الفصل الثاني

المسابقات في الدول العربية

النموذج الأول

أجب عن جميع الأسئلة التالية:

♦ السؤال الأول: أوجد مجموعة الحل في كل مما يلي:

(1) $|x| - x^2 \geq 0$ (2) $\left[\frac{3}{x}\right] = 5$

(3) $e^{x^2-2x} = 1$ (4) $\frac{x-1}{x+2} > -1,\ x \neq -2$

♦ السؤال الثاني:

(1) أوجد: (أ) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{|x-1|}{|x-1|}$ (ب) $\lim\limits_{x \to 3} x[x]$

(2) لتكن $\vartheta : h \to j$ حيث $\vartheta(x) = \frac{x}{x^3 + x}$ أجب عما يلي:

(أ) أوجد مجال الدالة ϑ. (ب) أوجد نقاط تقاطع منحنى ϑ مع محور x.

(جـ) أوجد المحاذيات الأفقية: الرأسية (إن وجدت).

(د) مجموعة النقاط الحرجة (إن وجدت).

(هـ) فترات التزايد والتناقص للدولة ϑ. (و) ارسم بيان الدالة ϑ.

♦ السؤال الثالث:

(1) أوجد التكاملات الآتية:

(أ) $\int \frac{6x}{3x-2} dx$ (ب) $\int \frac{1}{1+e^{2x}} dx$

(2) أوجد مجموعة قيم x التي تحقق المعادلة الآتية:

$$\tan x + \tan 45 + \sqrt{3}\ \tan x \tan 45 - \sqrt{3} = 0, \qquad 0 < x < 360°$$

(3) أثبت أن: $\sum\limits_{r=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

♦ السؤال الرابع:

(1) أوجد معادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة $(4, 3)$ ومقطعه مع محور y ضعف مقطعه مع محور x.

(2) أخذت عينتان من مجتمعين فأعطتا النتائج الآتية:

$$n = 50, \quad \bar{x}_j = 6, \quad \sum_{j=1}^{40} y_j = 280$$

ثم دمجت المجموعتان. ما الوسط الحسابي للمجموعة الناتجة؟

(3) أوجد مجموعة حل المعادلة: $(x - 2)(x - 3)(x + 4)(x + 5) = 2640$

النموذج الثاني

اجب عن جميع الأسئلة التالية:

♦ السؤال الأول:

(1) أوجد كلاً من النهايات التالية (إن وجدت)

(أ) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin \pi x}{x - 1}$ (ب) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3 - x - 2x^5}{1 + 4x^5}$

(جـ) $\lim\limits_{x \to 1} [2x + 1] - [x]$

(2) أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ في كل مما يلي:

(أ) $\left(y^2 - 2x\right)^5 = 7x$ (ب) $y = \sqrt{\sin \sqrt{x}} + \cos^{-1} \pi x$

(3) ارسم بيان الدالة $\vartheta(x) = \dfrac{1 - x^2}{x^2}$ ، مبينًا المحاذيات الأفقية والرأسية والمجالات التي تكون عليها متزايدة والتي تكون عليها متناقصة.

♦ السؤال الثاني:

(1) إذا كانت: $\vartheta(x)$ معرفة على $[1, 4]$ وكانت $\vartheta(x) = x^3 + x + 1$

أثبت أنه توجد $c \in]1, 4[$ بحيث أن المماس المرسوم عند $(c, \vartheta(c))$ يوازي المستقيم المار بالنقطتين $(4, \vartheta(4))$، $(1, \vartheta(1))$

(2) اوجد كلا من التكاملات الاتية:

(أ) $\int x^3 \sin x^2 . dx$ (ب) $\int \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} . dx$

(جـ) $\int \frac{5x-7}{x^2-3x+2}.dx$

(3) أوجد المساحة المحدودة بمنحنيات الدوال: $e(x) = e^x,\ c(x) = e^{-x},\ d(x) = e^2$

♦ السؤال الثالث:

(1) إذا كانت: $\sum_{r=1}^{0} \log a\left(\frac{1}{2}\right)^r = 10$ أوجد قيمة a حيث $a \in h^+$

(2) إذا كان: $a = 1 - b$ ، $a, b \in h$ أثبت أن: $\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r = 1$

(3) إذا كانت $(z, *)$ زمرة وكان c عنصرًا محددًا في z. وعرفت المجموعة y_c بحيث $y_c = \{x : x \in z, c^* x = x * c\}$. أثبت أن $(y_c, *)$ زمرة جزئية من الزمرة $(z, *)$

(4) بفرض أن a, b, c قياسات زوايا مثلث أثبت أن:

$$\frac{\sin b \sin c}{\sin a - \sin b \cos c} = \tan b$$

♦ السؤال الرابع:

(1) بين أن وتر الدائرة $m\ :\ x^2 + y^2 - 4x = 0$ والناتج عن قطع المستقيم: $l : x + y - 4 = 0$ لهذه الدائرة تقابله زاوية مركزية قائمة.

(2) إذا كانت $\bar{c}$ هي صورة $c(-3, 0)$ تحت تأثير انعكاس في المستقيم $= x - \bar{z} : y3$ أوجد إحداثي $\bar{c}$.

(3) إذا كان: $x = \frac{2-4t}{1-t}, y = \frac{8+6t}{3+t}$ حيث $t = \sqrt{-1}$ أثبت أن: $x^2 + y^2 = 16$

♦ السؤال الخامس:

(1) اكتب مراحل حل المسألة في الرياضيات مبينًا باختصار دور المعلم في كل مرحلة.

(2) وضح المقصود بالتقويم التكويني (البنائي) مبينًا أهميته في العملية التعليمية.

(3) وضح المقصود بالطريقة القياسية في تدريس الرياضيات مع مثال حول استخدام هذه الطريقة.

النموذج الثالث

أجب عن جميع الأسئلة التالية:

♦ السؤال الأول:

(1) إذا كانت $s = \{a, b, c, d, e\}$ ، $x = \{a, b, c\}$ ، $y = \{b, d, e\}$ ، $z = \{a, c, e\}$

(أ) أوجد: $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ حيث أن $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ هي متممة كل من x, y, z على الترتيب.

(ب) أوجد: $(x \cup \bar{z}) \cap (\bar{y} \cup z)$

(جـ) تحقق من صحة ما يأتي: $(x \cup y \cup z)' = \bar{x} \cap \bar{y} \cap \bar{z}$

(2) إذا كانت: $x = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(أ) أوجد عدد عناصر المجموعة: $y = \{(a, b): a \neq b, a, b \in x\}$

(ب) أوجد عدد الأعداد الممكن تكوينها من عناصر المجموعة x بحيث:

(i) أن يكون العدد مكونًا من 3 أرقام.

