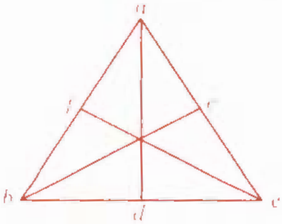
الفصل الثانى

الانطلاق في سماء الرياضيات

(1) المستقيمات المتلاقية في نقطة في المثلث:

للأستاذ / محمد محمد السيد مفتش الرياضة بمنطقة القاهرة الجنوبية .

النظرية المنسوبة إلى شيفا (Ceva) (وهو مهندس إيطالي) نشرت في سنة 1678م في ميلانو رسالة في الهندسة ذكر فيها تلك النظرية) تقرر كما هو معروف، « أنه إذا تلاقت ثلاثة مستقيمات مرسومة من رءوس المثلث الثلاث إلى الأضلاع المقابلة في نقطة واحدة كان حاصل ضرب ثلاثة أجزاء غير متتالية من تلك الأضلاع يساوي حاصل ضرب الثلاثة أجزاء الباقية، وعكسها صحيح ».



ففي الشكل المقابل:

$\overline{cf}$ ، $\overline{be}$ ، $\overline{ad}$ تتلاقى فى نقطة (داخل أو خارج المثلث)

$$\therefore \frac{af}{fb} \cdot \frac{bd}{dc} \cdot \frac{ce}{ea} = 1$$

والعكس صحيح فإذا كان حاصل ضرب هذه النسب = 1 ، تلاقت $\overline{cf}$ ، $\overline{be}$ ، $\overline{ad}$ في نقطة واحدة.

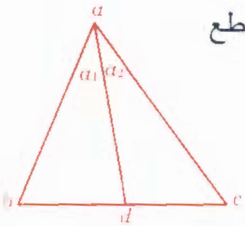
وفي كتاب Mathematical-Snackbar تأليف (نورمان أليسون) نجده يعطي الامتداد المفيد الآتي لهذه النظرية:

إذا كانت $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ أضلاع المثلث abc وكانت النقط d, e, f على هذه الأضلاع تقسمها بنسبة: $\frac{d(\bar{b})}{d(\bar{c})}, \frac{d(\bar{c})}{d(\bar{a})}, \frac{d(\bar{a})}{d(\bar{b})}$ على الترتيب حيث $d(\bar{a})$ أي دالة للضلع $\bar{a}$ ، $d(\bar{b})$ نفس الدالة بالنسبة للضلع $\bar{b}$ ...

كان $\overline{cf}$ ، $\overline{be}$ ، $\overline{ad}$ متلاقية في نقطة والبرهان لها واضح.

وبذا يبرهن ببرهان واحد على تلاقي ارتفاعات المثلث أو منصفات زواياه الداخلة أو الخارجة. أو مستقيماته المتوسطة ..

وسنحاول فيما يلي إعطاء امتداد آخر للنظرية في صورة مفيدة.



(1) ففي المثلث abc ، القطعة المستقيمة $\overline{ad}$ نجد أن $\overleftrightarrow{ad}$ قطع $\overline{bc}$ في d، $\overleftrightarrow{ad}$ ينصف زاوية $(\angle\, bac)$ كما بالشكل.

$$\frac{\overline{bd}}{\sin a_1} = \frac{\overline{ab}}{\sin d}$$

$$\therefore\ \overline{bd}\ \sin d = \bar{c}\ \sin a_1\,,\ \overline{cd}\sin d = \bar{b}\ \sin a_2$$

$$\therefore\ \frac{\overline{bd}}{\overline{cd}} = \frac{\sin a_1}{\sin a_2}$$

فإذا تلاقت المستقيمات $\overleftrightarrow{cf}$ ، $\overleftrightarrow{be}$ ، $\overleftrightarrow{ad}$ في نقطة كما في شكل واحد وانقسمت الزاوية $(\angle\, a)$ إلى الزاويتين $(\angle\, a_1), (\angle\, a_2)$ والزاوية $(\angle\, b)$ إلى الزاويتين $(\angle\, b_1), (\angle\, b_2)$ والزاوية $(\angle\, c)$ إلى الزاويتين $(\angle\, c_1), (\angle\, c_2)$ كان:

$$\frac{\overline{bd}}{\overline{cd}}\cdot\frac{\overline{ce}}{\overline{ae}}\cdot\frac{\overline{af}}{\overline{bf}} = 1 = \frac{\sin a_1}{\sin a_2}\cdot\frac{\sin b_1}{\sin b_2}\cdot\frac{\sin c_1}{\sin c_2}$$

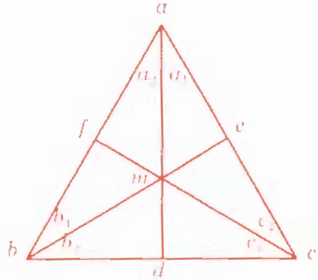
---

(2) والعكس صحيح بمعنى أنه بالنسبة للمثلث abc إذا رسم من a الشعاع $\overrightarrow{ad}$ يقسم الزاوية $(\angle\, cab)$ إلى جزئين $(\angle\, a_1), (\angle\, a_2)$ ورسم من b الشعاع $\overrightarrow{be}$ يقسم الزاوية $(\angle\, abc)$ إلى جزئين $(\angle\, b_1), (\angle\, b_2)$ ورسم من c الشعاع $\overrightarrow{cf}$ يقسم الزاوية $(\angle\, bca)$ إلى جزئين $(\angle\, c_1), (\angle\, c_2)$ بحيث كان:

$$\frac{\sin a_1}{\sin a_2}\cdot\frac{\sin b_1}{\sin b_2}\cdot\frac{\sin c_1}{\sin c_2} = 1$$

فإن $\overleftrightarrow{cf}$ ، $\overleftrightarrow{be}$ ، $\overleftrightarrow{ad}$ تتلاقى في نقطة f ولإثبات ذلك نفرض أن: $\overrightarrow{ad} \cap \overrightarrow{be} = \{m\}$

ونصل $\overline{mc}$ ونثبت أن: $(\angle\, mcb) : (\angle\, mca) = \frac{c_1}{c_2}$



$\frac{\sin a_1}{\sin a_2} \cdot \frac{\sin b_1}{\sin b_2} \cdot \frac{\sin c_1}{\sin c_2} = 1$ فرضًا

، $\frac{\sin a_1}{\sin a_2} \cdot \frac{\sin b_1}{\sin b_2} \cdot \frac{\sin mcb}{\sin mca} = 1$

لتلاقي $\overrightarrow{cm}$ ، $\overrightarrow{bm}$ ، $\overrightarrow{am}$ في نقطة

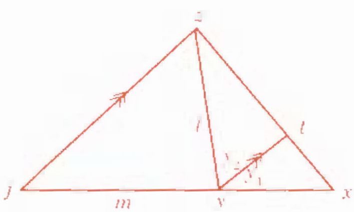
$\therefore \frac{\sin mcb}{\sin mca} = \frac{\sin c_1}{\sin c_2}$

وهنا $(\angle c_1) + (\angle c_2) = (\angle mcb) + (\angle mca)$

$\therefore$ لإثبات أن: $(\angle c_1) = (\angle mcb)$ يكفي أن نثبت أن الزاوية التي قياسها يقع بين $0°, 180°$ لا تنقسم إلى زاويتين النسبة بين جيبيها نسبة معلومة إلا بمستقيم واحد، وهذا نحاوله فيما يلي:

---

(3) افرض الزاوية (xyz) يراد قسمتها لزاويتين (من الداخل مثلاً) y_2، y_1 بحيث يكون $\frac{\sin y_1}{\sin y_2}$ = نسبة معلومة $\left(\frac{l}{m}\right)$ خذ $yz = l$، j على امتداد xy بحيث $m = yj$ وصل $\overline{zj}$ وارسم $\overline{jz}$ // $\overline{yt}$ ويقسم الزاوية $(\angle xyz)$ للزاويتين y_2، y_1 المطلوبتين لأن: $\angle j = \angle y_1$ في القياس، $\frac{l}{m} = \frac{\sin j}{\sin(\angle yzj)}$ ، $(\angle y_2) = (\angle yzj)$ ومن طريقة الإنشاء يتضح أنه لا يمكن رسم إلا المستقيم الوحيد $\overleftrightarrow{ty}$ الذي يفي بالشروط المطلوبة لأن $\overline{jz}$ الموازي له محدد الاتجاه.



كما يلاحظ أن تقسيم زاوية إلى زاويتين النسبة بين جيبيه نسبة معلومة ممكن دائمًا ما دام في الإمكان رسم مستقيمين النسبة بينهما تلك النسبة المعلومة.

---

(4) والامتداد الذي أشرنا إليه في (2) وهو إذا رسمت مستقيمات من رءوس المثلث abc ونقسم زواياه من الداخل إلى الزوايا $(\angle c_1, \angle c_2)$. $(\angle b_1, \angle b_2)$ ، $(\angle a_1, \angle a_2)$ بترتيب دوري بحيث يكون:

$$\frac{\sin a_1}{\sin a_2} \cdot \frac{\sin b_1}{\sin b_2} \cdot \frac{\sin c_1}{\sin c_2} = 1$$

فإن هذه المستقيمات الثلاثة تتلاقى في نقطة واحد. هذا الامتداد يمكن الاستفادة به في برهنة نظريات مثل:

(1) تتلاقى منصفات الزوايا الداخلة في نقطة واحدة لأن: $(\angle a_2) + (\angle a_1)$.

(2) تتلاقى ارتفاعات المثلث في نقطة واحدة لأن:

$$\frac{\sin a_1}{\sin a_2} = \frac{\cos b}{\cos c}, \ldots$$

(3) تتلاقى المستقيمات المتوسطة للمثلث في نقطة واحدة لأن:

$$\frac{\sin a_1}{\sin a_2} = \frac{\bar{c}}{\bar{b}}$$

وسأطبق هذا الامتداد في التمرين الآتي:

---

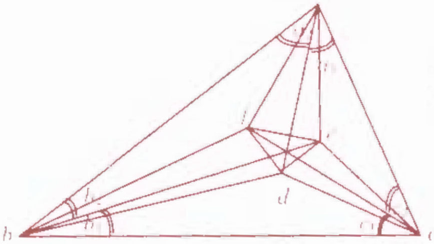
(5) $\Delta\, abc$ قسمت كل من زواياه الثلاثة إلى 3 أجزاء متساوية في القياس فنتج $\Delta\, def$.

ويطلب إثبات أن: $\overleftrightarrow{ad}$ ، $\overleftrightarrow{be}$ ، $\overleftrightarrow{cf}$ تتلاقى في نقطة واحدة.

في $\Delta\, adc$: $\frac{\sin a_1}{\sin \frac{2}{3}c} = \frac{\overline{dc}}{\overline{ad}}$ ، في $\Delta\, adb$: $\frac{\sin a_2}{\sin \frac{2}{3}b} = \frac{\overline{db}}{\overline{ad}}$ ،

$$\therefore \frac{\sin a_1}{\sin a_2} = \frac{\sin \frac{2}{3}c}{\sin \frac{2}{3}b} \cdot \frac{\overline{dc}}{\overline{db}} = \frac{\sin \frac{2}{3}c}{\sin \frac{2}{3}b} \cdot \frac{\sin \frac{1}{3}b}{\sin \frac{1}{3}c} = \frac{\cos \frac{1}{3}c}{\cos \frac{1}{3}b}$$

وبالمثل:



$$\therefore \frac{\sin b_1}{\sin b_2} = \frac{\cos \frac{1}{3}a}{\cos \frac{1}{3}c}, \quad \frac{\sin c_1}{\sin c_2} = \frac{\cos \frac{1}{3}b}{\cos \frac{1}{3}c}$$

$$\frac{\sin a_1}{\sin a_2} \cdot \frac{\sin b_1}{\sin b_2} \cdot \frac{\sin c_1}{\sin c_2} = 1$$

(وهو المطلوب)

---

(6) في الشكل السابق: إذا كان:

$$\overrightarrow{bf} \cap \overrightarrow{ce} = \{\bar{d}\},\ \overrightarrow{af} \cap \overrightarrow{cd} = \{\bar{e}\},\ \overrightarrow{ae} \cap \overrightarrow{bd} = \{\bar{f}\},$$

أثبت أن: $\overrightarrow{c\bar{f}}$ ، $\overrightarrow{b\bar{e}}$ ، $\overrightarrow{a\bar{d}}$ تتلاقى في نقطة واحدة.

