٨٤٦) وكوشى (١٧٨٩-١٨٥٧) في القرن الثامن عشر وبدايات القرن التاسع عشر، ثم من قبل كل من هيرميت (١٨٢٢-١٩٠١) وفوربينيوس (١٨٤٩-١٩١٧) في النصف الثاني من القرن التاسع عشر.

(٨) <u>استخدام طريقة المحولات في حل المعادلات التفاضلية:</u>

نظراً لصعوبة إيجاد الحلول المباشرة لكثير من المسائل الهندسية والفيزيائية، فقد استخدمت طريقة المحولات (Transforms) لحل المعادلات التفاضلية التي تصف تلك المسائل، وكان أهم تلك المحولات هو محول لابلاس الذي ظهر عام ١٧٨٠ في أبحاث الرياضي الفرنسي لابلاس (١٧٤٩-١٨٢٧) المتعلقة بنظرية الاحتمالات، ثم في عام ١٨٢٠ في أبحاث الرياضي الفرنسي بواسون (١٧٨١-١٨٤٠) في مجال الميكانيكا ونظرية الاحتمالات أيضاً، وكذلك في أبحاث الرياضي والفيزيائي الفرنسي فورييه (١٧٦٦-١٨٣٠) عام ١٨١١ والمتعلقة بمسائل التوصيل الحراري، حيث قام فورييه باستخدام ما يعرف بمحول فورييه لحل تلك المسائل، وأوجد العلاقة بينه وبين محول لابلاس.

وقد استفاد المهندس الفيزيائي الإنجليزي أولفيه هيفيسايد (١٨٥٠-١٩٢٥) كثيراً من استخدام محولات لابلاس وفورييه في حل المعادلات التفاضلية التي تظهر في مسائل الهندسة الكهربائية.

(٩) <u>المسائل الحدية من الرتبة الثانية:</u>

ظهرت مسائل القيم الحدية أو مسائل القيم عند الحدود (Boundary Value Problems) وهي عبارة عن معادلات تفاضلية من الرتبة

الثانية تحت شروط معينه، في أعمال أويلر عام ١٧٥٠، وكثر الاهتمام بهـا لعلاقتهـا بالدوال الخاصة ومسائل التوصيل الحرارى، وقد طور أويلر مفهـوم القـيم الذاتيـة والمتجهات الذاتية المناظرة لها والتي تظهر عند حل مسائل القيم الحدية، وقام بوضـع التفسير الفيزيائي لها. وقد ظهرت المعادلة الموجية في بعد واحـد عـام ١٧٤٦ فـي أبحاث الرياضي الفرنسي دالمبيرت، كما ظهرت معادلة لابلاس في أبحـاث لابـلاس نفسه المتعلقة بدراسته للجاذبية حوالي عام ١٧٨٠.

ومن العلاقات الهامة في مسائل القيم الحدية ظهرت معادلة شـتورم – ليـوفيـل والتي تعود إلى كل من الألماني تشارلز شتورم (١٨٠٣-١٨٥٥) والفرنسي جوزيـف ليوفيل (١٨٠٩-١٨٨٢) في منتصف القرن التاسع عشر، وتكمن أهمية تلك المعادلـة في تطبيقاتها في العلوم الهندسية والفيزيائية وخاصة في التوصيل الحراري وانتـشار الموجات.

(١٠) <u>حل المعادلات التفاضلية باستخدام المتسلسلات- ظهور الدوال الخاصة:</u>

تستخدم طريقة متسلسلات القوى لحل بعض المعادلات التفاضلية التي كثيراً مـا تظهر في الفيزياء والهندسة ولا تصلح لحلها الطرق المعتادة لحل المعادلات التفاضلية، وقد ظهرت تلك الطريقة واستخدمت لأول مرة عام ١٧٣٣ في أعمال دانيال برنـوللي (ابن جوهان برنوللي) دون الاهتمام بتقارب تلك المتسلسلات.

أما الاستخدام الأمثل والأدق لحل المعادلات التفاضلية باستخدام متسلسلات القـوى فيعود إلى أويلر رفيق دانيال برنوللي وتلميذ والده جوهانز والذي توصل إلى الطريقـة المعروفة بشكلها الحالي، والتي قام فروبينيوس (١٨٤٩-١٩١٧) في القـرن التاسـع عشر بإثبات مبرهناتها الأساسية عام ١٨٧٨ فنسبت الطريقة إليه (طريقة فروبينيوس).

وقد تطورت طرق حل المعـادلات التفاضـلية باسـتخدام متسلـسلات القـوى واستخدمت لحل الكثير من المعادلات التفاضلية المتجانسة ذات الأشكال الخاصة ومنها معادلة بسيل ومعادلة لجندر ومعادلة هيرميت ومعادلة جاوس وغيرها، وأطلق علـى

كثيرات الحدود (أو الدوال) التي تمثل حلولا لتلك المعادلات اسم الدوال الخاصة مثل دالة بسيل ودالة لجندر ودالة هيرميت ودالة جاوس وغيرها.

وقد ظهرت معادلة بسيل أولاً في أعمال دانيال برنوللي المتعلقة بدراسة تأرجح سلسلة معلقة وفي أعمال أويلر المتعلقة باهتزاز الأغشية الدائرية ثم في أعمال بسيل نفسه والمتعلقة بدراسة حركة الكواكب، وقد قام بسيل بتعديل هذه المعادلة عام ١٨٢٤ لكي تطبق في مسائل حركة السوائل والغازات وانتشار الموجات وفي نظرية الجهد أيضاً.

أما معادلة لجندر فقد ظهرت في أبحاث لجندر نفسه المتعلقة بدراسة الجاذبية ونظرية الجهد

وقد ظهرت معادلة جاوس (والتي تعرف أيضاً بالمعادلة فوق الهندسية) أول الأمر في أعمال أويلر ثم في أعمال جاوس نفسه حيث قام بتطبيقها على مسائل هندسية وقام بوضع الشكل التكاملي للدالة التي تحقق هذه المعادلة(الدالة فوق الهندسية).

ويذكر أن العالم الألماني جوهان بفاف (١٧٦٥-١٨٢٥) كان هو أول من أطلق عليها اسم المعادلة فوق الهندسية، ولبفاف معادلة تفاضلية شهيرة تعرف بإسمه وضعها حوالي عام ١٨٠٠م.

أما دالتي جاما وبيتا فقد قام بتعريفهما أويلر عام ١٧٦٨ وقام باستخدامهما للتعبير عن دوال بسيل، ولذلك يطلق عليهما أحيانا اسم دوال أويلر التكاملية. وقد أطلق لجندر على دالة جاما إسم دالة أويلر عام ١٨٢٦، بينما سميت دالة بيتا من قبل الرياضي والفلكي جاك بنيه J. Beinet (١٧٨٦-١٨٥٦) عام ١٨٣٩، وتمكن أهمية الدالتين وخاصة دالة جاما في تطبيقاتهما الفيزيائية والهندسية، واعتماد الكثير من الدوال الخاصة الأخرى عليهما مثل دوال بسل، دالة الخطأ، والتكامل الأسي والجيبي، وتكامل جيب التمام، وغيرها.