(ii) أن يكون العدد مكونًا من 3 أرقام مختلفة بحيث يكون رقم الآحاد عددًا أوليًا.

♦ السؤال الثاني:

(1) (أ) إذا كانت $(a, ar, ar^2, ...)$ تكون متتالية هندسية حدودها موجبة فأثبت أن: $(\log a, \log ar, \log ar^2, ...)$ تكون متتالية عددية.

(ب) أثبت أن: $(1+t)^{8n} = (2)^{4n}$ حيث $t = \sqrt{-1}$ ، n عدد صحيح موجب.

(جـ) حل المعادلة: $x^4 = 1$ في حقل الأعداد الحقيقية.

(2) (أ) إذا كان: $\sum_{r=0}^{5x} 3 = 30$ فأوجد قيمة x

(ب) برهن أن الشكل الذي رءوسه $a(2, -1), b(-1, 1), c(2, 3), d(5, 1)$ هو معين ثم أوجد مساحته.

(جـ) $abcd$ مربع أوجد إحداثي الرأس c علمًا بأن: $a(0, 0), b(5, 3)$ حيث c تقع في الربع الأول.

(3) الشكل المقابل فيه:

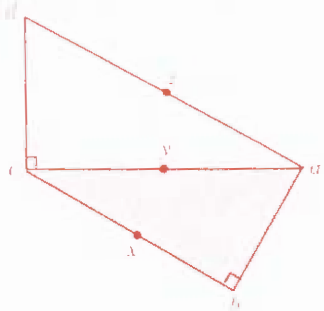
$ab = dc = 8$ cm ، $(\angle abc)$ قائمة ،

$\overline{cd} \perp$ المستوى abc فإذا كانت x, y, z

منصفات $\overline{ad}$, $\overline{ac}$, $\overline{bc}$ على الترتيب فأثبت أن:

$\overline{zx} \perp \overline{bc}$ ثم أوجد قياس الزاوية الزوجية

بين المستويين zbc ، abc



◆ السؤال الثالث:

(1) (أ) أثبت بدون استخدام الآلة الحاسبة أن:

$$\sin 600° \cos 330° - \cos(-120°) \sin 210° = -1$$

(ب) إذا كان: $\sin c + \cos c = \frac{7}{5}$ فاحسب قيمة:

(i) $\sin 2c$ (ii) $\cos 2c$

(جـ) أثبت صحة المتطابقة: $\tan e = \frac{\sin 2e + \sin e}{\cos 2e + \cos e + 1}$

(2) (أ) إذا كان: $d(x) = \begin{cases} x^2 + bx + 3 & \text{عندما } x < 1 \\ 4 & \text{عندما } x = 1 \\ ax + b & \text{عندما } x > 1 \end{cases}$

فأوجد قيمة كل من a, b علماً بأن $d(x)$ متصلة عند $x = 1$

(ب) أوجد مجموعة الحل: $2[x - 2] = [5, 5]$

(جـ) إذا كان: $l(a \cup b) = \frac{7}{12}$ ، $l(\bar{b}) = \frac{2}{3}$ ، $l(\bar{a}) = \frac{1}{2}$ فأوجد:

(1) $l(a \cap b)$ (2) $l(a / b)$ (3) $l(b / \bar{a})$

◆ السؤال الرابع:

(1) (أ) أوجد: $\int_0^1 (x^2 - 4x + 5)^5 (x - 2) dx$

(ب) إذا كان: $\int_b^a d(x).dx = \int_a^b d(x).dx$ فأثبت أن: $\int_a^b d(x).dx$ يساوي صفراً.

(جـ) إذا كانت: $\vartheta(x) = \int_0^x \frac{dx}{(j^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$ فأوجد $\bar{\vartheta}(0)$ ، $\vartheta(0)$

(2) ارسم المنطقة التي تعطى مساحتها بالتكامل $\int_{2}^{0}|x-3|dx$ وأوجد مساحتها باستخدام خصائص شكلها الهندسي، ثم تحقق من ذلك بحساب التكامل.

♦ السؤال الخامس:

(1) إذا فشل الهندسة النظرية في تحقيق أهدافها التربوية لدليل على وجود صعوبات تقف في طريق التلاميذ وخصوصًا المبتدئين منهم عند دراسة هذه المادة.
حدد بطريقة مختصرة الأسباب التي أدت إلى هذا الفشل.

(2) شهدت مناهج الرياضيات في معظم دول العالم تطورًا جذريًا وظهرت رياضيات عصرية (حديثة) اذكر أهم العوامل التي دعت دول العالم لتطوير مناهج الرياضيات.

النموذج الرابع

اجب عن جميع الأسئلة التالية:

♦ السؤال الأول:

(1) إذا كان ω أحد الجذرين التخيليين التكعيبيين للواحد الصحيح فكون معادلة الدرجة الثانية التي جذراها (ω^5-1), $(\omega^7-1)^2$

(2) أوجد الحد الخالي من x في مفكوك $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{15}$

(3) إذا كانت: $\vartheta(x) = x^4 - 4ax^2 + 2bx - 16$ فأوجد قيمتي a, b اللتين تجعلان العدد 2 جذرًا مكررًا مرتين لكثيرة الحدود $\vartheta(x)$.

♦ السؤال الثاني:

(1) إذا كان $(x-1)$ أحد عوامل المحدد $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+1 \\ -1 & 1 & x+k \end{vmatrix}$ فأوجد قيمة k

(2) abc مثلث فيه $\tan\frac{a}{2}=\frac{5}{6}$ ، $\tan\frac{b}{2}=\frac{2}{5}$. أثبت أن محيط المثلث يساوى $3\bar{c}$

(3) إذا كانت: $x = \{x : x \in y, -3 \le x < 5\}$ ، $z = \{\{a,\ b,\ c\}:\ a,\ b, c \in x\}$
فكم عدد عناصر z؟

♦ **السؤال الثالث:**

(1) إذا كانت: $j = x^2 + 3$ ، $y = x^3 + 2$ فعين $\frac{d^2j}{dy^2}$ عندما $x = 2$

(2) يصب زيت بمعدل $50\ cm^3/s$ في قمع على هيئة مخروط دائري قائم ارتفاعه 18 cm وطول نصف قطر قاعدته 5 cm ، ومثبت بحيث يكون محوره رأسيًا ورأسه لأسفل. فإذا كان الزيت يتسرب من ثقب القمع بمعدل $30\ cm^3/s$ فأوجد معدل زيادة ارتفاع الزيت في القمع عندما يصل هذا الارتفاع 6 cm.