اعتبر الآتي:

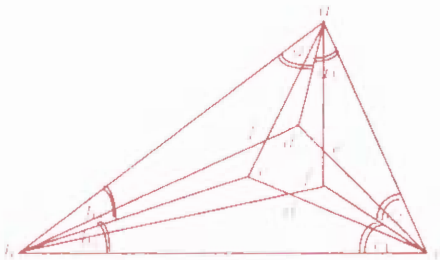
$$(\angle\, ca\bar{d}) = (\angle\, a_1),\ (\angle\, ba\bar{d}) = (\angle\, a_2),\ (\angle\, ab\bar{e}) = (\angle\, b_1),$$

$$(\angle\, cb\bar{e}) = (\angle\, b_2),\ (\angle\, bc\bar{f}) = (\angle\, c_1),\ (\angle\, ac\bar{f}) = (\angle\, c_2),$$

∴ في $\Delta\, a\bar{d}\,c$: $\dfrac{\sin a_1}{\sin\frac{1}{3}a} = \dfrac{\overline{\overline{dc}}}{\overline{\overline{ad}}}$ ، وفي $\Delta\, a\bar{d}\,b$: $\dfrac{\sin a_1}{\sin\frac{1}{3}b} = \dfrac{\overline{\overline{db}}}{\overline{\overline{ad}}}$ ،

$$\therefore\ \frac{\sin a_1}{\sin a_2} = \frac{\sin\frac{1}{3}b}{\sin\frac{1}{3}c}\cdot\frac{\overline{\overline{dc}}}{\overline{\overline{db}}} = \frac{\sin\frac{1}{3}b}{\sin\frac{1}{3}c}\cdot\frac{\sin\frac{2}{3}b}{\sin\frac{2}{3}c}$$

وبالمثل:



$$\frac{\sin b_1}{\sin b_2} = \frac{\sin\frac{1}{3}c\sin\frac{2}{3}c}{\sin\frac{1}{3}a\sin\frac{2}{3}a},$$

$$\frac{\sin c_1}{\sin c_2} = \frac{\sin\frac{1}{3}a\sin\frac{2}{3}a}{\sin\frac{1}{3}c\sin\frac{2}{3}c}$$

$$\therefore\ \frac{\sin a_1}{\sin a_2}\cdot\frac{\sin b_1}{\sin b_2}\cdot\frac{\sin c_1}{\sin c_2} = 1$$ (وهو المطلوب)

وواضح من المعالجة السابقة أن: $\overline{ad}$ ، $\overline{a\bar{d}}$ لا تنطبقان (بصفة عامة) وبذلك يثبت أن نقطة التلاقي في الحالة (5) تختلف عنها في الحالة (6) هذا ويمكن إثبات تلاقي $\overrightarrow{f\bar{f}}$ ، $\overrightarrow{e\bar{e}}$ ، $\overrightarrow{d\bar{d}}$ في نقطة واحدة جديدة بالاستفادة من كون $\Delta\, def$ متساوي الأضلاع.

(2) مثلثات هيرونية Heronian Triangles:

للأستاذ/ محمد محمد السيد مفتش الرياضة بالتعليم الثانوي.

في بعض الامتحانات نصادف أحيانًا مسائل ركيكة التكوين رياضيًا، أذكر منها المسألة الآتية:

(مثلث أطوال أضلاعه 20، 30، 40 وارتفاعه النازل على أصغر الأضلاع 20 وحدة. فما طول كل من الارتفاعين الآخرين).

وخطأ تكوين المسألة واضح في أن المثلث المعلوم أطوال أضلاعه الثلاثة محدد من كل النواحي فارتفاعاته إذن محددة غير قابلة لأن تخترع أو تعدل ويمكن حسابها من أطوال أضلاع المثلث بالاستعانة بقاعدة تنسب إلى هيرون الإسكندرية وتنص على أن:

مساحة المثلث = $\sqrt{h\,(h-\bar{a})\,(h-\bar{b})\,(h-\bar{c})}$ حيث h نصف محيط Δ ،

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ أطوال أضلاعه.

فالمثلث السابق مساحته = $\sqrt{45\times25\times15\times5} = 75\sqrt{15}$

وهي كمية غير جذرية تبلغ نحو 300 وحدة مربعة تقريبًا.

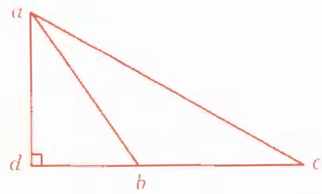
ارتفاعه النازل على أصغر أضلاعه $7\frac{1}{2}\sqrt{15} = \frac{\text{ضعف مساحة المثلث}}{20}$

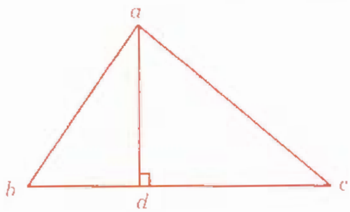
وهي كمية غير جذرية تبلغ نحو 29 وحدة طول.

وواضح أن أي ثلاثة أعداد لأضلاع مثلث قد لا تنتج أعدادًا جذرية لارتفاعاته. فالارتفاعات لا تكون جذرية لمثل هذه المثلثات إلا إذا كانت أطوال الأضلاع والمساحة كلها جذرية. ومثل هذه المثلثات التي فيها أطوال الأضلاع والمساحة جذرية تسمى مثلثات هيرونية نسبة إلى هيرون السكندري الذي أشرنا إليه. إذ تدخل معادلته عن مساحة المثلث في إثبات جذريتها ارسم $\overrightarrow{ad}$ ارتفاعًا للمثلث abc وبذلك تحصل منه على مثلثين قائمي الزاوية abd, acd إذا كانت أضلاعهما جذرية فالمثلث abc مثلث هيروني.

وبذلك يتضح أن تكوين المثلثات الهيرونية يرتكز على فكرة تكوين مثلثات فيثاغورثية (قائمة الزاوية ذات أضلاعه جذرية) وهذه يمكن تكوينها بتعويض أي

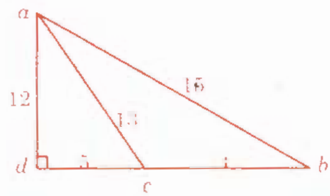
عددين جذريين بدلاً من m, n لتكون أضلاعًا ثلاثة لمثلث قائم الزاوية هي:

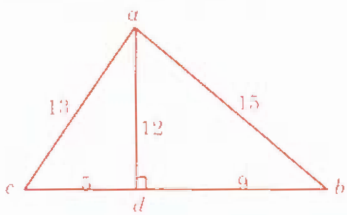




$$m^2 - n^2,\ 2mn,\ m^2 + n^2$$

خذ كمثال المثلثين الفيثاغورثين (3, 4, 5)، (5, 12, 13) اجعل أحد ضلعي القائمة في كل من المثلثين مشتركًا وذلك بقسمة أو ضرب أضلاع أحد المثلثين على (أو) في عامل مشترك مثلاً (3, 4, 5) تصبح (9, 12, 15) ليشترك مع المثلث الثاني في الضلع الذي طوله 12 وحدة فيصير المثلثان $\overline{a}db$، adc مشتركان في الضلع $\overline{ad}$ الذي طول 12 وحدة ويكون: $\overline{ba} = 15$، $\overline{ca} = 13$، $\overline{db} = 9$، $\overline{dc} = 5$ وحدة طول.





$\therefore$ أطوال أضلاع $\Delta\, abc$ تصير $13, 15, 9\pm5$ أي (13,15, 4) أو (13, 15, 14)

تصبح مساحة هذا المثلث ($24 = \frac{12\times4}{2}$ أ، $\frac{12\times14}{2}$ وحدة مربعة)

فهذا إذن مثلث هيروني أضلاعه ومساحته وارتفاعاته كلها جذرية.

والمثال العددي السابق يعمم بالرموز. فإذا بدأنا بمثلثين قائمي الزاوية أطوال أضلاعهما (l, m, n)، (d, e, f) كلها جذرية حيث:

$d^2 = e^2 + f^2$، $l^2 = m^2 + n^2$ وبجعل أحد أضلاع القائمة مشتركًا في المثلثين.

$$\therefore\ l^2e^2 = m^2e^2 + n^2e^2,\ d^2m^2 = e^2m^2 + f^2m^2$$

فإن: $le, md, (ne \pm fm)$ تعطي أطوالاً للأضلاع الثلاثة لمثلثين هيرونيين مساحتيهما

$$= \frac{me}{2}(ne \pm fm)$$

ضع $f = 2x_2y_2$، $e = x_2^2 - y_2^2$، $n = 2x_1y_1$، $m = x_1^2 - y_1^2$

$\therefore\ l = x_1^2 + y_1^2\ ,\ d = x_2^2 + y_2^2$

$\therefore$ الأضلاع الثلاثة للمثلث الهيروني هي:

$$2x_1y_1\left(x_2^2 - y_2^2\right) \pm 2x_2y_2\left(x_1^2 - y_1^2\right)\ ,\ \left(x_1^2 + y_1^2\right)\left(x_2^2 - y_2^2\right),\ \left(x_1^2 - y_1^2\right)\left(x_2^2 + y_2^2\right)$$

مثال: خذ $4, 3, 2, 1 = x_1\ , y_1\ , x_2\ , y_2$

فيكون أطوال كل من أضلاع المثلثين وهي 28 ± 72 ,35 ,75 مثلثًا هيرونيًا.

ومنه ينتج المثلثان الهيرونيان أطوال أضلاعهما هي:

(75, 35, 100), (75, 35, 44)

وبأخذ العامل المشترك من أضلاع المثلث الأول يصبح المثلثان الهيرونيان أطوال أضلاعهما (44 ,35 ,75) ,(20 ,7 ,15)

تناول الباحثون المثلثات الهيرونية وناقشوا قواعد مختلفة لإنشائها ودرسوا خواصها وأنشئت قوائم كاملة وشاملة للمثلثات الهيرونية ذات أطوال أضلاع أقل من 100 وحدة طول تبلغ نحو (300 مثلث) وأمكن التوصل إلى نتائج مختلفة نسرد هنا بعضها.

(1) لا توجد مثلثات هيرونية أطوال أضلاعها الثلاثة أعداد فردية. فلابد من وجود ضلعين أطوالهما فرديين في كل مثلث.

(2) لم يتوصل أحد لإنشاء مثلثات هيرونية بأضلاع ذات أطوال مربعة كاملة: ولكن جعل ضلعين مربعين ومن أمثلة ذلك المثلثات الهيرونية.

(16, 25, 39), (25, 36, 29), (225, 289, 208) . . .

(3) القواعد التي أعطيناها لإنشاء المثلثات الهيرونية تنتج في كل حالة مثلثين مشتركين في ضلعين ويختلفان في المساحة.

ولكن من الممكن اشتراك المثلثين الهيرونيين في ضلعين وفي المساحة. ونعطي كمثال للمثلثين.

(212 ,113 ,195), (238 ,113 ,195) فإن مساحة كل منهما $\frac{195 \times 132}{2}$

(4) يمكن إنشاء مثلثات هيرونية بشروط مختلفة .. مثلاً المثلثان ,(53 ,52 ,51) (195 ,184 ,193) كل منها هيروني.

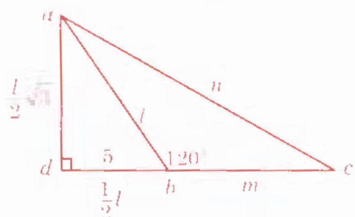
تتفاضل أضلاع كل منها بواحد وتكاد قياسات زواياه تقترب من $60°$.

(3) مثلثات إحدى زواياها قياسها (°60 أو °120)

للأستاذ/ محمد محمد السيد مفتش الرياضة بمنطقة جنوب القاهرة 1955م.