(١١) <u>ظهور المعادلات التكاملية وتطورها:</u>

تعتبر المعادلات التكاملية من الموضوعات الرياضية الهامة التي لها العديد من التطبيقات في الفيزياء والهندسة والكيمياء والعلوم البيولوجية، وترتبط المعادلات

التكاملية ارتباطاً وثيقاً بفروع الرياضيات الأخرى كالمعـادلات التفاضـلية الجزئيـة ونظرية المؤثرات والتحليل الدالي وغيرها.

وقد بدأت المعادلات التكاملية في الظهور على يدي الرياضي الإيطالي فيتو ڤولتيرا V. Votterra (١٨٦٠-١٩٤٠) أستاذ الفيزياء والرياضيات بجامعة روما، وذلك فـي بحث نشره عام ١٨٩٤ حول تذبذب الخيوط المرنة الأيزوتروبية، واستمر ڤولتيرا فـي بحوثه في علم الميكانيكا والتي قام فيها بتطبيق المعادلات التكامليـة، وضـمن تلـك البحوث كتابه بعنوان: (المعادلات التكاملية) الذي نشر عـام ١٩١٣وهـو أول كتـاب يحمل هذا الأسم، كما طور ڤولتيرا دراساته حول مـا يعـرف بنظريـة المعـادلات التفاضلية- التكاملية (Integro – Differential Equations) والتـي بـدأها عـام ١٨٩٠ وتوجها بكتابه حول (نظرية المعادلات التفاضلية - التكامليـة) والـذي نـشر عام ١٩٣٠.

ومن العلماء المعاصرين لـڤـولتيرا والمؤسسين لنظريـة المعـادلات التكامليـة المعاصرة نذكر الرياضي السويدي إريك فريد هولم E. Fredholm (١٨٦٦-١٩٢٧) أستاذ الفيزياء النظرية بجامعة ستوكهولم والـذي كانـت أعمالـه الرئيـسية تتعلـق بالمعادلات التكاملية، وقام بنشر أول بحث فيها عام ١٩٠٣.

وقد أقترح فريد هولم معادلة تكاملية عرفت بإسمه، ولها صورتان، عرفت إحداهما بمعادلة فريدهولم من النوع الأول والثانية معادلة فريد هولم من النوع الثاني، وتوصل فريد هولم إلى حل معادلته من النوع الثاني باعتبار تلـك المعادلـة كـصورة حديـه (Limiting Form) من منظومة من المعادلات الجبرية ذات عدد كبير من المجاهيل، كما استطاع فريد هولم التغلب على بعض المشاكل الرياضية التـي قابلـت ڤولتيـرا وأهمها وصول محدد المعادلة إلى حالة الشذوذ (Singularity)، وقد أكمل فريد هولم دراساته حول النظرية العامة للمعادلات التكاملية ونال على ذلك ميدالية بونسليه مـن الأكاديمية الفرنسية للعلوم عام ١٩٢٠م.

سادساً: ظهور فروع جديدة للرياضيات
التحليل الحقيقي والدالي والتوبولوجي

أ- تطورت البحوث الرياضية تطوراً كبيراً في النصف الثاني من القرن التاسع عشر وبدايات القرن العشرين، وظهرت فروع جديدة للرياضيات لم تكن موجودة من قبل مثل التحليل الحقيقي والتحليل الدالي وهما فرعان من التحليل الرياضي الذي بدأ في النصف الأول من القرن التاسع عشر على يدي كل من أبيل (١٨٠٢-١٨٢٩) وچاكوبي (١٨٠٤-١٨٥١)، وعلى يد الرياضي التشيكي ذو الأصل الإيطالي برنارد بولزانو B. Bolzano (١٧٨١-١٨٤٨) الذي دارت أبحاثه حول مجموعة الأعداد الحقيقية والدوال ذات المتغيرات الحقيقية، ثم الرياضي الألماني كارل ڤيرشتراس K. Weirstras (١٨١٥-١٨٩٧) الذي وضع مع بولزانو نظرية تحمل اسميهما (نظرية بولزانو- ڤيرشتراس) وتدور حول ما يعرف بالفراغ القياسي.

ب- فبالنسبة للتحليل الحقيقي: يعتبر الرياضي الفرنسي هنري لبيج H. Le Besgue (١٨٧٥-١٩٤١) أحد مؤسسي التحليل الرياضي الحديث حيث تناولت أبحاثه نظرية الدوال ذات المتغيرات الحقيقية التي هي أساس التحليل الحقيقي، وكذالك نظرية المقياس والتكامل، وهو صاحب التكامل المشهور المعروف باسمه (تكامل لبيج).

أما الرياضي الفرنسي ذو الأصل الهولندي توماس ستيلتجز T. Stieltjes (١٨٥٦-١٨٩٤) والذي توفي وعمره ٣٨ عاماً فقد ساهم مساهمة فعالة في نظرية المقياس والتكامل، وله تكامل مشهور معروف باسمه (تكامل ستيلتجز).

ومن العلماء الذين أسهموا مساهمات كبيرة في تطور التحليلي الحقيقي في القرن العشرين نذكر:

١- الرياضي الفرنسي رنيه باير R.Baire (١٨٧٤-١٩٣٢) صاحب الأبحاث المتميزة في الدوال ذات المتغيرات الحقيقية، وله دالة محدودة ذات قيم حقيقية مأخوذة على فراغ معروف باسمة (فراغ باير) هي دالة باير.

٢- الرياضي الروسي **بول أوريزون P. Urysohn** (١٨٩٨-١٩٢٤) الذي ظهر نبوغه مبكرا، ووضع نظرية عرفت باسمه (نظرية أوريزون) عام ١٩٢٢ وكان عمره ٢٤ عاماً، وهي من النظريات الأساسية في التحليل الحقيقي ولها تطبيقات في مجالات متعددة في الرياضيات، ولم يعش أوريزون طويلاً فقد توفي عام ١٩٢٤ وكان عمره ٢٦ عاماً.

ج- **وبالنسبة للتحليل الدالي**: فقد ظهرت ملامحه الأولى مع ظهور التحليل الحقيقي، ويعتبر البعض أن التحليل الدالي أعم وأشمل من التحليل الحقيقي، وقد نشأ هذه الفرع في البداية أثناء دراسات في الفيزياء الرياضية قام بها جاكوب وجوهان برنوللي عند إنشائهما لحساب التغيرات حيث قيمة التكامل تكون دالة للدوال التي نقوم بتكاملها، وقد أدخل جاك هادامارد J. Hadamard (١٨٦٥-١٩٦٣) كلمة دالي (Functional)، عام ١٩٠٣ عند دراسته للداليات الخطية F(f)، وواصل رنيه فريشية R. Freshet (١٨٧٨-١٩٧٣) تطوير الداليات بتعريف مشتقة دالية عام ١٩٠٤، وفي عام ١٩٠٧ قام إيرهارد شميدت E. Schmidt (١٨٧٦-١٩٥٩) بدراسة التقارب في الفضاءات المتتالية (Sequence Spaces)، وذلك بهدف تعميم فكرة متسلسلات فورييه.