♦ **السؤال الرابع:**

(1) (أ) أوجد: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2+4x-12}$ (ب) أوجد: $\int 4x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)^3 dx$

(جـ) إذا كان: $y = \int \sin x \cos x\ dx$ فأوجد: $\frac{d^2y}{dx^2}$

(2) (أ) أوجد القيم العظمى الصغرى المحلية للدالة: $d(x) = x^4 - 18x^2$

(ب) وعاء على شكل مخروط دائري قائم رأسه إلى أسفل وطول قطر قاعدته 16 cm وارتفاعه 6 cm به ماء يتسرب منه بمعدل $8\ cm^3/m$، فما هي سرعة هبوط سطح الماء عندما يكون عمق الماء فيه 3 cm.

(جـ) بدأ جسم حركته من نقطة ثابتة f وكانت سرعة z cm/s بعد n ثانية تتعين بالعلاقة: $z = 6n^2 - 18n + 12$ ، أوجد أقل سرعة يتحرك بها وبين أن السرعة تنعدم مرتين، ثم أوجد المسافة التي يقطعها خلال الفترة التي تقع بين زمني انعدام السرعة.

♦ **السؤال الخامس:**

(1) اذكر باختصار أهداف تدريس الرياضيات.

(2) abc مثلث نصفت زاوية bac بالمنصف $\overline{ax}$ الذي يلاقي القاعدة في x. ثم رسم $\overline{xy}$ يوازي $\overline{ba}$. أثبت أن: $\overline{ay} = \overline{xy}$

ناقش هذا التمرين بالطريقة التحليلية.

النموذج الخامس

أجب عن جميع الأسئلة التالية:

♦ السؤال الأول:

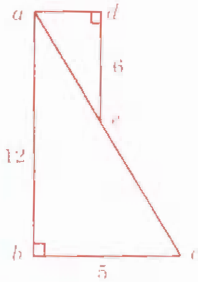
(1) إذا كانت $x = \{a, b, c, d\}$ فأوجد ما يلي:

(أ) علاقة z_1 على x على صورة أزواج مرتبة بحيث تكون علاقة تكافؤ وليست تخالفية.

(ب) علاقة z_2 على x على صورة أزواج مرتبة بحيث تكون علاقة ترتيب جزئي.

♦ السؤال الثاني:

(1) في الشكل المقابل:



$(\angle d) = (\angle b) = 90°, \;\; ab = 12, eb = 5, de = 6,$

المطلوب: $(\angle e) = (\angle eab)$

(أ) إثبات أن $\Delta\, dea$ يشابه $\Delta\, abc$

(ب) إيجاد كل $\overline{ac}$ ، $\overline{ad}$

(2) بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن:

$$\sin 20° \cos 70° + \cos 20° \sin 70° = 1$$

(3) ارسم منحنى الدالة ϑ حيث $\vartheta(x) = \dfrac{3}{x^2+5}$ موضحًا أثناء الحل والرسم ما يلي:

(أ) النقاط الحرجة للدالة (إن وجدت).

(ب) التزايد والتناقص للدالة.

(جـ) القيم القصوى (إن وجدت).

(د) محاور المحاذاة (الاقتراب).

♦ السؤال الثالث:

(1) اوجد التكاملات الآتية:

(أ) $\int (\tan^4 x + \tan^6 x).dx$

(ب) $\int (4x+6)\sqrt{2x+3}.dx$

(2) أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ لما يلي:

(أ) $xy + \dfrac{x}{y^2} = 5, \; y \neq 0$

(ب) $y = \sin^{-1}\left(\dfrac{2}{x}\right), \; x \neq 0$

(3) إذا كانت: $t : [1, 3] \to h$ حيث $t(x) = x^3 + ex + 5$ ، $d : [b, c] \to h$ حيث

$d(x) = 3x^2 + 2$

أوجد قيمة (أ) كل من: b, c, e إذا كانت الدالة t مقابلة (أصلية) للدالة d.

(ب) $\int_b^c d(x).dx$

(4) إذا كان رقم التليفون مكونًا من ستة أرقام. فكم رقم تليفونى يمكن تكوينه إذا استخدمت.

♦ السؤال الرابع:

(1) لتكن درجات مجموعة من الطلاب كالآتى: $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$

والوسط الحسابي لدرجاتهم $(\bar{x})$. أثبت أن: $\sum_{r=1}^{n}(x_j - \bar{x}) = 0$

(2) لتكن * عملية ثنائية إبدالية معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة كالآتي:

$$a * b = a + b - 5$$

(أ) أوجد العنصر المحايد لهذه العملية. (ب) أوجد نظير العدد 8.

(3) إذا كانت: $x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ أوجد x^n حيث $n \in y^*$

(4) اكتب الكسر: $\frac{x^2}{x^6 + 27}$ على صورة كسور جزئية.

♦ السؤال الخامس:

عرض المصطلحات والمفاهيم الآتية بما لا يزيد عن ثلاثة أسطر لكل مصطلح أو مفهوم ومن ثم أعط مثالاً على كل حالة.

(أ) المفهوم الرياضي. (ب) طريقة الاكتشاف الاستقرائية في الرياضيات.

(جـ) التعلم بهدف الانتقال في تعلم الرياضيات. (د) صدق الاختبار.

النموذج السادس

اجب عن جميع الأسئلة التالية:

♦ السؤال الأول: أوجد مجموعة الحل في كل مما يلي:

(1) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} < 1$

(2) $[5 - 2x] = 4$

(3) $k - |x^2 - 3| = 4$

(4) $\frac{x^2 - x - 6}{x + 1} < 0$

♦ السؤال الثاني:

(1) أوجد النهاية (إن أمكن) لما يلي:

(أ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 x}{x\sin 2x}$ (ب) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{(5-|x|)\times 2x}{25-x^2}$

(2) عين مجال كل مما يلي:

(أ) $\vartheta(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{|x|-3} \div \dfrac{x}{x-1}$ (ب) $\vartheta(x) = k-(1-x)+e^{-x}$

♦ السؤال الثالث:

(1) abc مثلث فيه: $c(4, 6)$، $b(4, 2)$، $a(1, 2)$، d نقطة في منتصف $\overline{ac}$ والمطلوب:

(أ) إيجاد إحداثيى نقطة d. (ب) إثبات أن: $\overline{bd} = \dfrac{1}{2}\overline{ac}$

(2) احسب الزكاة المفروضة على مال قدره 16000 درهم حال عليه الحول كاملاً.