المثلثات القائمة ذات الأضلاع الجذرية كثيرة ـ بل قل لا نهائية ـ ومن أمثلتها المثلثات $(3, 4, 5), (5, 12, 13)$ ، ... وكان يمكن أن تخرج بالتعويض من الأطوال $(a^2 + b^2), (a^2 - b^2), (2ab)$. والمثال الآتي يوضح كيف يمكن الحصول على مثل هذه الأعداد لمثلثات إحدى زواياها °60 أو °120 وهي مشكلة تصادف مدرس الهندسة في التطبيقات على العلاقات العددية لأضلاع المثلث.

إذا بدأنا بمثلث إحدى زواياه °120 ، والضلعان المحيطان بهذه الزاوية l, m والضلع الثالث n نجد بالرجوع إلى الشكل أن:



$$(m + \tfrac{1}{2}l)^2 + (\tfrac{1}{2}l\sqrt{3})^2 = n^2$$

ومن هذه المتساوية ينتج أن:

$$m^2 + ml + l^2 = n^2$$

فإذا كانت l, m, n كلها أطوال جذرية فإن المطلوب إيجاد m, l التي تجعل المقدار $m^2 + ml + l^2$ مربعًا كاملاً أي $\frac{m^2}{l^2} + \frac{m}{l} + 1$ مربعًا كاملاً.

بوضع $e = \frac{m}{l}$ يصبح المطلوب إيجاد قيم e الجذرية. التي تجعل المقدار: $e^2 + e + 1$ مربعًا كاملاً. ضع $e^2 + e + 1 = (e + x)^2$

$$\therefore\ 2ex + x^2 = e + 1 \qquad \therefore\ e(2x - 1) = 1 - x^2 \qquad \therefore\ e = \frac{1 - x^2}{2x - 1}$$

ولكي تكون e موجبة يجب أن تنحصر x بين 1 ، $\frac{1}{2}$ فتعويض x أي كسر جذري بين 1 ، $\frac{1}{2}$ ينتج قيمة مقابلة للرمز e تصلح حلاً.

خذ مثلاً $x = \frac{3}{4}$

$$\therefore\ e = \frac{1 - \frac{4}{16}}{\frac{1}{2}} = \frac{7}{8} \qquad \therefore\ \frac{m}{l} = \frac{7}{8}$$

وتكون الأضلاع $\sqrt{8^2 + 7 \times 8 + 7^2}$ ، 7 ، 8

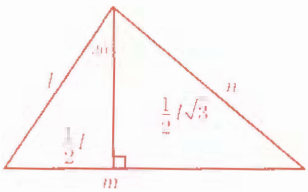
أي أن: 13 ,7 ,8 مثلث ذي أطوال جذرية وزاويته المنفرجة قياسها = °120

وباتباع نفس الخطوات السابقة للمثلثات التي إحدى زواياه °60 نجد أن:

$n^2 = l^2 - lm + m^2$ وأن $e^2 - e + 1 = (e + x)^2 \quad \Leftarrow \quad 1 - e = 2ex + x^2$

$\therefore \; e = \dfrac{1 - x^2}{2x + 1}$ ولتكون e موجبة يجب أن تكون x إما موجبة أقل من 1 أو سالبة أكبر من 1 عدديًا ولتعويض أي قيمة من هذه القيم الجذرية للمتغير x تنتج قيمة مقابلة للمتغير e تصلح حلاً.

خذ مثلاً $x = \dfrac{1}{2}$



$$\therefore \; e = \frac{1 - \frac{1}{4}}{2} = \frac{3}{4 \times 2} = \frac{3}{8}$$

$$\because \; \frac{m}{l} = e = \frac{3}{8}$$

$$\therefore \; m = 3, \; l = 8 \; ^{(1)}$$

$$\therefore \; n = \sqrt{m^2 - ml + l^2} = \sqrt{9 - 24 + 64} \qquad \therefore \; n = \sqrt{49} = 7$$

أي أن المثلث (8 ,3 ,7) إحدى زواياه قياسها = °60

خذ $x = -2$ $\quad \therefore \; e = 1$ وينتج مثلث متساوي الأضلاع

خذ $x = -3$ $\quad \therefore \; e = \dfrac{8}{5} \quad \therefore \; l = 5$ ، $m = 8$

$n = \sqrt{64 - 40 + 25} = 7$ فالمثلث 5 ,8 ,7 إحدى قياس زواياه = °60

وهناك بعض مثلثات مشتقة بالطريقة السابقة

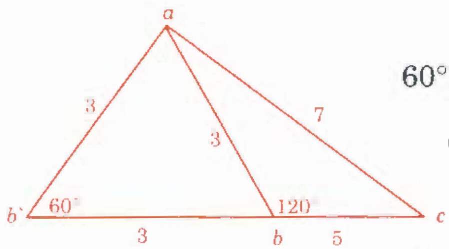
الزاوية بين l, m قياسها = °120

x	e	أضلاع المثلث l, m, n
$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	3, 5, 7
$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	8, 7, 12
$\frac{5}{6}$	$\frac{11}{24}$	24, 11, 31
$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{16}$	16, 5, 19

(1) لاحظ أنه إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ فإن $a \neq c$ ، $b \neq d$ ويمكن أن يكون عَمدَ إلى ذلك على أساس أنها نسب مثلثية يهمل فيها الثابت.

قياس الزاوية بين l, m = $60°$

x	e	أضلاع المثلث l, m, n
$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{21}$	21, 5, 19
$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{40}$	40, 7, 37
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	8, 3, 7
-6	$\frac{35}{11}$	11, 35, 31



ويلاحظ أن المثلث ذي زاوية قياسها $120°$ يمكن منه اشتقاق مثلث إحدى قياس زواياه $60°$ فبالرجوع إلى الشكل المثلث abc $(3, 5, 7)$ فيه زاوية $(\angle b)$ قياسها = $120°$.

فإذا مد $\overline{cb}$ أي نرسم $\bar{b} \in \overrightarrow{cb}$ ، $\overrightarrow{cb}$ بحيث يكون $ab\bar{b}$ متساوي الأضلاع لكان $\Delta a\bar{b}c$ فيه $(\angle \bar{b}) = 60°$ وأضلاعه 7, 8, 3 جذرية.

ومثل هذه المثلثات المشتقة من بعضها تكررت في الجدولين السابقين فالمثلث (16, 5, 19) قياس إحدى زواياه $120°$ يتحول إلى مثلث أطوال أضلاعه (21, 5, 19) قياس إحدى زواياه ($60°$).

(4) متى يكون مجموع مربعات أعداد مربعًا كاملاً ؟

للدكتور/ فؤاد محمد رجب أستاذ الرياضة المساعد بكلية العلوم (القاهرة) 1959م

• مقدمة وفكرة المسألة:

نتجت هذه الفكرة من السؤال الذي وجهه لي الأستاذ الفاضل محمد السيد مفتش الرياضيات بوزارة التربية والتعليم وهو:

ما قيمة x التي تجعل المقدار x^2+5 أو x^2-5 مربعًا كاملاً؟

فأخذ بدلاً من العدد 5 مربعًا كاملاً آخر وناقشت الشطر الأول أي

$x_1^2 + x^2 =$ مربعًا كاملاً

وهي علاقة فيثاغورث المعروفة ثم أوجدت الحالة العامة وهي متى يكون:

$x_n^2 + \dots + x_2^2 + x_1^2 =$ مربعًا كاملاً؟

وواضح بوضع $n = 2$ تنتج نظرية فيثاغورث فإذا كان y^2 هو المربع الكامل فإن النظرية تصبح:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = y^2 \qquad \dots\dots (1)$$

إذا كانت $n = 2$ فإن y هي عبارة عن طول قطر المستطيل الذي بعداه x_1, x_2

وإذا كانت $n = 3$ فإن y هي عبارة عن طول متوازي المستطيلات الذي أبعاده هي x_1, x_2, x_3 وإذا كانت $n = 4$ فإن y هي طول قطر متوازي المستطيلات في الأربع أبعاد الذي أبعاده هي x_1, x_2, x_3, x_4 وهكذا تكون y في المعادلة (1) هي طول قطر متوازي المستطيلات في n بعد الذي أبعاده هي $x_1, x_2, \dots, x_n$

إذا كانت: $n = 2$ فإن:

$$5^2 + 12^2 = 13^2 \qquad 3^2 + 4^2 = 5^2,$$

$$35^2 + 12^2 = 37^2 \qquad 15^2 + 8^2 = 17^2 \quad \dots\dots (2),$$

$$55^2 + 48^2 = 73^2 \qquad 45^2 + 28^2 = 53^2,$$

وإذا كانت: $n = 3$ فإن:

$$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2 \qquad 1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2,$$

$11^2+36^2+48^2=61^2$ ..... (3)

$1^2+4^2+8^2=9^2$

$3^2+4^2+12^2=13^2$

$31^2+24^2+12^2=41^2$,

$3^2+96^2+80^2=125^2$

إذا كانت: $n=4$

$1^2+4^2+8^2+12^2=15^2$ ..... (4)

$1^2+1^2+1^2+1^2=2^2$,

$10^2+28^2+21^2+14^2=39^2$

$11^2+30^2+20^2+10^2=39^2$,

إذا كانت: $n=5$

$1^2+8^2+6^2+4^2+2^2=11^2$

$3^2+2^2+2^2+2^2+2^2=5^2$ ...... (5)

$5^2+70^2+56^2+42^2+28^2=103^2$

إذا كانت: $n>5$

$59^2+126^2+108^2+90^2+72^2+54^2+36^2+18^2=221^2$

• النظرية وبرهانها:

إذا كانت l, m أي أعداد صحيح بحيث لا تساوي الصفر فواضح أن:

$$\left(l^2-m^2\right)^2+(2lm)^2=\left(l^2+m^2\right)^2$$

وهذا يثبت النظرية في الحالة التي فيها $n = 2$ فالأمثلة في (2) تنتج بإعطاء l, m القيم الآتية على الترتيب.

(2, 1), (3, 2), (4, 1), (6, 1), (7, 2), (8, 3)

أما إذا كانت: $n=3$ فإن:

$$\left(l^2-m_1^2-m_2^2\right)^2+\left(2lm_1\right)^2+\left(2lm_2\right)^2=\left(l^2+m_1^2+m_2^2\right)^2$$

فالأمثلة في 3 تنتج من إعطاء l,m_1,m_2 القيم الآتية على الترتيب:

(1, 1, 1), (3, 2, 1), (4, 3, 2), (6, 4, 3), (6, 2, 1), (5, 4, 2), (8, 6, 5)

أما إذا كانت: $n=4$ فإن:

$$\left(l^2-m_1^2-m_2^2-m_3^2\right)^2+\left(2lm_1\right)^2+\left(2lm_2\right)^2+\left(2lm_3\right)^2=\left(l^2+m_1^2+m_2^2+m_3^2\right)^2$$

فالأمثلة في 4 تنتج من إعطاء l,m_1,m_2,m_3 القيم الآتية على الترتيب:

(1, 1, 1, 1), (4, 3, 2, 1), (5, 3, 2, 1), (7, 4, 3, 2)

أما إذا كانت: $n=5$ فإن النظرية هي:

$$\left(l^2-m_1^2-m_2^2-m_3^2-m_4^2\right)^2+\left(2lm_1\right)^2+\left(2lm_2\right)^2+\left(2lm_3\right)^2+\left(2lm_4\right)^2$$
$$=\left(l^2+m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2\right)^2$$

فالأمثلة (5) تنتج من إعطاء l,m_1,m_2,m_3,m_4 القيم الآتية على الترتيب:

(5, 4, 3, 2, 1), (1, 1, 1, 1, 1), (7, 5, 4, 3, 2)

• النظرية العامة:

مما سبق نستنتج بسهولة النظرية العامة في حالة n تساوي أي عدد وهي:

$$\left(l^2-m_1^2-m_2^2-....-m_n^2\right)^2+\sum_{r=1}^{r=n}\left(2lm_n\right)^2=\left(l^2+m_1^2+m_2^2+...+m_n^2\right)^2$$

ونذكر أن: المثال (6) فيه: $n=8$ والقيم $l,m_1,m_2,...,m_7$ هي:

(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9)

(5) مغالطتان رياضيتان:

للأستاذ/ محمد لطفي مصطفى المدرس بالمعهد العلمي الثانوي 1959م.

• **أولاً: مشكلة جبرية:**

هذه مسألة حسابية فشل في حلها الجبر.