وفي خطوة تالية للوصول إلى التجريد قام ستيفان باناخ عام ١٩٣٢ بإتخاذ الداليات الخطية لفريشية كأساس يبني عليه ما يعرف بالفضاءات المعيَّرة (Normed Spaces). ومن العلماء الذين لهم إسهامات متميزة في التحليل الدالي نذكر:

١- الرياضي الإيطالي **جوليو أسكولي J. Ascole** (١٨٤٣-١٨٩٦) الذي اقتصرت بحوثه على التحليل الدالي حيث أدخل مفهوم الاتصال المتكافئ وبرهن الشروط الضرورية والكافية كي تصبح مجموعة دوال مستمرة متلاحمة أو متراصة (Compact).

٢- الرياضي المجرى **فريجز ريسز F. Riesyz** (١٨٨٠-١٩٥٦) الذي بدا بحوثه عام ١٩٠٧ وعمره ٢٧ عاماً متخصصاً في التحليل الدالي، وله إسهامات

متميزة في هذا العلم جعلت منه أحد المؤسسين له وذلك لإدخاله فكرة الدوال المعممة، كما أن له إسهامات في علم التوبولوجي حيث أدخل عام ١٩٠٩ المفهوم الأكسيوماتي للتوبولوجي.

٣- الرياضي الفرنسي **بول ليفي P. Levy** (١٨٨٦-١٩٧١) أحد مؤسسي التحليل الدالي، وهو الذي أدخل مفهوم دالة التمركز، كما قام بدراسة تقارب الدوال ذات المتغيرات الحقيقية.

٤- الرياضي البولندي **ستيفان باناخ S. Banach** (١٨٩٢-١٩٤٥) الذي أدخل الفراغات التي تحمل إسمه (فراغات باناخ)، وهو احد الذين دعموا بقوة نظريات الرياضيات الحديثة، ومن أعماله تأسيسه لنظرية المؤثرات الخطية عام ١٩٣٢، ونظرية الفئات أو التصنيفات (Categories) عام ١٩٤٢ التي تعتبر أحدث من نظرية المجموعات إذ حسنت بعض الفجوات التي كانت موجودة في نظرية المجموعات.

د- أما بالنسبة لعلم التوبولوجي: فقد كان أول من استخدم كلمة توبولوجي (Topology) هو جوهان ليستنج J. Listing (١٨٠٢-١٨٨٢) في بحث نشره عام ١٨٤٧ بعنوان: دراسة حول التوبولوجي، وفي عام ١٨٥١ ثم في عام ١٨٥٧ أدخل ريمان مفهوم سطح ريمان، ثم ظهرت الملامح الأولي لعلم التوبولوجي على يدي أوجست موبيوس A. Mobius (١٧٩٠-١٨٦٨) عام ١٨٦٣ حين أدخل مفهوم شريحة موبيوس (Mobius Strip) وچورچ كانتور (G. Cantor)(١٨٤٥-١٩١٨) عام ١٨٧٢ الذي أدخل مفهوم مجموعة النقاط المحدودة (Set of Limit points)، كما عرف المجموعات الفرعية المغلقة لخط حقيقي، كما أدخل مفهوم المجموعة المفتوحة والمفهوم الأساسي في توبولوجي المجموعات النقطية، ثم على يدي هنري بوانكاريه (H. Poincare)(١٨٥٤-١٩١٢) عام ١٨٩٤ الذي وضع في ذلك العام أساس ما يعرف بالتوبولوجي الجبري (Algebraic Topology)، وأدخل لأول مرة مفهوم الهومولوجي (Homology) وكذلك مفهوم الهوموتوبي (Homotopy).

وفي القرن العشرين تم أعطاء دفعة قوية لعلم التوبولوجي نتيجة أبحاث عدد من علماء الرياضيات المشهورين في هذا القرن ونذكر منهم:

١- الفرنسي رنيه فريشيه R. Freshet (١٨٧٨-١٩٧٣) أحد المؤسسين للفراغات المترية عام ١٩٠٦، وقام بوضع الأساسي لفراغ توبولوجي متجه سمي باسمه (فراغ فريشيه)، كما أدخل مفهوم الفضاء الملتصق أو الملتحم أو المتراص (Compact)، وعمم أفكار كانتور حول المجموعات الفرعية المفتوحة والمغلقة إلى الفضاءات المترية، وقد توفي فريشيه عام ١٩٧٣ وكان عمره ٩٥ عاماً.

٢- الهولندي لويتزن براور L. Brouwer (١٨٨١-١٩٦٦) صاحب مبدأ الحدسية في المنطق الرياضي والذي امتدت أعماله في الرياضيات إلى علم التوبولوجي أيضاً، حيث قام بإكمال تعريف بُعد الفراغ التوبولوجي عام ١٩١٣وأعتبر بذلك أحد مؤسسي هذا العلم في صورته المعاصرة، وقد اثبت براور أن بُعدية (Dimensionality) الفراغ الكريتري هي لا متغير (Invariant) توبولوجي. ويذكر أن براور قام بتجميع أعمال بوانكاريه وطورها في نظرية توبولوجيه متكاملة نشرها عام ١٩١٣.

٣- الألماني فليكس هوسدورف F. Hausdorff (١٨٦٨-١٩٤٢) الذي أوجد الأسس الأكسيوماتية للتوبولوجي والتوبولوجي الجبري، وقام بتطوير المدخل الأكسيوماتي للتوبولوجي الذي وضعه فريجز ريسز F. Riesys (١٨٨٠-١٩٥٦) عام ١٩٠٩، وذلك عام ١٩١٤ حيث عرف هوسدورف مفهوم الجوار باستخدامه أربعة مسلمات، وقد سمحت أعمال ريسز وهوسدورف بتعريف الفراغات التوبولوجية القياسية ومنها الفراغ المسمى بإسم هوسدورف (فراغ هوسدورف).

٤- الروسي باقال ألكسندروف P. Aleksandrov (١٨٩٦-١٩٨٢) الذي يعود إليه الفضل في اكتشاف الفراغات الملتحمة.

وكذلك تلميذيه أندريه تيخونوف A. Tikhonov (١٩٠٦-١٩٩٣) صاحب نظرية تيخونوف حول الفراغات الملتحمة، ليف بونترياجن L. Pontryagin (١٩٠٨-١٩٨٨) الذي درس التوبولوجي الجبري والزمر التوبولوجيه بصورة دقيقة ووضع فيها عدة مؤلفات ترجمت من الروسية إلى الإنجليزية والفرنسية والألمانية.

٥- الأمريكي ذو الأصل الروسي <u>**أوسكار زارسكي O.Zariski**</u> (١٨٩٩-١٩٨٦) صاحب ما يعرف بتوبولوجي زارسكي (١٩٣٧).