♦ السؤال الرابع:

(1) أوجد ناتج ما يلي في أبسط صورة: $\dfrac{x^2-1}{yx^2-xy+y} \div \dfrac{x^2+2x+1}{x^3+1}$

(2) عددان صحيحان موجبان متتاليان وإذا كان مثلي الأول يزيد على نصف الثاني بمقدار 7، فأوجد العددين.

♦ السؤال الخامس:

(1) abc مثل d, e في منتصف $\overline{ac}$، $\overline{ab}$ على الترتيب وكان قياس $(\angle ade) = 90°$
$\overline{ab} = 6$ cm، $\overline{bc} = 8$ cm. فأوجد:

(أ) قياس $(\angle abc)$ (ب) طول $\overline{de}$ (جـ) مساحة المنطقة المثلثة abe

(2) أوجد المساحة الكلية لمكعب حجمه $17.576\ \text{cm}^3$ مقربًا الناتج لأقرب عدد صحيح.

♦ السؤال السادس:

(1) اكتب ثلاثة أسئلة (من نوع الاختيار من متعدد) تقيس مستويات مختلفة في المجال المعرفي عن درس المربع وخواصه.

النموذج السابع

أجب عن جميع الأسئلة التالية:

♦ السؤال الأول:

(1) إذا كانت: $(x,*)$ زمرة: $\forall a, b \in x \ (a * b)^{-1} = a^{-1} * b^{-1}$

فأثبت أن: $(x,*)$ زمرة تبدلية.

(2) لتكن $(*)$ معرفة على $h \times h$ بحيث $(a, b) * (c, d) = (ac, bc + d)$

(أ) أوجد محايد العملية *

(ب) أوجد مجموعة حل المعادلة: $(2, 3) * (x, y) = (4, -2)$

(3) استخدم الاستقراء الرياضي في إثبات أن: $7(16)^n + 3$ من مضاعفات العدد 5

$\forall n \in y_+$ (مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة).

♦ السؤال الثاني:

(1) بدون استخدام قاعدة لوبيتال أوجد:

(أ) $\lim\limits_{X\to 2} \dfrac{x^3 - 8}{\sqrt{4x+1} - 3}$ (ب) $\lim\limits_{X\to 2} (1-x)\tan\dfrac{\pi}{2}x$

(2) أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ لكل مما يلي:

(أ) $\dfrac{1}{x^2+1} \quad y = \sin\sqrt{x^2+1} + \cos ex^3$

(ب) $y = t(x) = \int_{\sqrt{x}}^{\sin x} \left(1 - z^2\right) dz$

(3) مر مستقيم بالنقطة $(2, 1)$ في المستوى الديكارتي فقطع محور السينات الموجب بالنقطة a محور الصادات الموجب النقطة b. أوجد إحداثيات النقطتين a, b بحيث تكون مساحة المنطقة المثلثية mab أصغر ما يمكن. (m هي نقطة الأصل).

♦ السؤال الثالث:

(1) أوجد كلا من التكاملات التالية:

(أ) $\dfrac{e^{3x}}{e^{3x} + e^x} dx$ (ب) $\int \dfrac{1}{1 + \sqrt[4]{x}} dx$

(2) إذا كان: $\sqrt[3]{x} = \sqrt[5]{y} = \sqrt[7]{z}$ فأثبت أن: x, y, z في توال هندسي، ثم بين أن:

$$\frac{x^2 + y^2}{y^2 + z^2} = \frac{x}{z}$$

(3) إذا كان: $|x| < 1$ فأوجد: $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$ بدلالة x ثم استخدمه في إيجاد $2 + 6x + 12x^2 + \ldots + n(n-1)x^{n-2} + \ldots$

(4) أوجد معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{m}$ الناتج من انعكاس المستقيم $\overleftrightarrow{l}$ على المستقيم $x = 2$ حيث معادلة $\overleftrightarrow{l}$ هي: $2x + 3y = -5$

♦ **السؤال الرابع:**

(1) بين أن: $(1 + t)^8 + 4(1 - t)^4 = 0$ حيث $t = \sqrt{-1}$

(2) أثبت أن: $\sec 2c + \tan 2c = \dfrac{\sin c + \cos c}{\cos c - \sin c}$

(3) فى مثلث abc إذا كان: $\vartheta(\angle b) = 105^\circ$ ، $\vartheta(\angle a) = 45^\circ$ فأثبت أن:

$$\bar{a} : \bar{b} : \bar{c} = 2 : \sqrt{3} + 1 : \sqrt{2}$$

(4) $\overline{ab}$ قطر في دائرة طول نصف قطرها r. امتداد الوتر $\overline{ad}$ يلاقي المماس المرسوم للدائرة عند b في نقطة c، $e \in \overline{ad}$ بحيث $\overline{ae} = \overline{cd}$. إذا كان بعد النقطة e عن $\overline{ab} = y$ ، وبعد e عن المماس للدائرة عند a يساوي x فأثبت أن: $y^2 = \dfrac{x^3}{2r - x}$

♦ **السؤال الخامس:**

(1) اكتب ثلاثة من أغراض التقويم. وبين الهدف في كل منها.

(2) وضح المقصود بالمفاهيم التالية مبينًا أثرها في عملية التدريس: التغذية الراجعة، انتقال أثر التعلم، التعزيز، التدريب المجدول.

(3) اكتب الخطوات الرئيسية لحل المسألة الرياضية. ثم ضع مسألة رياضية وطبق عليها هذه الخطوات.

النموذج الثامن

أجب عن جميع الأسئلة التالية:

♦ السؤال الأول:

(1) (أ) أوجد مجموعة قيم k التي تجعل $t(x) = \frac{x}{2x^2 + kx + 2}$ متصلة على h

(ب) أوجد قيم الثابتين a, b إذا كانت: $\lim_{x \to 2}\left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax + b\right) = 5$

(2) إذا كانت معادلة المستقيم l هي: $-x + 2y + 3 = 0$

(أ) أوجد معادلة $\overline{l}$ (صورة $\overline{l}$ بالانعكاس في المستقيم $y = x$)

(ب) أوجد نقطة تقاطع $\overline{l}$ مع $\overline{l}$

(3) (أ) عين مجال الدالة: $d(x) = \sqrt{|x| - \frac{3}{|x-2|}}$

(ب) أوجد مجموعة حل المعادلة: $\left[x - \frac{1}{2}\right] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = 3$

♦ السؤال الثاني:

(1) (أ) إذا كان: $k\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}(ka + kb)$ فأثبت أن: $a^2 - 6ab + b^2$

(ب) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المستوية المحددة بالمنحنيات $y = x^2 , y = 1, y = 2$ حول محور الصادات.