• **المسألة:**

عدد مكون من رقمين تقع العلامة العشرية بينهما. والرقم الصحيح في العدد أكبر من الرقم العشري بمقدار واحد صحيح. وإذا عكس وضع الرقمين نقصت قيمة العدد بمقدار 0.9 فما هو العدد؟

الحل:

نفرض أن الرقم العشري = x ∴ الرقم الصحيح = $x + 1$

∴ قيمة العدد هي $\left[\frac{1}{10}x+(x+1)\right]=\frac{11}{10}x+1$ .... (1)

، قيمة العدد بعد عكس رقميه = $x+(x+1)\frac{1}{10}=x\frac{11}{10}+\frac{1}{10}$

∵ الفرق بين قيمتي العددين = 0.9 فرضاً

$\therefore \left(\frac{11}{10}x+1\right)-\left(\frac{11}{10}x+\frac{1}{10}\right)=0.9$ $\therefore 1-\frac{1}{10}=0.9$

وهكذا فشلنا في الحل الجبري فما العمل؟

الحل الصحيح:

هذه مغالطة تكشف الفرق بين المعادلة والمتطابقة وتؤكده المتطابقة تصح لأي قيمة عددية للمتغير، أما المعادلة فتصح لقيم معينة فقط.

فمثلاً: $x^2+2x+1=(x+1)^2$

هذه متطابقة صحيحة لأي قيمة عددية نعطيها للرمز x فهي ليست معادلة قابلة للحل ولن تخرج منها بقيمة محددة للرمز x. ولو نقلنا حدودها لطرف واحد تحولت المتساوية $0 = 0$

أما المعادلة فليست من هذا النوع. ومسألتنا هنا لا تؤول إلى معادلة. ولتفسير ذلك افترض الرقم العشري x.

∴ الرقم الصحيح $x+1$

العدد قبل عكس وضع رقميه $= \frac{1}{10}x+(x+1)=\frac{11}{10}x+1$ ...... (1)

العدد بعد عكس وضع رقميه $= \frac{1}{10}(x+1)+x=\frac{11}{10}x+\frac{1}{10}$ ...... (2)

ظاهر أن (1) تزيد عن (2) دائمًا بمقدار 0.9 مهما كانت قيمة x إذ أن باقي الطرح أو الفرق لا يتأثر بهذه القيمة. فشروط المسألة إذن لا تؤدي إلى معادلة أو متطابقة.

$$\frac{1}{10}x+(x+1)-\left[\frac{11}{10}(x+1)+x\right]=0.9$$

وهذه لا تعطي حلاً محدودًا للمجهول x. ومعنى ذلك أن وضع المسألة لا يحدد المسألة. ولما كانت x تحتمل أي قيمة من القيم الصحيحة من 0 إلى 9

∴ الأجوبة المحتملة كلها حسب الجزء الأول من المسألة هي:

1.0, 2.1, 3.2, 5.4, 6.5, 7,6. 7.8, 9.8

أما الجزء أو الشرط الثاني من المسألة فلغو لا فائدة منه.

إذ هو ممكن استنتاجه من الجزء الأول من المسألة.

• ثانيا: المعادلة من الدرجة الثانية يمثلها بيانيا خط مستقيم:

المعطيات: $3x^2-xy-2y^2-5x+5y=0$

هي معادلة من الدرجة الثانية ذات مجهولين.

المطلوب: إثبات أنها تمثل خطًا مستقيمًا.

البرهان: إذا عوضنا في المعادلة السابقة بإحداثي أي نقطة على شرط أن يكون كل من الإحداثيين السيني والصادي لهذه النقطة متساويين نجد أنها تحقق هذه المعادلة.

فمثلاً النقط $(-14, -14)$، $(10, 10)$، $(0, 0)$، $(-3 -3)$، $\left(2\frac{1}{5}, 2\frac{1}{5}\right)$، $(1, 1)$ تحقق جميعا المعادلة السابقة.

∵ جميع هذه النقط تقع على خط مستقيم واحد وهو المستقيم الذي ينصف الزاوية التي بين الاتجاهين الموجبين لمحوري السينات والصادات.

∴ فالمعادلة السابقة تمثل خطًا مستقيمًا.

وهذا يناقض ما تعلمناه من أن معادلة الثانية يمثلها منحنى فأين وجه الخطأ؟

التفسير:

بالتحليل يمكن تحويل المعادلة المذكورة من الدرجة الثانية إلى معادلتين من الدرجة الأولى وهكذا:

$$3x^2 - xy - 2y^2 - 5x + 5y = 0 \qquad \ldots\ldots (1)$$

$$\therefore\ (3x^2 - xy - 2y^2) - (5x - 5y) = 0$$

$$\therefore\ (x - y)(3x + 2y - 5) = 0 \qquad \ldots\ldots (2)$$

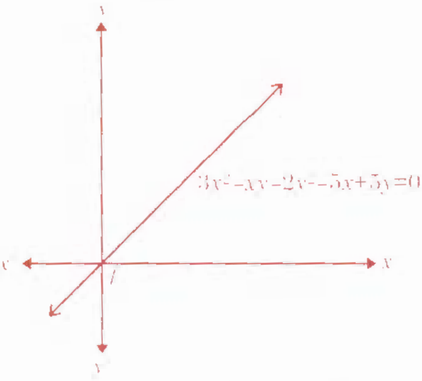
$\therefore$ إما $x - y = 0$ ومنها $x = y$ أو $3x + 2y - 5 = 0$

والمعادلة $y = x$ هي معادلة المستقيم الذي ينصف الزاوية التي بين الاتجاهين الموجبين لمحوري السينات والصادات. وجميع النقط التي إحداثياها يحققان هذه المعادلة تحققان أيضًا المعادلة رقم (2) وبالتالي تحققان المعادلة الأصلية رقم (1).

أي أن جميع النقط التي تقع على المستقيم $x - y = 0$ لابد أن تقع على المنحنى الذي تمثله المعادلة الأصلية (1).

$\because$ جميع النقط التي إحداثيها السيني والصادي متساويان تقع على المستقيم $x - y = 0$

$\therefore$ جميع النقط تقع أيضًا على المنحنى الأصلي الذي تمثله المعادلة (1).



$\therefore$ وإذا عوضنا بالإحداثيين المتساويين لإحدى هذه النقط في المعادلة (1) نجد أنهما تحققان هذه المعادلة.

وبالمثل جميع النقط التي تقع على المستقيم الذي معادلته هي $3x + 2y - 5 = 0$ تقع على المنحنى الذي معادلته رقم (1).

$\therefore$ المعادلة الأصلية (1) تمثل خطين مستقيمين لا واحد هما $3x + 2y - 5 = 0$ ، $x = y$ ولذلك تسمى المعادلة (1) بمعادلة المستقيمين.

(6) المفاجآت والتناقضات في علم الرياضيات:

للأستاذ/ سمير محمد عثمان الحفناوي مدرس رياضيات ثانوي 1992م.

لا شك أن كل سؤال في الحياة له إجابة والحياة أساسًا مملوءة بالمثيرات والشواذ، فكم من أشياء ومخلوقات تشذ عن الكون ـ وقد توجد مثل هذه المفارقات والشواذ والمتناقضات في الحياة وفي الرياضيات، ولكننا نتعامل في الرياضيات بقوانين وعلاقات استنتاجية فإذا كنا نسند الأشياء غير مسايرة لناموس الكون إلى طلاقة القدرة عند الله سبحانه وتعالى، فهل يمكن أن نسند الشواذ في علم الرياضيات إلى قانون علمي في ضوء المنهج الاستنباطي ونضع له قوانين ثابتة بحيث يجد المعلم نفسه حينما يقابل موقفًا مثل هذا؛ وأظنه من المواقف الحرجة !!).

ولقد وقعت أنا أثناء تدريسي للطلاب في مثل هذه المواقف ولقد وقع فيها قبلي معلمون أفاضل حيث علّق على ذلك (الأستاذ محمد لطفي لطفي م.ث بالمعهد العلمي 1959م) ومنها:

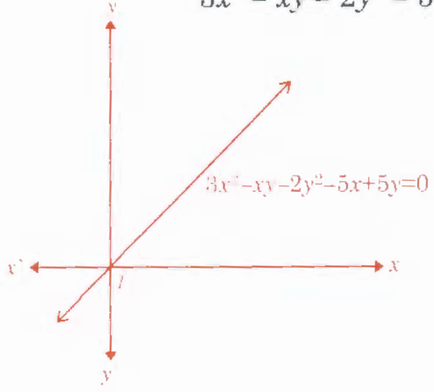
كل دالة على الصورة: $d(x) = x$ تمثل خطًا مستقيمًا.

كل دالة على الصورة: $d(x) = ax^2 + bx + c$ تمثل بمنحنى.

$\therefore$ (كل دالة من الدرجة الثانية تمثل بيانيًا بمنحنى).

لاحظ العبارة التي داخل القوسين ـ إن كلمة (كل) هي التي أوقعتنا في خطأ .. ليتنا نعرفه ونخرج من هذا المأزق ولنعطي المثال الآتي:

ارسم الخط البياني للمعادلة: $3x^2 - xy - 2y^2 - 5x + 5y = 0$



الحــل:

لقد أخذ العلم عدة نقاط فوجد أن الإحداثيين السيني والصادي متساويان ..

وقد ظن أن هذه صدفة مثلاً النقط $(-3, -3)$، $(-14, -14)$، $(10, 10)$، $(0, 0)$، $(2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$، $(1, 1)$، تحقق جميعا المعادلة السابقة.

∵ جميع النقط تقع على مستقيم واحد، وهو المستقيم الذي ينصف الزاوية بين محوري السينات والصادات.

∴ فالمعادلة السابقة تمثل خطًا مستقيمًا.

حينما وجد المعلم ذلك وقف وقد أخذته الدهشة وأخذ يتصبب عرقًا .. وحينما أفاق من غفلته واستجمع قواه قال في نفسه إن لذلك سرًا أو شيئًا أعجز عن تفسيره - لذلك بادر مشكورًا بأن بعث إلى موجهي الرياضيات عام 1958م بالقاهرة .. فعاجله الأستاذ (محمد لطفي 1959م) بالتفسير وقال في مقدمة رده على هذا السؤال في مجلة الرياضيات (عزيزي الراسل - لقد جاءتنا رسالتك وقرأنا ما فيها حيث تقول: المعادلة السابقة تمثل خطًا مستقيمًا! وهذا يناقض ما تعلمناه من أن معادلة الدرجة الثانية يمثلها منحنى فأين وجه الخطأ؟).

التفسير:

بالتحليل يمكن تحويل المعادلة المذكورة من الدرجة الثانية إلى معادلتين من الدرجة الأولى هكذا:

$3x^2 - xy - 2y^2 - 5x + 5y = 0 \qquad ..... (1)$

$\therefore\ (3x^2 - xy - 2y^2) - (5x - 5y) = 0$

$\therefore\ (x - y)(3x + 2y - 5) = 0 \qquad ...... (2)$

$\therefore\ x - y = 0$ ومنها $x = y$

أو $3x + 2y - 5 = 0$

والمعادلة $x = y$ هي معادلة المستقيم الذي ينصف الزاوية التي بين الاتجاهين الموجبين لمحوري السينات والصادات وجميع النقط التي إحداثياها يحققان هذه المعادلة (1) تحقق أيضًا المعادلة رقم (2) وبالتالي تحققان المعادلة الأصلية رقم (1).

أي أن: جميع النقط التي تقع على المستقيم $x - y = 0$ لابد أن تقع على المنحنى الذي تمثله المعادلة الأصلية (1).

∵ جميع النقط التي إحداثيها السيني والصادي متساويان تقع على المستقيم $x - y = 0$

∴ جميع النقط تقع أيضًا على المنحنى الأصلي الذي تمثله المعادلة (1).

وإذا عوضنا بالإحداثيين المتساويين لإحدى هذه النقط في المعادلة (1) نجد أنهما يحققان هذه المعادلة.