٦- الروماني <u>**سيمون ستويلوف S. Stoilov**</u> (١٨٨٧-١٩٦١) صاحب النظرية التوبولوجيه للدوال التحليلية.

٧- البولندي كازمير كوراتوفسكي K. Kuratowski (١٨٩٦-١٩٨٠) الذي أدخل مفهوم المثاليات (Ideals) في التوبولوجي العام وذلك عام ١٩٣٢.

٨- النمساوي <u>**أوتو شراير O.Schreier**</u> (١٩٠١-١٩٢٩) مؤسس نظرية الزمر التوبولوجيه عام ١٩٢٣ حين كان عمره ٢٢سنة، وقد توفى مبكرا وعمره ٢٨ سنة.

٩- الأمريكي <u>**أندريه وايل A. Weil**</u> (١٩٠٦-١٩٩٨) صاحب الأبحاث المتميزة في نظرية الزمر المتلاحمة وفي الهندسة الجبرية التي كان ديدكند (١٨٣١-١٩١٦) وڤيبر (١٨٤٢-١٩١٣) أول من بحثا فيها، حيث درسا فيها المنحنيات الجبرية بطرق هندسية وبينا أهمية الهندسة في دراسة حلقة الدوال المنظمة لتلك المنحنيات.

ويذكر لوايل أبحاثه حول الفراغات التوبولوجية وهي أبحاث أدت إلى تطور كبير في علم التوبولوجي مع زارسكي وڤان ديرڤاردن B. Vander Waerden (١٩٠٣-١٩٩٦).

١٠- الأمريكي <u>**صمويل إيلنبرج S. Eilenberg**</u> (١٩١٣-١٩٩٨) مؤسس علم الهومولوجي (الجبر المتشابة) وهو أحد فروع التوبولوجي الجبري وكذلك علم الكوهومولوجي (جبر المتشابهات معاً) وذلك في الأربعينيات من القرن العشرين.

ظهور التوبولوجي الفازي (أو الضبابي):

في عام ١٩٦٥ قدم العالم الأمريكي من أصل إيراني لطفي زاده (١٩٢١-٠٠٠) L. Zadah الأستاذ بجامعة كاليفورنيا مفهوم المجموعات الفازية (Fuzzy Sets)، كتعميم للمجموعات العادية، وهي تعطي وصفاً أكثر دقة للظواهر الطبيعية بدلاً من الوصف التي تعطيه نظرية المجموعات العادية. ومنذ ذلك الحين اتجه العلماء إلى تطبيق مفهوم المجموعات الفازية في معظم فروع الرياضيات النظرية والتطبيقية، حيث أمتد ذلك إلى العديد من العلوم الأخرى مثل علوم الحاسب الآلي (الذكاء الصناعي – نظم التحكم ....) وعلم البيولوجي والأقتصاد والهندسة الوراثية وغيرها.

وكان علم التوبولوجي هو اللبنة الأولى لتطبيق مفهوم المجموعات الفازية وذلك عام ١٩٦٨ عندما أدخل تشانج (C. L. Chang) مفهوم الفراغات التوبولوجية الفازية، ومنذ ذلك الحين وجهود العلماء تتوالي عاماً بعد عام لتقديم معرفات ومفاهيم جديدة لتطوير علم التوبولوجي الفازي.

وجدير بالذكر أن لطفي زاده نفسه أدخل عام ١٩٧٣ ما يعرف بعلم المنطق الفازي (Fuzzy Logic) حيث تمت دراسة المفاهيم الغازية باستخدام المنطق الرياضي العادي.

ومن الموضوعات الهامة في التوبولوجي الفازي نذكر إدخال مفهوم المجموعات الفرعية الفازية التي أدخلها روزنفيلد A. Rosenfeld عام ١٩٧١ وكذلك الهندسة الفازية (Fuzzy Geometry) التي أدخلها روزنفيلد أيضاً عام ١٩٧٤. وقد تطور التوبولوجي الفازي منذ ذلك الحين تطوراً كبيراً، وما زال في تقدم مستمر.

وللإطلاع على المزيد من الإنجازات الرياضية في القرن العشرين أنظر الباب الأول- البند الخاص برياضيات القرن العشرين.

سابعاً: الرياضة التطبيقية من علم الحيل إلى ميكانيكا الكم

(١) الميكانيكا في عصر ما قبل الميلاد (عصر اليونانيين القدامى):

كان علم الميكانيكا هو أول فروع الرياضيات التطبيقية ظهوراً، وكان ذلك في كتابات بعض العلماء اليونانيين القدامى، أمثال:

١- ليوسيبس (٤٩٠-٤٢٠ق.م)

وهو أول من تحدث عن الحركة، وقال بأن الحركة هي الشكل الممكن الوحيد للتغير، بمعنى أن كل التغيرات التي تحدث في الكون يمكن فهمها عن طريق الحركة، وقال أيضاً بأن الحركة يمكن أن تتم في الفضاء الحر (أو الخلاء)، وأن الأجسام في حركتها الدائرية تتحرك بعيداً عن المركز، ويحمل هذا القول في طياته فكرة القوة المركزية الطاردة.

٢- أرخيتاس (٤٢٨-٣٤٧ق.م)

وهو الذي قام بدراسة الحركة دراسة منهجية، وقام بإختراع نظام البكرات المتحركة، وهو نظام ميكانيكي يساهم في حل العديد من المسائل الميكانيكية التطبيقية.

٣- ستراتو (٣٤٠-٢٧٠ق.م)

وكان أول من قال بأن الأجسام عند سقوطها تكون معجلة أي أنها تتحرك أسرع بمرور الفترات الزمنية المتعاقبة، وهو بذلك أول من تحدث عن الكمية الميكانيكية المعروفة بالعجلة (أو التسارع).

أيضاً فقد كان ستراتو على علم بقوانين الروافع ولكنه لم يستخدمها كما فعل أرشميدس بعد ذلك بخمسين عاماً.

٤- أرشميدس (٢٨٧-٢١٢ق.م)

الأستاذ بجامعة الإسكندرية القديمة، وقد أشتهر بوضعه قانوناً لطفو الأجسام في السوائل (ويعرف بقاعدة أرشميدس)، كما أستنتج قوانين الروافع وعرف مركز الثقل

وأوجد مراكز الأثقال للعديد من الأجسام الهندسية المتجانسة مثل المستطيل والمربع والمثلث ومتوازي الأضلاع ونصف الدائرة.

كما صاغ أرشميدس بصورة رياضية (ولأول مرة) قاعدة إضافة (أو تركيب) الحركات.

ويعتبره المؤرخون مؤسس علمي الاستاتيكا والهيدروستاتيكا نتيجة لبحوثه المتميزة في كل منهما، وله في ذلك كتابين هما:

(أ) إتزان المستويات (إستاتيكا).

(ب) الأجسام الطافية (هيدروستاتيكا).