(2) أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين $(3, -4)$، $(1, -2)$ وتمس محور السينات.

(3) (أ) إذا كان: $h \ni x \quad ,1 \quad + \quad x \quad = \quad \theta(x)$، e تطبيق حقيقي حيث $(e o \theta)(x) = x^2 + 4x + 6$ فأوجد $(e o \theta)(-1)$

(ب) إذا كان: $\sum_{r=0}^{0}\binom{0}{r} t^r = a + bt$ فأوجد قيمة كل من a, b

---

♦ السؤال الثالث:

(1) إذا كان: $2y = \sin 2x.\tan x$ فأثبت أن: $\frac{d^2y}{dx^2} \tan x \tan 2x - 4y = 0$

(2) (أ) إذا كان $(a - b)b > a(b - a)$، $a > 0 > b$ فأثبت أن: $a + b > 0$

(ب) أوجد: $\int \sin x \sin 6x.dx$

(3) إذا كان: $g(x) = \begin{cases} 1-x, x \le 0 \\ x^2, x > 0 \end{cases}$ ، $e(x) = \begin{cases} -x, x < 1 \\ 1+x, x \ge 1 \end{cases}$

أوجد $(\vartheta oe)(x)$ ثم أوجد نقط انفصال الدالة ϑoe.

♦ **السؤال الرابع:**

(1) أوجد معادلة المنحنى $y = d(x)$ إذا كان معدل تغير ميل المماس له بالنسبة إلى x عند أي نقطة عليه (x, y) يساوي $(6x - 8)$ وللمنحنى قيمة عظمى محلية عند النقطة $(1, 1)$.

(2) (أ) أوجد: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\cos \frac{\pi}{2} x}{1 - \sqrt{x}}$

(ب) إذا كان العدد المركب $\bar{z} = \dfrac{z^2 + 5z + 6}{z + 2}$ حيث $t = \sqrt{-1}$ ، $\bar{z} = \bar{x} + t\bar{y}$ ، $z = x + yt$ ، $x, y, \bar{x}, \bar{y}$ أعداد حقيقية. (أولاً) عبر عن $\bar{x}, \bar{y}$ بدلالة x, y

(ثانيًا) أوجد مجموعة النقطة (x, y) ليكون $\|\bar{z}\| < 4$

(3) أثبت أن مجموعة n حدًا الأولى من المتتالية: $(0.7, 0.77, 0.777, \ldots)$ يساوي $\frac{7}{81}(9n - 1 + (0.1)^n)$

♦ **السؤال الخامس:**

(1) « القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين من مثلث توازي الضلع الثالث وطولها يساوي نصف طوله » هي إحدى النظريات في هندسة المثلث.
وضح كيف توجه طلابك للتوصل (الإثبات) صحة هذه النظرية بأسلوب استقرائي.

(2) الاختبارات الدورية التشخيصية تساعد في إزالة عقبات التعلم، وتم في نطاق العمل المدرسة، اذكر ثلاثة من أهداف هذه الاختبارات.

(3) من التعميمات في مادة الرياضيات: المسلمات ـ التعاريف ـ النظريات. اكتب ما تعنيه كل منها، واذكر مثلاً لكل منها مما درسته في المرحلة الإعدادية أو الثانوية.

(4) عند تصميم الاختبارات من نوع الاختيار من متعدد هناك مبادئ يلزم مراعاتها، اذكر ثلاثة منها، اكتب ثلاثة أسئلة من هذا النوع على موضع العلاقة والتطبيق.

حل أسئلة نماذج اختبارات المرشحين لوظائف التدريس في دولة الإمارات العربية المتحدة عام 1991م، 95/1996م

للأستاذ / سمير محمد عثمان الحفناوي م.أ. ثانوي .. إدارة شرق المنصورة

كما هو متبع في خطة هذا الكتاب والمعروفة بطريقة الجشطالت، وهي جمع المعلومات المتشابهة في قالب واحد بحيث يسهل الترابط الرياضي بين الأفكار، وبعضها البعض فإننا سوف نقوم بالحل على النحو التالي:

1) حل مسائل التكاملات في النماذج الثمانية.
2) حل مسائل الهندسة التحويلية والتحليلية.
3) حل مسائل حساب المثلثات.
4) حل مسائل النهايات.
5) حل مسائل المشتقات وبعض تطبيقاتها.
6) حل مسائل العمليات الثنائية (الجبر المجرد). ... وهكذا ...

اولا: حل مسائل التكاملات في النماذج الثمانية وهي:

(1) $\int \frac{6x}{3x-2}.dx$ (2) $\int \frac{1}{1+e^{2x}}.dx$

(3) $\int x^3 \sin x^2.dx$ (4) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.dx$

(5) $\int \frac{5x-7}{x^2+3x+2}.dx$ (6) $\int \left(x^2 - 4x + 5\right)^5 (x-2).dx$

(7) إذا كان: $\int_a^b d(x).dx = \int_b^a d(x).dx$ فأثبت أن: $\int_a^b d(x).dx = 5$

(8) إذا كانت: $\vartheta(x) = \int_0^x \frac{1}{\left(j^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}.dj$ فأوجد: $\vartheta(0)$ ، $\bar{\vartheta}(0)$

(9) $\int 4x^3 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3.dx$

(10) إذا كانت: $y = \int \sin x \cos x.dx$ فأوجد: $\frac{d^2y}{dx^2}$

(11) $\int \left(\tan^4 x + \tan^6 x\right).dx$ (12) $\int (4x+6)\sqrt{2x+3}.dx$

(13) $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+e^{x}}.dx$ (14) $\int \frac{1}{1+\sqrt[4]{x}}.dx$

(15) إذا كانت: $y = t(x) = \int_{\sqrt{x}}^{\sin x} \left(1-z^2\right).dz$ فأوجد: $\frac{dy}{dx}$