وبالمثل جميع النقط التي تقع على المستقيم الذي معادلته هي: $3x + 2y - 5 = 0$ تقع على المنحنى الذي معادلته رقم (1)

∴ المعادلة الأصلية (1) تمثل خطين مستقيمين لا واحدًا هما: $3x + 2y = 5$ ، $x = y$

لذلك تسمى المعادلة (1) بمعادلة المستقيمين، وواضح أن هذين المستقيمين ليسا منطبقين وإنهما متقاطعان ونقطة التقاطع هي (1 ,1).

ويمكن تمثيلهما بيانيًا بالطرق المعروفة.

وهنا انتهت الملابسة وأود انطلاقة من هذه النقطة.

• تعميم واستنتاج الحالة العامة والشروط اللازمة:

إن الموضوع السابق آثار لي شخصيًا عدة تساؤلات منها:

(1) ما هو الشرط اللازم والكافي لكي تمثل المعادلة العامة من الدرجة الثانية في متغيرين خطين مستقيمين منطبقين أو متقاطعين أو متوازيين؟

(2) إذا كان التحليل غير متيسر فهل هناك قاعدة عامة أو قانون نحصل به على المعادلات الخطية؟

سنقدم لهذه التساؤلات بالمعادلات التي يمكن تحليلها كالآتي:

فمثلاً المعادلة: $x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y + 1 = 0$

يمكن تحويلها للصورة الآتية:

$(x^2 - 2xy + y^2) + (2x - 2y + 1) = 0$ أو $(x - y + 1)^2 = 0$

تمثل خطين مستقيمين منطبقين (الخط المستقيم $x - y + 1 = 0$)

والمعادلة: $x^2 + y^2 - 2xy + 3x - 2y + 2 = 0$

والتي يمكن كتابتها على الصورة: $(x - y + 1)(x - y + 2) = 0$

وتمثل المستقيمين المتوازيين: $x - y + 1 = 0, x - y + 2 = 0$

أما المعادلة: $x^2 + y^2 - 2x + 1 = 0$

التي يمكن كتابتها على الصورة: $(x - y + 1)(x + y + 1) = 0$

فتمثل بالخطين المستقيمين المتقاطعين: $x - y + 1 = 0, x + y + 1 = 0$

إن مثل هذه المعادلة تمثل نوعًا من القطاعات المخروطية وسوف ندرس الشروط اللازم توافرها في كل حالة من هذه الحالات: نقصد بذلك الحالات التي تكون معادلة الدرجة الثانية في متغيرين تؤول إلى:

(1) مستقيمين متوازيين. (2) مستقيمين متقاطعين.

(3) مستقيمين منطبقين.

إذا كان بإمكاننا تحليل الطرف الأيمن من المعادلة:

$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + j = 0$ ...... (1)

حيث a, b, c ثوابت ليست كلها أصفارًا، إلى معادلتين خطيتين فإن هذا يعني أن الرسم البياني لهذه المعادلة هو اتحاد خطين مستقيمين، ولكن ما هي الشروط اللازم توفرها لكي يكون الطرف الأيمن للمعادلة (1) قابلاً للتحليل إلى معاملين من الدرجة الأولى؟. وهنا نود أن نتوقف قليلاً لنذكر القارئ بأن معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد، أي: $ax^2 + bx + c = 0$، يمكن عادة حلها بتحليل مقدار الدرجة الثانية إلى معاملين من الدرجة الأولى، مثل هذه المعادلة يمكن دائمًا حلها بإكمال المربع أو باستخدام صيغة الحل المألوفة لمعادلة الدرجة الثانية، أي:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

التي تكافئ إكمال المربع. وأيًا كانت الاحتمالات فلعلك قد فشلت في بعض الأحوال في التوصل إلى المعاملات الخطية لمعادلة الدرجة الثانية، ولجأت من ثم إلى صيغة حل معادلة الدرجة الثانية، لتكشف فقط أنه كان من الممكن حل المعادلة حقيقة بالتحليل. هذا يقودنا إلى أن صيغة حل معادلة الدرجة الثانية قد تساعد في إيجاد المعاملات الخطية للمعادلة، وفي الحقيقة فإن صيغة الدرجة الثانية: $ax^2 + bx + c$ يمكن دائمًا التعبير عنها كحاصل ضرب معاملين خطيين على الصورة الآتية:

$$ax^2 + bx + c = \left[x - \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\right]\left[x - \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\right]$$

إذا سمحنا باستخدام الأعداد المركبة عندما يكون ذلك ضروريًا. الآن، يمكن اعتبار المعادلة (1) على أنها معادلة من الدرجة الثانية في x إذا كانت $a \neq 0$، أو معادلة الدرجة الثانية في y إذا كانت $c \neq 0$ دعنا نفترض أن $c \neq 0$ ونكتب المعادلة رقم (1) على الصورة:

$$cy^2 + (bx + e)y + (ax^2 + dx + j) = 0, \;\; c \neq 0 \qquad \ldots\ldots (1)$$

$$\therefore\ y = \frac{-(bx+e) \pm \sqrt{(bx+e)^2 - 4c\left(2x^2 + dx + j\right)}}{2c} \qquad \ldots\ldots (2)$$

مميز هذه المعادلة يحوي حدودًا من الدرجتين الأولى والثانية في x، ولكن إذا كان المميز مربعًا كاملاً، فإنه يمكننا حذف علامة الجذر التربيعي لنحصل على تعبيرين للمتغير y ..(β, α) مثلاً، كل منهما من الدرجة الأولى في x أي أن كل من (β, α) يحوي x للدرجة الأولى فقط، وبعض الثوابت. إذن يمكن كتابة معادلة (2)، وإذا كانت $c \neq 0$ يمكن كتابة المعادلة (1) على الصورة:

$$c(y - \alpha)(y - \beta) = 0 \qquad \ldots\ldots (4)$$

حيث المعاملات في الطرف الأيمن خطية في x, y .. إذا الرسم البياني للمعادلة (4)، وبالتالي الرسم البياني للمعادلة (2)، يكن اتخاذ الرسم البياني للمعادلتين:

$$y - \alpha = 0, \;\; y - \beta = 0$$

حيث كل منهما خط مستقيم. ولكن يجب ملاحظة أن هذا الاستنتاج لا يتحقق إلا إذا كان مميز المعادلة (2) مربعًا كاملاً. المميز هو:

$$(bx + e)^2 - 4x(ax^2 + dx + j) \qquad \ldots\ldots (5)$$

كما يظهر في الصيغة (3)، أو بالفك وتجميع الحدود المتشابهة على الصورة: $x^2(b^2 - 4ac)x^2 + 2(be - 2cd)x + (e^2 - 4cj)$.

ومرة أخرى نستخدم صيغة حل معادلة الدرجة الثانية كعامل مساعد في التحليل. الصيغة (5) ستكون مربعًا كاملاً إذا وفقط إذا كان جذرا المعادلة:

$$(b^2 - 4ac)x^2 + 2(be - 2cd)x + (e^2 - 4cj) = 0 \qquad \ldots\ldots (6)$$

متساويين. هذان الجذران سيكونان متساويين إذا فقط كان مميز المعادلة (6) يساوي صفرًا. هذا المميز هو $4(be - cd)^2 - 4(b^2 - 4ac)(e^2 - 4cj)$، وسيكون

مساويًا للصفر إذا وفقط كان:

$$b^2e^2 - 4bcde + 4c^2d^2 - b^2e^2 + 4b^2cj + 4ace^2 - 16ac^2j = 0$$

أو:

$$2c(2bde - 2cd^2 - 2b^2j - 2ae^2 + 8acj) = 0 \qquad ..... (7)$$

أو:

$$2bde - 2cd^2 - 2b^2j - 2ae^2 + 8acj = 0$$

أو:

$$2a(4cj - e^2) - b(2bj - de) + d(be - 2cd) = 0$$

أو:

$$2a\begin{vmatrix} 2c & e \\ e & 2j \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} b & d \\ e & 2j \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} b & d \\ 2c & e \end{vmatrix} = 0$$

أو:

$$\begin{vmatrix} 2a & b & d \\ b & 2c & e \\ d & e & 2j \end{vmatrix} = \Delta = 0$$

المحدد Δ يسمى مميز معادلة الدرجة الثانية. إذا كان Δ مساويًا للصفر كان جذرا المعادلة (6) متساويين وبالتالي تكون الصيغة (5)، التي هي مميز المعادلة (2)، مربعًا كاملاً. في هذه الحالة يكون الرسم البياني للمعادلة (2) اتحاد خطين مستقيمين، فإذا كانت $c \neq 0$ أيضًا فإن هذه الفئة تكون أيضًا الرسم البياني (1). إذا كانت $a \neq 0$، $c = 0$، فإنه يمكننا إتباع نفس الأسلوب مع معاملة معادلة الدرجة الثانية كمعادلة من الدرجة الثانية في x. وسنكشف في النهاية أنه إذا كانت المعادلة (7) متحققة، $a \neq 0$ فإن الرسم البياني للمعادلة (1) يكون اتحاد خطين مستقيمين ولكن المعادلة (7) تكافئ أن $\Delta = 0$.

إذا كان كل من a, c مساويًا للصفر، فإن b لا يمكن أن تساوي الصفر (وإلا لا تكون المعادلة من الدرجة الثانية)، وبالتالي تؤول المعادلة (1) إلى $bxy + dx + ey + j = 0$، $b \neq 0$، الرسم البياني لهذه المعادلة سيكون اتحاد خطين مستقيمين إذا كان بالإمكان التعبير عن المقدار: $bxy + dx + ey + j$

كحاصل ضرب معاملين من الدرجة الأولى، أي على الصورة: $b(x + \alpha)(y + \beta)$

إذن $bxy + dx + ey + j = b(x + \alpha)(y + \beta)$ لكل x, y

أو:

$bxy + dx + ey + j = bxy + b\beta y + b\alpha y + b\alpha\beta$ لكل x, y

وهذا يحدث إذا وفقط إذا كان:

$$d = b\beta \, , \, e = b\alpha \, , \, j = b\alpha\beta$$

في هذه الدالة يكون: $de = bj$ أو $de - bj = 0$

إذا كانت: $a, c, de - bj$ جميعها مساوية للصفر، فإن:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2a & b & d \\ b & 2c & e \\ d & e & 2j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b & d \\ b & 0 & e \\ d & e & 2j \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} b & d \\ e & 2j \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} b & 0 \\ d & e \end{vmatrix}$$

$$= -b(2bj - de) + dbe$$

$$= -2b^2j + dbe + dbe = -2b(bj - de) = 0$$

وكملخص لما سبق، إذا كان الرسم البياني لمعادلة الدرجة الثانية اتحاد مستقيمين، فإن مميز المعادلة يساوي صفر.

خطوات الإثبات التي سقناها يمكن عكسها، بالرسم من أننا لم نحاول أن نبين ذلك هنا. إذن عكس ما توصلنا إليه أعلاه صحيح أيضًا، أي أنه إذا كان مميز المعادلة العامة من الدرجة الثانية مساويًا للصفر، فإن الطرف الأيمن للمعادلة يمكن التعبير عنه كحاصل ضرب معاملين خطيين. أي أنه إذا كان:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2a & b & d \\ b & 2c & e \\ d & e & 2j \end{vmatrix} = 0$$

فإنه يمكن التعبير عن المعادلة: $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + j$

كحاصل ضرب معاملين خطيين.

وقبل أن نستطرد في مناقشتنا في كيفية التعرف على نوعية المستقيمين اللذين تمثلهما المعادلة، سنعطي بعض الأمثلة:

المعادلة: $ax^2 - xy - 2y^2 - 5y + 5y = 0$

$$\because \Delta = \begin{vmatrix} 2a & b & d \\ b & 2c & e \\ d & e & 2j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -1 & -5 \\ -1 & -4 & 5 \\ -5 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -5 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 6(-25) + (25) + (25) - 5(-5 - 20) = -150 + 25 + 126 = 0$$

$$\because \Delta = 0$$

$\therefore$ المعادلة السابقة تمثل معادلتا خطين مستقيمين والرسم البياني لها هو اتحاد خطين مستقيمين، وبالتالي فإنها لا تمثل بمنحنى.