٥- <u>هيرون الأسكندرى (٢٠-٩٥ م)</u>

الذي عاش في الإسكندرية في القرن الأول الميلادي، وهو أول من أطلق على علم الميكانيكا اسمه فوضع كتاباً اسماه (Mechanica)، أورد فيه كل ما كتب من قبله عن الروافع والبكرات والعجلات، وقام بصنع عدد من الآلات الميكانيكية البسيطة مثل الآلات التي تعمل ببخار الماء أو الهواء المضغوط فقام بعمل مضخة بخارية يدخل فيها البخار إلى كرة مجوفة فيحركها، وقام باختراع السيفون، وكان أول من عرف الشغل بأنه حاصل ضرب القوة المؤثرة على الجسم في المسافة التي يتحركها الجسم.

وقد ترجم كتاب الميكانيكا لهيرون إلى اللغة العربية بعد وفاته بنحو ٨٠٠ سنة على يد العالم العربي قسطا بن لوقا البعلبكى.

(٢) <u>الميكانيكا في عصر الحضارة الإسلامية:</u>

وفي عصر الحضارة العربية والإسلامية الزاهرة بدأ العلماء تميزهم العلمي بترجمة الكتب العلمية اليونانية القديمة إلى اللغة العربية وذلك في الرياضيات والفلك والطب والكيمياء، وظهر المترجمون العظام أمثال: حنين بن أسحق (٨٠٨-٨٧٣م) شيخ المترجمين وعميدهم أيام الخلفية العباسي المأمون، وقد قام بترجمة نحو ٢٠٠ كتاب إلى العربية، وقد عينه المأمون رئيساً لديوان الترجمة، وكان المأمون يعطيه من الذهب زنة ما ينقله إلى العربية من كتب.

وقد تم ترجمة بعض مؤلفات أرشميدس وهيرون الإسكندري في ذلك الوقت فكانت أساساً لبعض العلماء العرب الذين ألفوا في علم الميكانيكا آنذاك، وقد أطلق العلماء العرب على هذا العلم: علم الحيل، وذلك لأنهم اعتبروا أن هذا العلم يطبق في صنع بعض الآلات التي تقوم بأعمال عجيبة (أوحيل) مثل الروافع التي تستخدم في رفع المياه من الآبار العميقة، والمضخات، والمراوح الهوائية وغيرها.

وممن برعوا في علم الحيل نذكر:

١- **أبناء موسى بن شاكر:**

وهم ثلاثة أبناء للفلكي والرياضي العربي موسى بن شاكر الذي عاش في بغداد في عصر الخليفة المأمون وتوفي سنة ٨٢٥م (٢١٠هـ)، وترك أبناءه الثلاثة محمد وأحمد وحسن في رعاية المأمون حيث أسند إليهم مهمات علمية كبيرة مثل إرسالهم لشراء وجلب الكتب من بلاد الروم لترجمتها، والاشتراك في ترجمة تلك الكتب مع كبار المترجمين أمثال حنين بن إسحق وثابت بن قرة وغيرهما.

وكان محمد موسي بن شاكر (٨١٠-٨٧٣م) متخصصاً في علمي الهندسة والفلك وقام مع أخويه أحمد وحس بتأليف كتاب (الحيل) المعروف بحيل بني موسى، ويشتمل على أساسيات في علم الميكانيكا إضافة إلى مائة تركيب ميكانيكي (أو حيله) منها: إقامة خزان للمياه بجانب نهر، ثم يملأ بالماء بحيث لا يزيد ولا ينقص أبداً، ومنها جهاز يساعد على توصيل المياه إلى الأماكن العالية كالمنارات والقلاع وغيرها.

وقد عرف بنو موسى بن شاكر علم الحيل في مقدمة كتابهم بأنه العلم الذي يحصلون به على الفعل الكبير من الجهد البسيط، أو بلغة العصر: استخدام قوة بسيطة لتوليد شغل (أو طاقة) كبيرة.

٢- **أحمد بن خلف المرادي** (المتوفي عام ١٠٧٢م)

وهو من بلاد الأندلس وكان أول من تخصص في الميكانيكا (أو علم الحيل) في تلك البلاد، واشتهر بكتابه (الإيثار في نتائج الأفكار) والذي أكتشف مخطوطته بمكتبة

فلورنسا بإيطاليا البروفيسور جون ڤيرنيه أستاذ تاريخ العلوم العربية بجامعة برشلونة ونشر عنه بحثاً مستفيضاً بعنوان (الإنجازات في علم الميكانيكا في الأندلس)، ويشتمل كتاب أحمد المرادي على أسس علم الميكانيكا وتطبيقات تفصيلية لعدد كبير من الآلات الميكانيكية المتحركة والطواحين والمكابس المائية وطريقة عملها مزودة برسوم لكل تلك الآلات.

٣- <u>أبو الفتح عبد الرحمن الخازني</u> (المتوفي عام ١١٤٠م)

واشتهر بكتابه (ميزان الحكمة) الذي اشتمل على بحوث متطورة في علم الميكانيكا لم يأت بها غيره ممن سبقوه من علماء اليونان والعرب، حيث بحث في الجاذبية الأرضية وإستاتيكا الموائع (الهيدروستاتيكا) وتطبق قاعدة أرشميدس للطفو على الغازات، والضغط الجوى وغيرها، وهو كما قال عنه ألدوميللي في كتابه (العلم عند العرب): أنه من أهم الكتب العربية في فن الحيل (علم الميكانيكا) وتوازن السوائل (الهيدروستاتيكا).

٤- <u>هبة الله بن ملكا البغدادي</u> (المتوفي عام ١١٦٥م)

وهو فيزيائي وفيلسوف وعالم بالمنطق وطبيب أيضاً، كان يهودياً وأسلم في عهد الخليفة العباسي المسترشد بالله، وقام بوضع كتاب هام هو: (المعتبر في الطب والحكمة)، وهو في عدة مجلدات، وأختص الجزء الثاني منه بمعلومات قيمة في الميكانيكا وعلم الفيزياء وكذلك في المنطق، وأورد فيه إشارات واضحة لمعنى الحركة وأنواعها وعن قوى الإخماد والعلاقة بين القوة والسرعة وعجلة الجاذبية وقانون الفعل ورد الفعل (قانون نيوتن الثالث)، وهو بذلك أول من أشار إلى هذا القانون قبل نيوتن بعدة قرون.

٥- <u>بديع الزمان ابن الرزاز الجزرى</u> (المتوفي عام ١٢١٥م)

وقد وضع كتاباً هاماً اسمه (الجامع بين العلم والعمل، النافع في صناعة الحيل)، وضعه عام ١٢٠٥م وشرح فيه علم التوازن (الاستاتيكا) والتحريك (الديناميكا)

وطبقهما عملياً في صناعة العديد من الأجهزة الميكانيكية مثل الساعات وغيرها، واستخدم توازن السوائل (الهيدروستاتيكا) في صناعة الآلات المستخدمة في إخراج المياه من المواضع العميقة، وذيل الكتاب بعدد من الصور والأشكال للآلات التي قام بدراستها وعددها نحو ستين آله، وصفها بدقة بالغة.