(16) أوجد: $\int \sin x \sin 6x.dx$

---

(1) $\int \frac{6x}{3x-2}.dx$

$$= 2\int \frac{3x}{3x-2}.dx = 3\int \frac{(3x-2+2)}{3x-2}.dx = 2\int \left(\frac{(3x-2)}{3x-2}+\frac{2}{3x-2}\right).dx$$

$$= 2\int \left(1+\frac{2}{3x-2}\right).dx = 2\left(x+\frac{2}{3}\log|3x-2|\right)+s = 2x+\frac{4}{3}\log|3x-2| + s$$ ثابت

حل ثان:

يمكن إثبات طريقة القسمة المطولة حيث درجة البسط تساوي درجة المقام .. هكذا.

$$\begin{array}{r|l} & \ \ 2 \\ \hline 3x-2 & \ \ 6x \\ & \ \ 6x-4 \\ \hline & \ \ \ \ \ 4 \end{array}$$

أي أن خارج القسمة يساوي $2 + \frac{4}{3x-2}$

$$= 2+\frac{4}{3}\left(\frac{3}{3x-2}\right)$$

$$\therefore \int \frac{6x}{3x-2}.dx = \left(2+\frac{4}{3}\left(\frac{3}{3x-2}\right)\right) = 2x+\frac{4}{3}\log|3x-2| + s$$

---

(2) $\int \frac{1}{1+e^{2x}}.dx$ بوضع $e^{2x} = y$

$\therefore dx = \frac{dy}{2y}$ $\therefore 2y.dx = dy$ $\therefore 2e^{2x}.dx = dy$

$$\therefore \int \frac{1}{1+e^{2x}}.dx = \int \frac{1}{1+y}.\frac{dy}{2y} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{y(y+1)}.dy$$

وباستخدام الكسور الجزئية.

$\therefore a(y+1)+by = 1$ $\therefore \frac{a}{y}+\frac{b}{y+1} = \frac{1}{y(y+1)}$

بوضع $y=-1 \Rightarrow -b=1 \therefore b=-1$ ، بوضع $y=0 \Rightarrow a=1$

$$\therefore \frac{a}{y}+\frac{b}{y+1}=\frac{1}{y}-\frac{1}{y+1}$$

$$\therefore \frac{1}{2}\int\frac{1}{y(y+1)}.dy=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y+1}\right).dy=\frac{1}{2}[\log|y|-\log|y+1|]+s$$

$$=\frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{y}{y+1}\right|\right]+s$$

$$=\log\sqrt{\frac{y}{y+1}}+s=\log\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}+s$$

---

(3) $\int x^3\sin x^2.dx$ بوضع $x^2=y$

$$\therefore 2xdx=dy \qquad \therefore dx=\frac{dy}{2x}$$

$$\therefore \int x^3\sin x^2.dx=\int x^3\sin y.\frac{dy}{2x}=\frac{1}{2}\int x^2\sin y.dy=\frac{1}{2}\int y\sin y.dy$$

باستخدام التكامل بالتجزئ:

$$=\frac{1}{2}\left[y(-\cos y)+\int\cos y.1.dy\right]=-\frac{1}{2}y\cos y+\frac{1}{2}\sin y+s$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sin x^2-x^2\cos x^2\right]+s$$

---

(4) $$\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}.dx=\log\left(e^x+e^{-x}\right)+s$$

---

(5) $\int\frac{5x-7}{x^2+3x+2}.dx$

$$=\int\frac{5x-7}{(x-1)(x-2)}.dx \qquad \therefore \frac{5x-7}{(x-1)(x-2)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}$$

$$\therefore a(x-2)+b(x-1)=5x-7$$

عندما: $x=2 \Rightarrow b=3$

عندما: $x=1 \Rightarrow -a=-2 \quad \therefore a=2$

$$\therefore \frac{5x-7}{(x-1)(x-2)}=\frac{5x-7}{x-1}+\frac{5x-7}{x-2}$$

$$\therefore \int\frac{5x-7}{(x-1)(x-2)}.dx=2\int\frac{1}{x-1}.dx+3\int\frac{1}{x-2}.dx$$

$$=2\log|x-1|+3|x-2|+s$$

(6) $\int_0^1 \left(x^2-4x+5\right)^5 (x-2).dx$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2-4x+5\right)^5 (2x-4).dx = \frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\left[\left(x^2-4x+5\right)^6\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{12}\left[\left(x^2-4x+5\right)^6\right]_0^1 = \frac{1}{12}\begin{bmatrix}6 & 6\\ 2 & -5\end{bmatrix}$$

---

(7) $\because \int_b^a d(x).dx = -\int_a^b d(x).dx$ .... (1)

$\therefore \int_b^a d(x).dx = \int_b^a d(x).dx$ معطى .... (2)

بجمع (1)، (2)

$\therefore 2\int_a^b d(x).dx$ $\qquad$ $\therefore \int_a^b d(x).dx$ وهو المطلوب

---

(8) خذ تعويض مناسب وأكمل الحل.

---

(9) $\int 4x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)^3 .dx$

$$= 4\int\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right).dx = 4\int (x+1)^3 .dx = (x+1)^4 + s$$

---

(10) $\because \quad y = \int \sin x \cos x.dx$

$y = \int \sin x \ d(\sin x)$, $\qquad y = \frac{1}{2}\sin^2 x + s$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\times 2\sin x\cos x = \sin x\cos x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sin x\,(-\sin x) + \cos x\cos x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

---

(11) $\int\left(\tan^4 x + \tan^6 x\right).dx$

$$= \int \tan^4 x\left(1+\tan^2 x\right).dx = \int \tan^4 x.\sec^2 x.dx = \frac{1}{5}\tan^5 x + s$$

---

(12) $\int (4x+6)\sqrt{2x+3}.dx$

$$= 2\int (2x+3)\sqrt{2x+3}.dx = 2\int (2x+3)^{\frac{3}{2}}.dx$$

$$= 2\times\frac{1}{2}\int (2x+3)^{\frac{3}{2}}.dx = \frac{2}{5}(2x+3)^{\frac{5}{2}} + s$$

---

(13) $$\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+e^{x}}.dx = \int \frac{e^{2}.e^{2x}}{e^{x}\left(e^{2x}+1\right)}.dx$$

$$= \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}.dx = \frac{1}{2}\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}.dx = \frac{1}{2}\log\left(e^{2x}+1\right)+s$$

---

(14) $\int \frac{1}{1+\sqrt[4]{x}}.dx$ بوضع: $x = y^4$ $\quad \therefore \sqrt[4]{x} = y$

$$dx = 4y^3 \qquad \therefore \int \frac{dx}{1+\sqrt[4]{x}} = \int \frac{4y^3}{1+y}.dy = 4\int\left(\frac{y^3+1-1}{y+1}\right).dy$$