لنأخذ مثالاً آخر: المعادلة: $x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y + 1 = 0$

$a = 1, b = -2, c = 1, d = 2, e = -2, j = 1$

مميز المعادلة هو:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

وكما ذكرنا سابقًا فإن هذه المعادلة تمثل خطين مستقيمين منطبقين $(x - y + 1 = 0)$

ولنأخذ مثالاً ثالثًا: المعادلة: $x^2 + y^2 - 2xy + 3x - 3y + 2 = 0$

$a = 1, b = -2, c = 1, d = 3, e = -3, j = 2$

ومميز هذه المعادلة هو:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

وكما ذكرنا فإن هذه المعادلة تمثل خطين مستقيمين متقاطعين.

كيفية التعرف على نوعي المستقيمين:

من أجل ذلك سنعتبر الحالتين: كل حالة تفسيرية مرتبطة بمعادلة

$b^2 - 4ac = 0$, (أي $\delta = 4ac - b^2 = 0$)

$b^2 - 4ac \neq 0$, (أي $\delta = 4ac - b^2 \neq 0$)

• الحالة الأولى:

إذا كان: $\delta = 0$، $\Delta = 0$ فإن المقدار تحت الجذر في المعادلة (3) أي الطرف الأيمن من المعادلة (6) يكون مربعًا كاملاً فقط إذا انعدم معامل x أي إذا كان: $(be - 2cd = 0)$ وبالتالى فإن المقدار تحت الجذر فى (3) يؤول إلى $(e^2 - 4cj)$ والمعاملات الخطية في (3) تؤول إذن إلى $y = \frac{1}{2c}\left[-(bx+e) \pm \sqrt{e^2 - 4cj}\right]$ وبالتالي فإن المحل الهندسي للمعادلة المعطاة سيكون إحدى الحالات الآتية:

$\Delta = 0, \delta = 0$

الفئة الخالية	مستقيمين منطبقين	مستقيمين متوازيين
إذا كان $e^2 - 4cj < 0$	إذا كان $e^2 - 4cj = 0$	إذا كان $e^2 - 4cj > 0$

ويمكن استنتاج المعادلتين الخطيتين من العلاقة:

$$y = \frac{1}{2c}\left[-(bx+e) \pm \sqrt{e^2 - 4cj}\right]$$

وسوف نقدم للحالة الأولى السابقة بمثال يوضحها قبل أن نطرق الحالتين الأخريين:

• **مثال:** بين ما الذى تمثله كل من المعادلات:

(1) $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 3y + 4 = 0$

(2) $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$

(3) $x^2 - 2xy + y^2 + 3x - 3y + 2 = 0$

الحل: (1) في هذه الحالة:

$\therefore\ a = 1, b = 2, c = 1, d = e = 3, j = 4$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\delta = 4ac - b^2 = 4 \times 1 \times 1 - (2)^2 = 0$$

$$e^2 - 4cj = (3)^2 - 4(1)(4) = -7 < 0$$

إذا هذه المعادلة تمثل الفئة الخالية.

(2) في هذه الحالة:

$$\therefore\ a = 1, b = -2, c = 1, d = 3, e = -2, j = 1$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\delta = 4ac - b^2 = 0,\ \ e^4 - 4cj = 0$$

إذن هذه المعادلة تمثل مستقيمين منطبقين نوجدهما كالآتي:

$$\because\ \ y = \frac{1}{2c}\left[-(bx+e) \pm \sqrt{e^2 - 4cj}\right]$$

$$\therefore\ \ y = \frac{1}{2}\left[-(2x-2) \pm \sqrt{4 - 4 \times 1 \times 1}\right]$$

$$\therefore\ y = \frac{1}{2}\,[2(x+1) + 0] \qquad \therefore\ y = x + 1 \qquad \therefore\ (x - y + 1 = 0)$$

وبذلك حصلنا على معادلتى المستقيمين بدون أن نلجأ إلى التحليل.

(3) في هذه الحالة:

$$\therefore\ a = 1, b = -2, c = 1, d = 3, e = -3, j = 2$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\delta = 4ac - b^2 = 4(1) \times (1) - (-2)^2 = 4 - 4 = 0$$

$$e^2 - 4cj = (-3)^2 - 4(1)(2) = 1 > 0$$

إذن هذه المعادلة تمثل مستقيمين متوازيين نوجدهما من العلاقة:

$$y = \frac{1}{2c}\left[-(bx+e) \pm \sqrt{e^2 - 4cj}\right]$$

$$\therefore\ \ y = \frac{1}{2}\left[-(-2x-3) \pm 1\right] \qquad \therefore\ \ y = \frac{1}{2}\left[(2x+3) \pm 1\right]$$

$$\therefore\ 2y = (2x+3) \pm 1 \qquad \therefore\ 2y = 2x + 4 \qquad \therefore\ y = x + 2$$

$\therefore\ x - y + 2 = 0$

أو $2y = 2x + 2,\quad \therefore\ y = x + 1\quad \therefore\ x - y + 1 = 0$

∴ المعادلتان الخطيتان هما: $x - y + 1 = 0$ ، $x - y + 2 = 0$

• الحالة الثانية:

إذا كان: $\delta \neq 0$ ، $\Delta = 0$ في هذه الحالة إذا كانت الصيغة (5) مربعًا كاملاً فإنها تكون على الصورة:

$$(b^2 - 4ac)\left[x + \left(\frac{be - 2cd}{b^2 - 4ac}\right)\right]^2$$

وبالتالي فإن المعاملات الخطية (3) تكون على الصورة.

$$y = \frac{1}{2c}\left[-(bx + e) \pm \sqrt{e^2 - 4ac}\left\{x + \left(\frac{be - 2cd}{b^2 - 4ac}\right)\right\}\right] \quad ..... (8)$$

ويكون لدينا احتمالان:

(أ) $b^2 - 4ac > 0$ (أي $\delta = 4ac - b^2 < 0$). في هذه الحالة المعادلة المعطاة للمستقيمين:

$$y = \frac{1}{2c}\left[-(bx + e) + \sqrt{b^2 - 4ac}\left\{x + \left(\frac{be - 2cd}{b^2 - 4ac}\right)\right\}\right]$$

$$y = \frac{1}{2c}\left[-(bx + e) - \sqrt{b^2 - 4ac}\left\{x + \left(\frac{be - 2cd}{b^2 - 4ac}\right)\right\}\right] \quad ..... (9)$$

المتقاطعين في النقطة

$$x = -\left(\frac{be - 2cd}{b^2 - 4ac}\right),\ y = \frac{-(bx + e)}{2c} = \frac{2ae - bd}{b^2 - 4ac}$$

• مثال توضيحي: بين أن المعادلة: $x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0$

تمثل خطين مستقيمين متقاطعين وأوجد نقطة تقاطعهما.

الحل: $a = 1, b = 0, c = -1, d = 2, e = 0, j = 1$

نجد أن: $\Delta = 0, \delta = 4ac - b^2 = 4 \times 1 \times -1 - 0$

$\therefore\ \delta = -4 < 0$

∴ هذه المعادلة تمثل مستقيمين متقاطعين نوجدهما من العلاقة (8) أو العلاقتين (9)

$$\therefore\ y=\frac{1}{-2}\left[-(0+0)\pm\sqrt{4}\left\{\left(\frac{0-2\times-1\times2}{0-4\times1\times-1}\right)\right\}\right]$$

$$y=-\frac{1}{2}\left[\pm2\left\{x\times\frac{4}{4}\right\}\right] \qquad \therefore\ y=-\frac{1}{2}[\pm(2x+2)]$$

$$\therefore\ 2y\mp(x+1)=0 \qquad \therefore\ y+x+1=0,\ \ y-x-1=0$$

$$\therefore\ y+x+1=0,\quad y-x-1=0$$

∴ المستقيمين المتقاطعين هما $x-y+1=0$ ،$x+y+1=0$ ونقطة تقاطعهما هي:

$$x=-\left(\frac{be-2cd}{b^2-4ac}\right)=-(1)=-1$$

$$y=\frac{be-2cd}{b^2-4ac}=\frac{2\times1\times0-0\times2}{4}=\frac{0}{4}=0$$

$$\therefore\ (x,y)=(-1,0)$$

ويمكن إيجادهما بحل المعادلتين الخطيتين.

ملحوظة: في هذه الحالة التي فيها $\Delta=0,\ \delta<0$ يجب ملاحظة أن e^2-4cj لابد وأن يكون غير سالب إذ أنه لو كان e^2-4cj سالبًا فإن الصيغة (5) ستكون مربعًا كاملاً فقط إذا كان معامل x عددًا مركبًا وهذا مستحيل.

(ب) الاحتمال الثاني: $e^2-4cj<0$ (أي $\delta=4ac-b^2>0$)

في هذه الحالة يكون المعاملان الخطيان (8) هما:

$$y=\frac{1}{2c}\left[-(bx+e)\pm\bar{b}\sqrt{4ac-b^2}\left\{x+\left(\frac{be-2cd}{b^2-4ac}\right)\right\}\right]$$

حيث $\bar{b}=\sqrt{-1}$ ولكن ما هو نوع المستقيمات الذي يمكن أن تمثله مثل هاتين المعادلتين؟ ونترك ذلك للقارئ .. وفي النهاية إذا كان $\delta>0$ ،$\Delta=0$ فإن المعادلة تمثل نقطة. بين ما الذي تمثله المعادلة: $x^2+y^2-4x+2y+5=0$

الحل: في هذه الحالة: $a=c=1,\ b=0,\ d=-4,\ e=2,\ j=5$

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&0&-4\\0&2&2\\-4&2&10\end{vmatrix}=0$$

$$\delta=4ac-b^2=4>0$$

∴ هذه المعادلة تمثل نقطة. هذه النقطة هي مجموعة حل المعادلتين:

$$\because\ y = \frac{1}{2c}\left[-(bx+e) \pm \bar{b}\sqrt{4ac-b^2}\left\{x + \left(\frac{be-2cd}{b^2-4ac}\right)\right\}\right]$$

$$\therefore\ y = \frac{1}{2}\left[-(0+2) \pm \bar{b}\sqrt{4}\left\{x + \left(\frac{0-2\times1\times-4}{0-4\times1\times1}\right)\right\}\right]$$

$$\therefore\ y = \frac{1}{2}\left[-2 \pm 2\bar{b}\left\{\left(x - \frac{8}{4}\right)\right\}\right]$$

$$\therefore\ y = \frac{1}{2}\left[-2 \pm 2\bar{b}(x-2)\right] \qquad \therefore\ 2y = -2 \pm 2\bar{b}(x-2)$$

$\therefore\ y = -1 + \bar{b}(x-2)$ ، ومنها $y - \bar{b}x + 2\bar{b} + 1 = 0$ ،

أو $y = -1 - \bar{b}(x-2)$ ∴ ، ومنها $y + \bar{b}x - 2\bar{b} + 1 = 0$

وعلى ذلك فإن المحل الهندسي لمعادلة الدرجة الثانية هذه يكون نقطة؛ وليس من الممكن أن يمثل المعاملان الخطيان معادلتين مرتبطتين أو غير متآلفتين، وذلك حيث أن معاملات $x,\ y$ لا يمكن أن تكون متناسبة وبالرغم من أن المعاملات أعداداً مركبة إلا أنه توجد قيم حقيقية تحقق هاتين المعادلتين. هذه القيم الحقيقية هي:

$$x = -\frac{(be-2cd)}{b^2-4ac},\quad y = \frac{2ae-bd}{(b^2-4ac)}$$

$$\therefore\ x = \frac{-(0-2\times1\times-4)}{0-4\times1\times1} = \frac{-(8)}{-(4)} = 2$$

$$y = \frac{2\times1\times2-0}{0-4\times1\times1} = \frac{4}{-4} = -1$$

∴ مجموعة الحل هي $\{(2,-1)\}$ وهي نقطة حقيقية.

مما سبق نلخص النتائج التي حصلنا عليها في الجدول الآتي:

في المعادلة: $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + j = 0$

إذا كان: $\Delta = \begin{vmatrix} 2a & b & d \\ b & 2c & e \\ d & e & 2j \end{vmatrix},\ \delta = \begin{vmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{vmatrix} = 4ac - b^2,\ \gamma = e^2 - 4cj$

فإن:

	$\delta > 0$	$\delta = 0$			$\delta < 0$
		$\gamma > 0$	$\gamma = 0$	$\gamma < 0$	
$\Delta = 0$	مستقيمين متقاطعين	متوازيين	منطبقين	فئة خالية	نقطة
$\Delta \neq 0$	قطع زائد	قطع مكافئ			قطع ناقص أو دائرة

وعلى معلم المرحلة الثانوية عند تدريسه في الهندسة التحليلية أن يعلم الحالة التي $\Delta \neq 0$ حتى يواجه بعض أسئلة الطلاب نحو إذا كانت $ax^2 + by^2 + 2lx + 2ky + c = 0$ من المعلم أنها تمثل دائرة إذا كان: $a = b$

وإذا كان $a \neq b$ فما نوع معادلة المنحنى إذن ؟!