(٣) علم الميكانيكا في صورته المعاصرة – نشأة الميكانيكا التقليدية (أو الكلاسيكية):

وبعد الحديث عن إسهامات علماء الحضارة الإسلامية في علم الميكانيكا ننتقل إلى نشأة علم الميكانيكا بصورته المعاصرة في القرن السابع عشر الميلادي على يدي العالمين الإيطالي جاليليو والإنجليزي نيوتن والذي يطلق عليه إسم (الميكانيكا التقليدية أو الكلاسيكية)، ونعطي نبذة عن إسهامات كل منهما في نشأة علم الميكانيكا:

١- جاليليو جاليلي (١٥٦٤-١٦٤٢)

عمل أستاذاً للرياضيات في جامعة بيزا عندما كان في الخامسة والعشرين من عمره، أشار إلى قوانين نيوتن في الحركة ووضع قوانين الحركة النسبية وقوانين الحركة بعجلة ثابتة وقوانين الحركة تحت تأثير الجاذبية، وقوانين حركة البندول واخترع الميزان الهيدروستاتيكي، وله اكتشافات فلكية هامة وقد توفي في السنة التي ولد فيها نيوتن.

٢- إسحق نيوتن (١٦٤٢-١٧٢٧)

عمل أستاذاً للرياضيات بجامعة كمبردج وزميلاً بالجمعية الملكية البريطانية ورئيساً لتلك الجمعية التي تضم أئمة العلم في انجلترا وظل كذلك حتى وفاته. أسهم نيوتن مساهمات كبيرة في علم الميكانيكا منها مثلاً: قوانينه الثلاثة المعروفة بالقوانين الأساسية للحركة، والنظرية الديناميكية للجاذبية التي اشتملت على قانون الجذب العام الذي ينص على أن قوة الجذب بين الأرض والقمر تتناسب عكسياً مع مربع المسافة. ولنيوتن إسهامات كبرى في علم الضوء وفي الفلك أيضاً.

٣- وقبل جاليليو ونيوتن كان هناك العالم البولندي **نيقولاي كوبرنيكس (١٤٧٣-١٥٤٣)** مؤسس علم الميكانيكا السماوية والذي عمل أستاذاً للرياضيات والفلك بجامعة روما، وقد أكتشف كوبرنيكس أن الشمس هيّ مركز المجوعة الشمسية وأن الأرض هي مجرد تابع للشمس وليست المركز كما كان معتقداً من قبل، وأصدر كتاباً عن (دوران الأفلاك) سنة ١٥٣٠ ضمنه آراءه العلمية، وقد منع الكتاب من النشر وحرم توزيعه حتى عام ١٧٥٨م بسبب معارضه الكنيسة مما ورد في الكتاب من آراء عن الكون تتعارض مع نظرة الكنيسة آنذاك.

٤- وعاصر جاليليو العالم الرياضي والفلكي الألماني **جوهانز كبلر (١٥٧١-١٦٣٠)** الذي صاغ قوانينه المشهورة في حركة الكواكب والتي أضافت الكثير إلى أعمال كوبرنيكس في الميكانيكا السماوية، ومكنت نيوتن فيما بعد من صياغة قانون الجذب العام.

وهكذا تمت صياغة الميكانيكا الكلاسيكية (أو التقليدية) والتي يطلق عليها عادة أسم الميكانيكا النيوتونية، والتي تعتمد أساساً على قوانين الحركة المعروفة لنيوتن، والميكانيكا السماوية التي تعتمد أساساً على قوانين الحركة الكوكبية لكبلر.

٥- وفي القرن الثامن عشر ظهر العالم الفرنسي **جوزيف لاجرانج (١٧٣٦-١٨١٣)**، الذي عمل أستاذا للرياضيات في مدرسة البولتكنيك بباريس وأسهم إسهامات جليلة في العديد من مجالات الرياضيات التطبيقية كان أهمها إعادة صياغة قوانين الميكانيكا على أسس تحليلية (لا تعتمد على قوانين نيوتن في الحركة) وأطلق على هذه الصياغة الجديدة أسم: الميكانيكا التحليلية (Analytical Mechanics) وأصدر فيها مؤلفه الشهير الميكانيكا التحليلية (Mecanique Analytique) الذي نشر بالفرنسية علم ١٧٨٨م.

٦- ثم جاء من بعد لاجرانج (وفي القرن التاسع عشر) العالم الإنجليزي **السير وليام هاملتون (١٨٠٥-١٨٦٥)** الذي طور الميكانيكا التحليلية بإدخال المعادلات المعروفة باسمه (معادلات هاملتون) [والتي تتميز عن معادلات لاجرانج بأنها معادلات من

الدرجة الأولي، بينما معادلات لاجرانج من الدرجة الثانية]، وكذلك القاعدة المعروفة بقاعدة أقل فعل (least action) أو قاعدة هاملتون، كما أنه ساهم في تطوير الميكانيكا السماوية أيضاً.

(٤) <u>الحاجة إلى ميكانيكا جديدة لوصف الأنظمة الذرية والإشعاع:</u>

ونأتي الآن لنهايات القرن التاسع عشر الميلادي وبدايات القرن العشرين، وكان الوضع كالتالي:

<u>أولاً:</u> تم اكتشاف الإلكترون، وهو أحد الجسيمات التي تدخل في بناء الذرة وذلك عام ١٨٩٨ على يد العالم الإنجليزي <u>**ج.ج. طوسون (١٨٥٦-١٩٤٠)**</u> ، وعندما طبقت عليه ميكانيكا نيوتن وجد أن هناك اختلاف بين النتائج التي نتحصل عليها والنتائج المعملية، فكان من اللازم إيجاد ميكانيكا جديدة لشرح الظواهر الذرية (أو الالكترونية).

وكانت هذه الميكانيكا الجديدة هي ميكانيكا الكم التي أطلق عليها في البداية اسم الميكانيكا الذرية لأنها تقوم على دراسة الأنظمة الذرية.

<u>ثانياً:</u> وجد أن افتراض العالمين رالي وجينز بأن الإشعاع الصادر من الأجسام الساخنة يكون بصورة متصلة يؤدى إلى نتائج لا تتفق مع النتائج المعملية، فأفترض العالم الألماني <u>ماكس بلانك (١٨٥٨-١٩٤٧)</u> عام ١٩٠٠ أن الإشعاع يصدر من الأجسام الساخنة على صورة نبضات منفصلة كل منها يحمل كمية من الطاقة، وأطلق علي كل نبضة اسم كونتم أو كم (quantum)، وقال بلانك بأن الطاقة التي يحملها كل كونتم (أو نبضة الإشعاع) تتناسب مع تردد الإشعاع (υ) أي أن $\varepsilon \propto \upsilon$ وهذا يعني أن $\varepsilon = h\upsilon$ (حيث الثابت h يعرف بثابت بلانك) وكان هذا أول خطوة نحو بناء ميكانيكا الكم (Quantum Mechanis) .