---

(15) $$\because\ y = t(x) = \int_{\sqrt{x}}^{\sin x} \left(1-z^2\right).dz$$

$$\therefore\ y = t(x) = \left[z - \frac{1}{3}z^3\right]_{\sqrt{x}}^{\sin x} = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x - \sqrt{x} + \frac{1}{3}\left(\sqrt{x}\right)^3$$

$$\therefore\ t(x) = y = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x - \sqrt{x} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \cos x - \sin^2 x\cos x - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

---

(16) $\int \sin x \sin 6x.dx$

$$\because\ \sin a\sin b = \cos\frac{(a-b)}{2} - \cos\frac{(a+b)}{2} = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

$$\therefore\ \sin x\sin 6x = \frac{1}{2}\left[\cos 5x - \cos 7x\right]$$

$$\sin x\sin 6x\ .\ dx = \frac{1}{2}\left[\int(\cos 5x - \cos 7x)\right].dx\left[\frac{\sin 5x}{5} - \frac{\sin 7x}{7}\right] + s$$

ثانيا: حل مسائل الهندسة التحليلية والتحويلية وهي:

(1) أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطة $(3 \ ,4)$ ومقطعة مع محور y ضعف مقطعه مع محور x.

(2) بين أن وتر الدائرة: $m: x^2 + y^2 - 4x = 0$ والناتج عن قطع المستقيم $\bar{l} \ : \ x + y - 4 = 0$ لهذه الدائرة تقابله زاوية مركزية قائمة.

(3) برهن أن الشكل الذى رءوسه $a(2, -1), b(-1, 1), c(2, 3), d(5, 1)$ هو معين، ثم أوجد مساحته.

(4) $abcd$ مربع أوجد إحداثي الرأس c علمًا بأن: $a(0, 0), b(5, 3)$ حيث c تقع في الربع الأول.

(5) $\Delta \ abc$ فيه $a(1, 2), b(4, 2), c(4, 6)$، d منتصف $\overline{ac}$ والمطلوب.

(أ) إيجاد إحداثيات نقطة d. (ب) أثبت أن: $\overline{bd} = \frac{1}{2} \ \overline{ac}$.

(6) أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين $(3, -4)$ ،$(-2 ,1)a$ وتمس محور السينات.

(7) إذا كانت $\bar{c}$ هي صورة $(-3, \ \ 0)c$ تحت تأثير انعكاس في المستقيم $\bar{z} \ : \ y = x - 3$ أوجد إحداثي $\bar{c}$.

(8) أوجد معادلة المستقيم $\bar{m}$ الناتج من انعكاس المستقيم $\bar{l}$ في المستقيم $x = 2$ حيث معادلة $\bar{l}$ هي $2x + 3y = -5$

(9) إذا كانت معادلة المستقيم l هي: $-x + 2y + 3 = 0$

(أ) وجد معادلة $\bar{\bar{l}}$ (صورة l بالانعكاس في المستقيم $y = x$).

(ب) أوجد نقط تقاطع $\bar{l}$ مع $\bar{\bar{l}}$.

الحلول:

سوف نقوم إن شاء الله بحل المسائل التي تحمل الأرقام (1)، (2)، (7)، (9) أما الأخرى فهي مباشرة.

(1) $\because \ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \qquad \because \ b = 2a \qquad \therefore \ \frac{x}{a} + \frac{y}{2a} = 1$

$\therefore \ \frac{3}{a} + \frac{2}{a} = \frac{5}{a} = 1 \qquad \therefore \ a = 5, \qquad \therefore \ b = 10$

$\therefore \ \frac{x}{5} + \frac{y}{10} = 1 \qquad \therefore \ 10x + 5y = 50 \qquad \therefore \ 2x + y = 10$

(2) نوجد نقطتي تقاطع $\bar{l}$ مع الدائرة m ولتكن a, b فيكون $\overline{ab}$ هو وتر الدائرة الناتج عن تقاطعهما مع $\bar{l}$

$\because x + y - 4 = 0 \qquad \therefore x = 4 - y$

$\therefore (4 - y)^2 + y^2 - 4(4 - y) = 0$

$\therefore y^2 - 8y + 16 + y^2 - 16 + 4y = 0 \qquad \therefore 2y^2 - 4y = 0$

$\therefore y^2 - 2y = 0 \qquad \therefore y = 2$ أو $\therefore y = 0$

عندما $x = 4 \quad \Rightarrow \quad y = 0$

$\therefore a = (4, 0)$

عندما $x = 2 \quad \Rightarrow \quad y = 2 \qquad \therefore b = (2, 2)$

$\therefore (ab)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 4 + 4 = 8$

$\because$ إحداثي مركز الدائرة = ($-\frac{1}{2}$ معامل x، $-\frac{1}{2}$ معامل y)

$\therefore m = (2, 0) \qquad \therefore (ma)^2 = 4 = r^2 , \ (mb)^2 = 4 = r^2$

$\because (ma)^2 + (mb)^2 = (ab)^2$

$\therefore$ $\Delta\, abm$ قائم الزاوية في m.

---

(7) $\because y = x - 3$ على الصورة $y = mx + c$

$\therefore m = 1, \ c = -2$

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m^2 \\ 2m^2 & m^2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y-c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y+3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \therefore \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$\therefore \bar{c} = (3, -6)$

---

(9) $\because y = x \qquad \therefore m = \frac{dy}{dx} = 1$

$$\because z_m = \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}$$

وهذه هى معادلة انعكاس مستقيم يمر بنقطة الأصل على الصورة: $y = mx$

$$\because\ z_m = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = z_m \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \qquad \therefore\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ x = \bar{y},\ y = \bar{x}$$

$\because$ معادلة $\bar{l}$ هي: $-x + 2y + 3 = 0$

$$\therefore\ -\bar{y} + 2\bar{x} + 3 = 0$$

$\therefore$ معادلة $\bar{l}$ هي: $-\bar{y} + 2\bar{x} + 3 = 0$ أى: $-y + 2x + 3 = 0$

لاحظ أن نقطة التقاطع هى $(-3, -3)$

ملحوظة: حاول أن تحل رقم (8) بيانيًا وتحليليًا.