أما في حالة $\Delta = 0$ فقد أسهبنا في توضيحها ونلخص أيضًا المعاملات الخطية في كل حالة. عندما $\Delta = 0$

الحالة الأولى: إذا كانت $\delta = 0$ فإن المعاملات الخطية تعطى من العلاقة:

$$y = \frac{1}{2c}\left[-(bx+e) \pm \sqrt{e^2 - 4cj}\right]$$

الحالة الثانية: إذا كانت $\delta < 0$ فإن المعاملات الخطية تعطى من العلاقة:

$$y = \frac{1}{2c}\left[-(bx+e) \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\left\{\left(\frac{be - 2cd}{b^2 - 4ac}\right)\right\}\right]$$

الحالة الثالثة: إذا كانت $\delta > 0$ فإن المعاملات الخطية تعطى من العلاقة:

$$y = \frac{1}{2c}\left[-(bx+e) \pm \bar{b}\sqrt{4ac - b^2}\left\{\left(\frac{be - 2cd}{b^2 - 4ac}\right)\right\}\right]$$

وبذلك قد زال الالتباس والحمد لله فقد وصلنا إلى صيغ وعلاقات وقواعد عامة تخرجنا من دوائر الإحراج واليأس، وبعد فقد انتهى هذا الموضوع ولا يزال البحث مستمرًا في نقطة غامضة أخرى.

المؤلف

هندسة التحويلات

(7) تعميمات في هندسة التحويلات:

للأستاذ/ سمير محمد عثمان الحفناوي
م. ثانوي رياضيات. شرق المنصورة التعليمية 1993م

« لقد كنت حريصًا على حضور اجتماعات الموجهين الأوائل والموجهين سواء أكان ذلك في جلسات خاصة منفردة بعيدة عن الجو المدرسي أو في منازلهم أو في اجتماعات المكاتب الفنية لمدرسي الرياضيات أو في حلقات التدريب على مستوى معلم المرحلة الإعدادية الثانوية حيثما تتيح لي الظروف المناسبة لذلك في مركزي دكرنس والمنصورة - كما كنت حريصًا أيضًا على أن أسجل كل ما هو جديد من أفكار سامية في علم الرياضيات وله علاقة بمناهج الثانوي مع أساتذة الجامعات حيث كتبت عدة أبحاث في التفاضل والتكامل والقطاعات المخروطية والجبر المجرد والجبر الخطي وتاريخ الرياضيات وحياة علمائها في 5 مجلدات وهندسة التحويلات وخرج من ذلك بعدة نقاط:

(1) لكي يكون مدرس الرياضيات ناجحًا لابد وأن يربط الرياضيات بفروع المواد الدراسية الأخرى وبميادين الرياضيات ذاتها.

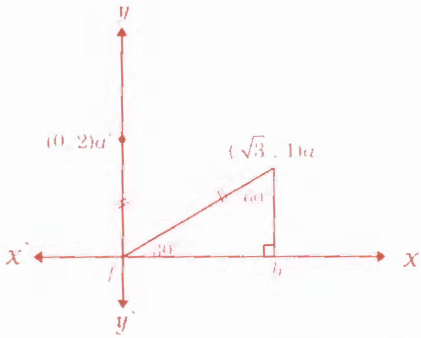
(2) المدرس الذي يضع الدروس الخصوصية هدفًا في حياته يكون عاجزًا عن العطاء ويسجن نفسه في مرحلة تعليمية واحدة.

(3) الموجه الذي يبخل على زملائه ومدرسيه بفكرة سامية أو طريقة تدريس يموت وليس له ذكرى تبقي أثره في الدنيا وليس له في الآخرة من خلاق.

في اجتماع المكتب الفني لمدرسي الرياضيات بالمنصورة في عام 1993م بمدرسة الملك الصالح الإعدادية بالمنصورة عرض الأستاذ (محمد عادل عبد السلام الكرداوي) موجه الرياضيات هذه المسألة:

• مثال (1):

أوجد صورة النقطة $a\left(\sqrt{3}, 1\right)$ بالدوران $d(f, 60^\circ)$.



وكان الحل كالآتي حسب المنهج المقرر.

من الشكل يتضح أن $\Delta\, abf$ ثلاثيني ستيني.

$\therefore (\overline{af})^2 = (\overline{ab})^2 + (\overline{bf})^2 = 1 + 3 = 4$

$\therefore \overline{af} = 2$

$\therefore (\angle afb) = 30^\circ$

$\therefore (\angle af\bar{a}) = 60^\circ$

$\therefore$ $\bar{a} \in$ محور الصادات، $\because$ الدوران يحافظ على الأبعاد بين النقط

$\therefore \overline{fa} = \overline{f\bar{a}} = 2$ وحدة طول

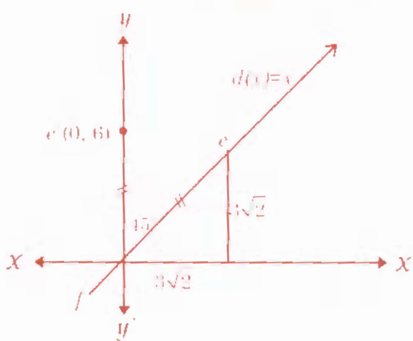
$\therefore$ $\bar{a}$ صورة a بالدوران $(0, 2) = d(f, 60^\circ)$

كما عرض أيضًا المسألة التالية:

• مثال (2):

أوجد صورة $d(x) = x$ بالدوران $d(f, 45^\circ)$ ثم أوجد صورة النقطة $e\left(3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right)$ $\in$ بيان الدالة بنفس الدوران.

ملاحظة: يسمى الراسم $d(x) = x$ راسمًا تطابقيًا لأنه يميل على المحور السيني في الاتجاه الموجب بزاوية قياسها 45°



الحـــل:

الصورة هي محور الصادات $x = 0$

صورة $e\left(3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right)$ هي $\bar{e}(0, 6)$

حيث $\overline{fe} = 6$ حيث

$\overline{fe} = \overline{f\bar{e}} = 6$ وحدة طول

وإننا بهذين المسألتين نشكر الأستاذ محمد عادل الكرداوي (موجه الرياضيات) على أفكاره المتميزة دائمًا والتي كانت محل إعجاب وتقدير دائمًا من المدرسين والموجهين .. وكنت من حسن الحظ في هذا الاجتماع حيث عرضت بعض الأخطاء

الشائعة في تدريس الدالة .. ولقد انتابتني عدة أفكار تبادرت إلى ذهني بخصوص المسألتين السابقتين في الدوران وهي:

(1) هاتان مسألتان خاصتان فقط بالمثلث الثلاثيني الستيني والمثلث قائم الزاوية متساوي الساقين.

(2) إذا كان الدوران لنقطة a مثلاً: حيث $a(x, \ y)$ في الصورة العامة بالدوران $d(m, e^{\circ})$: e قياس أي زاوية، فهل يمكن استنتاج قاعدة عامة للدوران تربط بين النقطة وصورتها.

(3) هل هناك قاعدة عامة نحصل بها على قياس زاوية الدوران إذا علمت النقطة وصورتها.

(4) كيف يمكن إيجاد صورة مستقيم بالدوران بزاوية ما.

(5) هل يمكن إثبات خواص الدوران تحليليًا.

وكل هذه أسئلة تحتاج إلى إجابة .. ويجب ملاحظة الآتي:

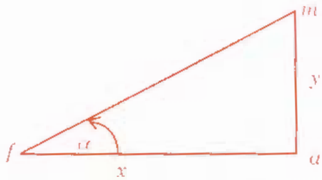
الاجتماع على مستوى المعلم وليس تلميذ المرحلة الإعدادية، ويجب أن نعطي فكرة جديدة للمعلم تكون نقطة ينطلق بها للبحث، إذًا فالتعميم يكون على مستوى المعلم وطالب المرحلة الثانوية والجامعية .. ونذكرك عزيزي القارئ كما قلت آنفًا إننا عندما نصل إلى استنتاج علاقات جديدة، فإننا نحس بنشوة الانتصار كما لو كنا في معركة فاصلة بين حق وباطل .. فإلى هناك.

(أولا): استنتاج العلاقة بين نقطة وصورتها في المستوى بعد الدوران:

سنعتبر الآن دورانًا للمحاور في نظام إحداثي في المستوى z نظامًا إحداثيًا جديدًا في المستوى $z`$ ونقطة أصله هي نفس نقطة أصل المستوى $z$ ونحصل على محوريه بدوران محوري $z$ فإذا كانت $m(x, \ y)$ نقطة في المستوى $z$ تميل على المحور السينى في الوضع القياسي للزاوية بزاوية قياسها $= \alpha$ ودارت المحاور حتى أصبحت قياس $(\angle \ mfm`) = \theta$

$\therefore \ (\angle m`bf) = \theta + \alpha$

من $\Delta \ maf$: $\cos \alpha = \dfrac{x}{r}$

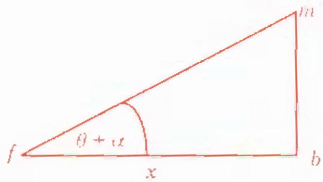


$$\therefore\ x = r\cos\alpha \qquad ......\ (1)$$

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}$$

$$\therefore\ y = r\sin\alpha \qquad ......\ (2)$$

من $\Delta m`bf$:



$$\cos(\alpha+\theta) = \frac{\bar{x}}{r}$$

$$\therefore\ \bar{x} = r\cos(\alpha+\theta)$$

$$\therefore\ \bar{x} = r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta$$

$$\sin(\alpha+\theta) = \frac{\bar{y}}{r}$$

$$\therefore\ \bar{y} = r\sin(\alpha+\theta) = r\sin\alpha\cos\theta + r\cos\alpha\sin\theta$$

والآن يكون لدينا المعادلات الأربع الآتية:

$$x = r\cos\alpha \quad .....\ (1)\ , \qquad y = r\sin\alpha\ , \quad .....\ (2)$$

$$\bar{x} = r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta \qquad .....\ (3)$$

$$\bar{y} = r\sin\alpha\cos\theta + r\cos\alpha\sin\theta \qquad .....\ (4)$$

بالتعويض من (1) ، (2) في (3) ، (4)

$$\therefore\ \bar{x} = x\cos\theta - y\sin\theta\ , \qquad \therefore\ \bar{y} = x\sin\theta + y\cos\theta\ ,$$

ويلاحظ أننا بهذا الارتباط قد حصلنا على علاقة صحيحة تتفق تحليليًا بين إحداثي النقطة وصورتها في المستوى.

$$\therefore\ \bar{x} = x\cos\theta - y\sin\theta \qquad ......\ (1)$$

$$\therefore\ \bar{y} = x\sin\theta + y\cos\theta \qquad ......\ (2)$$

وهاتان العلاقتان (5) ، (6) تربطان بين إحداثيى نقطة وصورتها في المستوى بالدوران $d(f, \theta)$ حيث f نقطة ثابتة في المستوى

دعنا الآن نوجد قيم x, y من المعادلتين السابقتين:

$$\because\ \bar{x} = x\cos\theta - y\sin\theta \qquad ......\ (1)$$

$$\therefore\ \bar{y} = x\sin\theta + y\cos\theta \qquad ......\ (2)$$

بضرب الأولى فى $\cos\theta$ والثانية فى $\sin\theta$ والجمع

$\therefore x = \bar{x} \cos\theta + \bar{y} \sin\theta$ ...... (3)

وبالتعويض في (1) $\therefore y = -\bar{x} \sin\theta + \bar{y} \cos\theta$ ...... (4)

∴ يكون لدينا الآتي:

$$\left.\begin{aligned} &\because \bar{x} = x\cos\theta - y\sin\theta \\ &\therefore \bar{y} = x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned}\right\} \quad (\text{أ})$$

$$\left.\begin{aligned} &, \because x = \bar{x}\cos\theta + \bar{y}\sin\theta \\ &\therefore y = -\bar{x}\sin\theta + \bar{y}\cos\theta \end{aligned}\right\} \quad (\text{ب})$$

وتستخدم العلاقتان (أ): إذا كان المطلوب إيجاد إحداثيي نقطة في المستوى بعد الدوران بزاوية قياسها θ بمعلومية إحداثياتها الأصلية.