(٥) <u>نشأة وتطور ميكانيكا الكم:</u>

يمكن تعريف ميكانيكا الكم بأنها ذلك الفرع من العلم الذي ندرس فيه عالم الأشياء المتناهية في الصغر كالجزئيات والذرات والنويات ومكوناتها من جسيمات أولية (وهو ما يعرف بالأنظمة الذرية)، وذلك من حيث:

حركتها وتفاعلاتها مع بعض ومع المــواد، وكــذلك المجــالات العاملــة بينهــا وخصائص تلك المجالات.

وقد أسس هذا العلم على مبادئ محددة أهمها:

١- **عملية الازدواجية بين المادة والموجه:**

وهي فكرة وضعها العالم الفرنسي لــويس دي برولــي (١٨٩٢-١٩٨٧) عــام ١٩٢٤ وتقول أن الجسيمات المتناهية في الصغر ذات وجهين:

أحدهما تمثله الخواص الجسيمية لتلك الجسيمات والآخر تمثله خواص موجيــة ناتجــة عن افتراض وجود موجات تصاحب حركة هذه الجسيمات.

٢- **وجود دالة موجية أو دالة حالة:**

وهو أفتراض وضعه العالم الألماني ماكس بورن (١٨٨٢-١٩٧٠) عــام ١٩٢٥ ومؤداه: أن افتراض وجود الخاصية الموجية للجسيمات يؤدى إلى إفتراض وجود دالة تصف تلك الازدواجية هي الدالة الموجية أو دالة الحالة ويرمز لها بالرمز ψ.

خواص الدالة الموجية(ψ)

تتميز الدالة الموجبة بخواص رياضية معينة فهي لابد أن يكون سلوكها الرياضــي جيداً (Well-behaved Mathematically).

بمعني أنها تكون:

(١) دالة متصلة Continous

(٢) دالة محدودة Finite

(٣) دالة أحادية القيمة Single Valued

وهي تخضع أيضاً لخاصيتين هامتين هما:

(i) المعايرة (أو التقنين) Normalization، بمعني أن حاصل ضربها القياســي مــع نفسها يساوي الوحدة.

(ii) خاصية التعامد orthogonalization، بمعنى أن حاصل الضرب القياسي لهــا مع دالة أخرى في نفس الفراغ يساوى صفراً.

٣- صفة الاحتمالية:

وقد وضعها كل من فرنر هيزنبرج (١٩٠١-١٩٧٦) وماكس بورن عام ١٩٢٦ ومؤداها: تتميز الميكانيكا الجديدة (ميكانيكا الكم) بصفة الاحتمالية خلافاً للميكانيكا التقليدية أو الكلاسيكية (ميكانيكا نيوتن وجاليليو).

ففي الميكانيكا التقليدية: يمكن تحديد وضع الجسم وسرعته عند لحظة معينه بدقة تامة.

وفي الميكانيكا الكمية: لا يمكن التحديد الدقيق والمتزامن لوضع جسيم وسرعته في لحظة ما [وتعرف بقاعدة عدم التحديد لهيزنبزج Uncertainty Principle].

وهذا يؤدي إلى: أن الحديث يكون فقط عن احتمال وجود الجسيم في المنطقة المعينة وليس عن مكان وجوده بالضبط.

نتيجة خاصية الاحتمالية فإن ماكس بورن عام ١٩٢٦ أقترح علاقة محددة لتعريف الدالة الموجبة وهي: أن مربع الدالة الموجية يعني احتمال وجود الجسيم في مكان ما من الفراغ في فترة زمنية معينة.

حيث ψ^* هي المرافق المركب للدالة ψ $\qquad \boxed{P = |\psi|^2 = \psi^* \psi}$

[لأن الدالة الموجبة هي دالة مركبة بوجه عام]

ويكون الاحتمال الكلي:

$$\int P\,dV = \int \psi^* \psi\,dV = 1$$

ويعرف التكامل $\int \psi^* \psi\,dV$ بحاصل الضرب القياسي للدالة ψ في نفسها، ويكتب بالصورة: $\qquad (\psi, \psi) = \int \psi^* \psi\,dV$

٤- وأخيراً تتميز الميكانيكا الجديدة عن الميكانيكا التقليدية باستخدام ما يعرف بالمؤثرات (Operators) وهي كميات رياضية ذات خواص معينة، وذلك بدلا من الكميات العادية المستخدمة في الميكانيكا الكلاسيكية، والتي تصف الخواص الطبيعية للجسيمات.

وقد أقترح وجود المؤثرات العـالم الإنجليـزي بـول ديـراك (١٩٠٢-١٩٨٤) عام ١٩٢٦.

والخلاصة أنه :

في الميكانيكا الكلاسيكية: نستخدم الكميات الطبيعية مثل الإزاحـة والـسرعة والقـوة والطاقة وغيرها.

في الميكانيكا الكمية: نستخدم مؤثرات بدلا من تلك الكميات مثل مؤثر الإزاحة ومؤثر السرعة ومؤثر القوة ومؤثر الطاقة وهكذا.

وإذا أثرت هذه المؤثرات على الدوال الموجيه التي تصف حركة الجسيمات فإننـا نحصل على معادلة رياضية تعطينا كافة المعلومات المطلوبة عن الجسيم أو منظومـة الجسيمات التي ندرسها.

وهذه المعادلة تعرف بمعادلة القيمة الذاتية (Eigenvalue Equation) وصورتها:

$$\hat{A}\psi = a\psi$$

حيث a تعرف بالقيمة الذاتية المناظرة للمؤثر $\hat{A}$.

إن أهـم مـؤثر فـي ميكانيكـا الكـم هـو مـؤثر هـاملتون أوالهـا ملتونيـان Hamiltonian Operator والذي يعرف باختصار بأنه المـؤثر المنـاظر للطاقـة الكلية للجسم (أو النظام) أي انه يساوى مجموع مؤثري الطاقة الحركية $(\hat{T})$ وطاقـة الجهد $(\hat{U})$.

$$\therefore \ \hat{H} = \hat{T} + \hat{U}$$

في الميكانيكا الكلاسيكية: فإن دالة هاملتون تعرف بأنها مجموع طـاقتي الحركـة والجهد $(H = T + U)$

إذا وضعنا $\hat{A} = \hat{H}$ في معادلة القيمة الذاتية نحصل على المعادلة:

$$\boxed{\hat{H}\psi = E\psi} \qquad \text{(I)}$$

حيث E هي الطاقة الكلية للجسيم، وتعتبر هنا ممثلة للقيمة الذاتية المناظرة للمـؤثر $\hat{H}$ لهاملتون.

العلاقة (I) تعرف بمعادلة شرودنجر (Schrodinger Equation) وتعتبر المعادلة الأساسية في ميكانيكا الكم، وقد وضعها العالم النمساوي أروين شرودنجر (١٨٨٧-١٩٦١) عام ١٩٢٥.

وتصف معادلة شرودنجر الجسيمات المتحركة بالسرعات اللانسبية (Non-Relativistic Velocities) أي السرعات الأقل بكثير من سرعة الضوء، ولذلك يعرف هذا الفرع من ميكانيكا الكم الذي يُبنى على معادلة شرودنجر بميكانيكا الكم غير النسبية.