ثالثا: حل مسائل حساب المثلثات:

ونختار من النماذج المسائل التالية حيث أن الأخرى مباشرة:

(1) بفرض أن: a, b, c قياسات زوايا مثلث أثبت أن:

$$\frac{\sin b \sin c}{\sin a - \sin b \cos c} = \tan b$$

(2) أثبت صحة المتطابقة: $\dfrac{\sin 2e + \sin e}{\cos 2e + \cos e + 1}$

(3) $\Delta\, abc$ فيه: $\tan\dfrac{b}{2} = \dfrac{2}{5}$ ، $\tan\dfrac{a}{2} = \dfrac{5}{6}$ أثبت أن محيط المثلث يساوى $3c$.

(4) $\sin 2c + \tan 2c = \dfrac{\sin c + \cos c}{\cos c - \sin c}$

الحلول:

(1) $\because\ (a) + (b) + (c) = 180°$

$$\therefore\ (\angle a) = 180° - (\angle b + \angle c)$$

$$\therefore\ \sin a = \sin(b + c) = \sin b \cos c + \cos b \sin c$$

$$\therefore \frac{\sin b\sin c}{\sin a-\sin b\cos c}=\frac{\sin b\sin c}{\sin b\cos c+\cos b\sin c-\sin b\cos c}$$

$$=\frac{\sin b\sin c}{\sin b\cos c}=\frac{\sin b}{\cos b}=\tan b$$ وهو المطلوب

(2) $$\frac{\sin 2e+\sin e}{\cos 2e+\cos e+1}=\frac{2\sin e\cos e+\sin e}{2\cos^2 e-1+\cos e+1}$$

$$=\frac{\sin e(2\cos e+1)}{\cos e(2\cos e+1)}=\frac{\sin e}{\cos e}=\tan e$$

(3) $$\tan a=\frac{2\tan\frac{a}{2}}{1-\tan^2\frac{a}{2}}=\frac{2\times\frac{5}{6}}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^2}=\frac{\frac{10}{6}}{1-\frac{25}{36}}=\frac{60}{36-25}=\frac{60}{11}$$

$$\because \tan b=\frac{2\tan\frac{a}{2}}{1-\tan^2\frac{a}{2}}=\frac{2\times\frac{2}{5}}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{25}}=\frac{20}{25-4}=\frac{20}{21}$$

$$\therefore \tan c=-\tan(a+b)=-\left(\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}\right)$$

$$=-\left(\frac{\frac{60}{11}+\frac{20}{21}}{1-\frac{60}{11}\times\frac{20}{21}}\right)=-\left(\frac{60\times 11+11\times 20}{11\times 21-60\times 20}\right)=\left(\frac{660+220}{231-1200}\right)=\frac{880}{969}$$

ثم نوجد $\sin a$ من $\tan a, \sin b, \cos c$ ونستخدم العلاقة: $\frac{\bar{a}}{\sin a}=\frac{\bar{b}}{\sin b}=\frac{\bar{c}}{\sin c}$

$$\therefore \frac{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}}{\sin a\sin b+\sin c}=\frac{\bar{c}}{\sin c}=\frac{\bar{a}}{\sin a}=\frac{\bar{b}}{\sin b}=\frac{\bar{c}}{\sin c}$$ خاصية

(4) $$\sin 2x+\tan c=\frac{1}{\cos 2c}+\frac{\sin 2x}{\cos 2c}$$

$$=\frac{1+\sin 2c}{\cos 2c}=\frac{\sin^2 c+\cos^2 c+\sin 2c}{\cos^2 c-\sin^2 c}$$

$$=\frac{\sin^2 c+2\sin c\cos c+\cos^2 c}{(\cos c-\sin c)(\cos c+\sin c)}$$

$$=\frac{(\sin c+\cos c)^2}{(\cos c-\sin c)(\cos c+\sin c)}=\frac{\sin c+\cos c}{\cos c-\sin c}$$ وهو المطلوب

رابعا: حل مسائل النهايات. ونختار منها:

(1) أوجد النهايات الآتية (إن وجدت):

(أ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin\pi x}{x-1}$ (ب) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x\sin 2x}$

(جـ) $\lim\limits_{x\to 2}(1-x)\tan\dfrac{\pi}{2}x$ (د) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-\sqrt{x}}$

(2) أوجد قيم الثابتين a, b إذا كانت: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-1x+b\right)=5$

الحلول:

(1) (أ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin\pi x}{x-1}$ بوضع $x=e+1$ $\Rightarrow$ $x-1=e$

$$\therefore \lim_{e\to 2}\frac{\sin\pi(e-1)}{e}=-\lim_{e\to 0}\frac{\sin\pi e}{e}=-\pi$$

(ب) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x\sin 2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{2x\sin\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x\cos x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$$

(جـ) $\lim\limits_{x\to 2}(1-x)\tan\dfrac{\pi}{2}x$ بوضع $x=1-e$ $\Rightarrow$ $1-x=0$

$$=\lim_{e\to 0}\frac{e\sin\frac{\pi}{2}(1-e)}{\cos\frac{\pi}{2}(1-e)}=\lim_{e\to 0}\frac{e\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}e\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}e\right)}$$

$$=\lim_{e\to 0}\frac{e\cos\frac{\pi}{2}e}{\sin\frac{\pi}{2}e}=\lim_{e\to 0}\frac{e}{\sin\frac{\pi}{2}e}\times\lim_{e\to 0}\cos\frac{\pi}{2}e=-\frac{\pi}{2}\times 1=-\frac{2}{\pi}e$$

(د) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-\sqrt{x}}$ بتطبيق قاعدة لوبيتال

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{-\sin\frac{\pi}{2}x\times\frac{\pi}{2}}{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{2}}=\pi$$

(2) $\because \lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-1x+b\right)=5$

$$\therefore \lim_{x\to \infty}\left(\frac{\left(x^2+1\right)+(x+1)(b-ax)}{(x+1)}\right)=5$$

$$\therefore \lim_{x\to \infty}\frac{x^2+1+bx-ax^2+b-ax}{(x+1)}=5$$

$$\therefore \lim_{x\to \infty}\frac{\left(x^2-ax^2\right)+(bx-ax)+(b+1)}{x+1}=5$$

$$\therefore \lim_{x\to \infty}\frac{(1-a)x^2+(b-a)x+(b+1)}{x+1}=5$$

ولكي يكون الناتج عددًا حقيقيًا لابد وأن درجة البسط تساوي درجة المقام.

$\therefore 1-a=0 \qquad \therefore a=1$

$$\therefore \lim_{x\to \infty}\frac{(b+1)x+(b+1)}{x+1}=5=b-1$$

$\therefore b=6 \qquad \therefore a=1,\quad b=6$