٥- وإذا انتقلنا إلى الجسيمات التي تتحرك بسرعات نسبيه (عالية جداً تقترب من سرعة الضوء) فإن معادلة شرودنجر اللانسبية قد فشلت في تفسير العديد من الظواهر الذرية، وقد دفع هذا العالم الإنجليزي بول ديراك أن يضع نظرية جديدة عام ١٩٢٧ مزج فيها بين ميكانيكا الكم والنظرية النسبية التي وضعها آينشتين عام ١٩٠٥ وفسر بها حركة الجسيمات ذات السرعات العالية (أو النسبية)، وسميت نظرية ديراك الجديدة بميكانيكا الكم النسبية (Relativistic Q.M.) واستبدلت فيها معادلة شرودنجر بمعادلة أخرى سميت معادلة ديراك، وتم تطبيقها بنجاح لتفسير الظواهر التي لم يكن من الممكن تفسيرها باستخدام ميكانيكا شرودنجر اللانسبية.

٦- ويمكن تلخيص المراحل التاريخية التي مرت بها ميكانيكا الكم في الآتي:

أ- المرحلة الأولي: من سنة ١٩٠٠ وحتى ١٩٢٣، وتعرف بمرحلة النشأة (نشأة ميكانيكا الكم) وفيها ظهرت افتراضات واكتشافات هامه كان أهمها: افتراض العالم الألماني ماكس بلانك وجود ما يعرف بالكم (أو الكونتم) وهو عبارة عن نبضات متتالية من الطاقة الإشعاعية الصادرة عن الأجسام، قيمة كل منها يتناسب مع تردد الإشعاع الصادر بمعنى أن $\varepsilon = h\upsilon$، حيث h يعرف بثابت بلانك.

ب- المرحلة الثانية: من سنة ٢٤-١٩٢٨، وامتدت لمدة خمس سنوات وتعرف بالمرحلة الذهبية وهى من أخصب السنوات في حياة ميكانيكا الكم حيث تم فيها تكوين أساسيات هذا العلم

ففي سنة ١٩٢٤: وضع دي برولى الخاصية الازدواجية للموجات والمادة.
وفي سنة ١٩٢٥: وضع ماكس بورن مفهوم الدالة الموجة والخاصية الأحتمالية.
ووضع هيزنبرج قاعدة عدم التحديد، ووضع شرودنجر معادلته الشهيرة
وفي سنة ١٩٢٦: وضع ديراك نظرية المؤثرات في ميكانيكا الكم.
وفي سنة ١٩٢٧: أكتشف ديراك معادلته الشهيرة وفسر بها وجود خاصية اللف ووجود الجسيمات المضادة وهي جسيمات مقابلة للجسيمات المعروفة لها نفس كتلتها ونفس مقدار شحنتها، ونفس مقدار اللف ومقدار العزم المغنطيسي، ولكنها تختلف معها في بعض الخواص مثل إشارة الشحنة وإشارة العزم المغناطيسي واتجاه اللف.
وفي سنة ١٩٢٨: وضع هيزنبرج وباولى النظرية الكمية للظواهر الكهربية والمغنطيسية.

ج- <u>المرحلة الثالثة</u>: من سنة ٢٩-١٩٣٩

وامتدت هذه المرحلة لمدة عشر سنوات ظهرت فيها تطبيقات هامه (معظم التطبيقات التي ندرسها حالياً) لميكانيكا الكم نذكر منها:

(i) تفسير الظواهر الكهرومغناطيسية على أساس ميكانيكا الكم: كلاين ونشينا (١٩٢٩).
(ii) تفسير نظريات الإشعاع على أساس ميكانيكا الكم : بيث وهايتلر (١٩٣٤).
(iii) نظرية القوى الضعيفة في التفاعلات النووية: فيرمي (١٩٣٤).
(iv) نظرية القوى النووية الشديدة: يوكاوا (١٩٣٥).
(v) النظرية الكمية للإشعاع تحت الأحمر: بلوخ (١٩٣٧).
(vi) نظرية الجسيمات الوسيطة (الميزونات): يوكاوا وساكاتا (١٩٣٨).

وتلي ذلك فترة ركود (٣٩-١٩٤٦) تخللتها الحرب العالمية الثانية.

د- <u>المرحلة الرابعة</u>:

بدأت بعد الحرب العالمية وامتدت من عام ١٩٤٧ حتى الآن وهى مرحلة غنية بإنجازاتها فقد شهدت ظهور ما عرف بنظرية الكم للمجالات (Quantum Theory of Fields) التي ندرس فيها تطبيق ميكانيكا الكم لدراسة

خواص مختلف المجالات الموجودة في الطبيعة والعمل على توحيد هذه المجالات في مجال واحد له معادلات نستنتج منها خواص كل مجال على حده.

وقد بدأت في الربع الأخير من القرن العشرين الخطوات نحو إيجاد تلك النظرية التي تصف كافة المجالات العاملة بين الجسيمات المختلفة أثناء تفاعلها، وقد أطلق عليها العالمان المعاصران جون شوارتز (١٩٤١-...) وميشيل جرين (١٩٤٦-...) اسم: نظرية كل الأشياء Theory of Everythings، وتعرف اختصارا (TOE)

ويقول العلماء أنه إذا تم التوصل إلى تلك النظرية فهل ستكون هي نهاية المطاف بالنسبة لعلم الفيزياء الحديثة؟

وهو سؤال كبير مازال يحتاج لإجابة.

<u>ملاحظة:</u> اتجهت بعض الجامعات مؤخراً إلى التقليل من أهمية الرياضيات التطبيقية وضم بعض موضوعاتها مثل الميكانيكا التقليدية وميكانيكا الكم وغيرها، إلى علم الفيزياء، واقتصار الرياضيات على فروع الرياضيات البحتة فقط، وهو اتجاه خاطئ – في رأينا – ويؤيد قولنا هذا ما ورد في التقسيم الدولي للموضوعات الرياضية الذي ضمنه مجلة المراجعات الرياضية (Mathematical Reviews) [أنظر الملحق رقم(١) في نهاية الكتاب]، حيث تم تخصيص أرقام للموضوعات الخاصة بالمعالجة الرياضية للظواهر الفيزيائية (وهو مجال الرياضيات التطبيقية)، فنجد مثلاً:

الرقم(٧٠) يعطي لميكانيكا الجسيمات والمنظومات المكونة من عدة جسيمات.

والرقم(٧٣) يعطي لميكانيكا الأجسام الصلبة.

والرقم(٧٦) يعطي لميكانيكا الموائع والسمعيات (الصوت).

والرقم(٨٠) يعطي للديناميكا الحرارية التقليدية (الكلاسيكية).

والرقم(٨١) يعطي لميكانيكا الكم

والرقم(٨٢) يعطي للميكانيكا الإحصائية وبناء المادة.

وهكذا ترى أن تلك الموضوعات يمكن النظر إليها على أنها فروع من فروع الرياضيات تتضمن المعالجة الرياضية للظواهر الفيزيائية، وهي بلاشك جزء من الرياضيات التطبيقية