وتستخدم العلاقتان (ب):

إذا كان المطلوب إيجاد صورة المعادلة: $d(x, y) = 0$ في المحاور الدورانية.

ويمكن وضع (أ) على الصورة:

$$(\text{أ}) \quad \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

كما يمكن وضع (ب) على الصورة:

$$(\text{ب}) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}.$$

وسوف نعالج الحالتين كل على حدة ببعض الأمثلة التوضيحية.

والآن نرجع إلى حل المسألتين السابقتين بواسطة الصورة (أ)

• مثال (3):

اذا كانت: $a = (\sqrt{3}, 1)$ أوجد a صورة a بالدوران $d(f, 60°)$

الحـــل:

$\because x = \sqrt{3}, \quad y = 1, \quad \theta = 60°$ $\qquad \because \bar{x} = x\cos\theta - y\sin\theta$

$$\therefore \bar{x} = \sqrt{3} \cos 60° - 1 \sin 60° = \sqrt{3} \times \frac{1}{2} - 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$\because \bar{y} = x\sin\theta + y\cos\theta$ $\qquad \therefore \bar{y} = \sqrt{3} \times \sin 60° + 1 \times \cos 60°$

$$= \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$\therefore\ \bar{x} = 0, \quad \bar{y} = 2, \qquad \therefore\ (\bar{x}, \bar{y}) = (0, 2)$

$\therefore$ $\bar{a}$ صورة $a = (0, 2)$ وهو نفس إجابة المسألة السابقة.

أظن الآن أنه يمكنك الاستغناء عن الرسم البياني وإيجاد العديد من صور النقط بالدوران $d(f, \theta)$ في المستوى.

دعنا نأخذ مثال آخر بالطريقتين السابقتين:

• مثال (4):

أوجد $\bar{a}$ صورة a بالدوران $d(f, 45°)$ إذا كانت: $a = \left(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$

الحل:

$\because\ \overline{fb} = \overline{ba}$

$\therefore$ $\Delta\, abf$ قائم الزاوية متساوي الساقين.

$\therefore\ (\angle\, afb) = (\angle\, afc) = 45°$

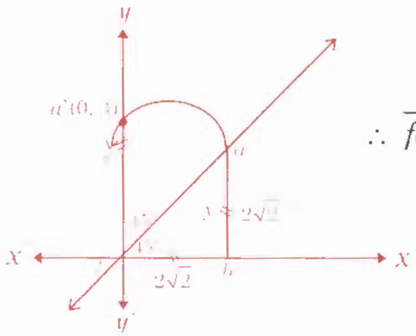
$\therefore\ \overline{fa} = \overline{ab}\,\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4$ وحدة طول

$\therefore\ \overline{fa} = \overline{f\bar{a}}$

$\overline{f\bar{a}} = 4$ وحدة طول

$\because\ (\angle\, afc) = 45°$

$\therefore\ \bar{a} = (0, 4)$



$\therefore\ \bar{a} \in \overleftrightarrow{y\bar{y}}$

ثانيًا:

$\because\ x = y = 2\sqrt{2}\,,\ \theta = 45°$

$\because\ \bar{x} = x \cos\theta - y \sin\theta$

$\therefore\ \bar{x} = 2\sqrt{2}\,\cos 45° - 2\sqrt{2}\,\sin 45° = 2\sqrt{2} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{2} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0$

$\because\ \bar{y} = x \sin\theta + y \cos\theta$

$= 2\sqrt{2} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 2 + 2 = 4$ وحدة طول

$\therefore$ $\bar{a}$ صورة a بالدوران $(0, 4) = d(f, 45°)$ وهي نفس الإجابة السابقة.

وبذلك يمكن استنتاج العديد من المعادلات التي تربط بين الإحداثيات في المستويين $\wp$ ، $\wp`$ إذا كنا نحصل على $\bar{\wp}$ من $\wp$ بدوران بزوايا قياسها $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots \theta_n,$

• مثال (5):

أوجد المعادلات التي تربط بين الإحداثيات في $\bar{\wp}$ ، $\wp$ إذا كنا نحصل على $\bar{\wp}$ من $\wp$ بدوران للمحاور بزوايا قياسها:

(أ) $\pm 45^\circ$ (ب) $\pm 30^\circ$ (جـ) $\pm 60^\circ$ (د) $\pm 90^\circ$

الحـــل:

(أ) أولاً: عندما $\theta = +45^\circ$

$$\because\ \bar{x} = x\cos\theta - y\sin\theta, \qquad \bar{y} = x\sin\theta + y\cos\theta$$

$$\therefore\ \bar{x} = x\cos 45^\circ - y\sin 45^\circ, \qquad \bar{y} = x\sin 45^\circ + y\cos 45^\circ$$

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y), \qquad \bar{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$$

ثانيًا: عندما $\theta = -45^\circ$

$$\because\ \bar{x} = x\cos\theta - y\sin\theta, \qquad \bar{y} = x\sin\theta + y\cos\theta$$

$$\therefore\ \bar{x} = x\cos(-45^\circ) - y\sin(-45^\circ), \quad \bar{y} = x\sin(-45^\circ) + y\cos(-45^\circ)$$

$$\therefore\ \bar{x} = x\cos 45^\circ + y\sin 45^\circ, \qquad \bar{y} = -x\sin 45^\circ + y\cos 45^\circ$$

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y), \qquad \bar{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x + y)$$

(ب) أولاً: عندما $\theta = +30^\circ$

$$\therefore\ \bar{x} = x\cos 30^\circ - y\sin 30^\circ, \qquad \bar{y} = x\sin 30^\circ + y\cos 30^\circ$$

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y, \qquad \bar{y} = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y$$

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,x - y), \qquad \bar{y} = \frac{1}{2}(x + \sqrt{3}\,y)$$

ثانيًا: عندما $\theta = -30^\circ$

$$\therefore\ \bar{x} = x\cos(-30^\circ) - y\sin(-30^\circ), \qquad \bar{y} = x\sin(-30^\circ) + y\cos(-30^\circ)$$

$$\therefore\ \bar{x} = x\cos 30^\circ + y\sin 30^\circ, \qquad \bar{y} = -x\sin 30^\circ + y\cos 30^\circ$$

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,x + y), \qquad \bar{y} = \frac{1}{2}(-x + \sqrt{3})$$

وهكذا يمكن استنتاج العلاقات الأخرى ومزيد من العلاقات وبمعلومية (x, y) يمكن التعويض وإيجاد $(\bar{x}, \bar{y})$

ثانيا: تركيب دورانين

لنفرض أن المحاور دارت في نظام إحداثي بزاوية مقياسها α وكانت معادلتا الدوران هما:

$$\bar{x} = x\cos\theta - y\sin\theta\,, \qquad \bar{y} = x\sin\theta + y\cos\theta$$

اتبع هذا الدوران بدوران آخر بزاوية قياسها β وكانت معادلتا الدوران هما:

$$\bar{\bar{x}} = \bar{x}\cos\beta - \bar{y}\sin\beta\,, \qquad \bar{\bar{y}} = \bar{x}\sin\beta + \bar{y}\cos\beta$$

$$\therefore\ \bar{\bar{x}} = \cos\beta\,(x\cos\theta - y\sin\theta) - \sin\beta\,(x\sin\theta - y\cos\theta)$$

$$\therefore\ \bar{\bar{x}} = x\cos\theta\cos\beta - y\sin\theta\sin\beta - x\sin\theta\sin\beta - y\cos\theta\sin\beta$$

$$\therefore\ \bar{\bar{x}} = (x\cos\theta\cos\beta - x\sin\theta\sin\beta) - (y\sin\theta\cos\beta + y\cos\theta\sin\beta)$$

$$\therefore\ \bar{\bar{x}} = x\cos(\theta+\beta) - y\sin(\theta+\beta)$$

كذلك:

$$\bar{\bar{y}} = \sin\beta\,(x\cos\theta - y\sin\theta) + \cos\beta\,(x\sin\theta - y\cos\theta)$$

$$\therefore\ \bar{\bar{y}} = x\cos\theta\sin\beta - y\sin\theta\sin\beta + x\sin\theta\cos\beta + y\cos\theta\cos\beta$$

$$\therefore\ \bar{\bar{y}} = x(\cos\theta\sin\beta - \sin\theta\sin\beta) + y\,(\sin\theta\cos\beta - \cos\theta\sin\beta)$$

$$\therefore\ \bar{\bar{y}} = x\sin(\theta+\beta) + y\sin(\theta+\beta)$$

∴ معادلتا تركيب دورانين هما:

$$\bar{\bar{x}} = x\cos(\theta+\beta) - y\sin(\theta+\beta)$$
$$\bar{\bar{y}} = x\sin(\theta+\beta) + y\sin(\theta+\beta)$$

• مثال (6):

إذا كانت $a(0,\,1)$ فأوجد $\bar{a}$ صورة a بالدوران $d(f,\,30^\circ)$ متبوعا بالدوران $d(f,\,60^\circ)$ ثم تحقق من صحة الناتج بإيجاد كل دوران على حدة.

الحل:

$$\because\ x = 0,\quad y = 1,\quad \theta = 30^\circ,\quad \beta = 60^\circ$$

$$\because\ \bar{\bar{x}} = x\cos(\theta+\beta) - y\sin(\theta+\beta)$$

$$\therefore\ \bar{\bar{x}} = 0\times\cos 90^\circ - 1\times\sin 90^\circ = -1$$

$$\because\ \bar{\bar{y}} = x\sin(\theta+\beta) + y\cos(\theta+\beta),$$

$\therefore\ \bar{\bar{a}} = (-1, 0)$ $\qquad$ $\therefore\ \bar{\bar{y}} = 0 \times \sin 90° + 1 \times \cos 90° = 0 + 0 = 0$

التحقيق: نوجد أولاً $\bar{x}, \bar{y}$ عندما $\theta = 30°$ ، $y = 1$ ، $x = 0$

سابقًا $\quad \bar{y} = \frac{1}{2}(x + \sqrt{3}\,y)$ $\qquad$ $\because\ \bar{x} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,x - y),$

$\bar{y} = \frac{1}{2}(0 + \sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\because\ \bar{x} = \frac{1}{2}(0 - 1) = -\frac{1}{2},$

$$\therefore\ \bar{a} = (\bar{x}, \bar{y}) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

ثانيًا: نوجد $\bar{\bar{y}}$ ، $\bar{\bar{x}}$ عندما $\theta = 60°$ ، $\bar{y} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\bar{x} = -\frac{1}{2}$

$$\therefore\ \bar{\bar{x}} = \bar{x}\cos\theta - \bar{y}\cos\theta = -\frac{1}{2}\sin 60° + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 60°$$

$$\therefore\ \bar{\bar{x}} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{4}{4} = -1$$

$$\because\ \bar{\bar{x}} = \bar{x}\sin\theta + \bar{y}\cos\theta = -\frac{1}{2}\sin 60° + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 60°$$

$$= -\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = 0$$

$\therefore\ \bar{\bar{a}} = (-1, 0)$ $\qquad$ (وهو المطلوب)

ونرجع ثانيًا إلى ما سبق:

• مثال (7):

في نظام إحداثي متعامد كانت إحداثيات النقطتين a, b هما $(2, 3), (-1, +1)$ على الترتيب دارت المحاور بزاوية قياسها $30°$ ، أوجد الإحداثيات الديكارتية للنقطتين a, b بالنسبة للمحاور الجديدة.

الحــل:

أولاً: $\qquad$ $\because\ a = (2, 3)$

$\because\ \bar{x} = x\cos\theta - y\sin\theta,$ $\qquad$ $\therefore\ x = 2,\ y = 3,\ \theta = 30°$

$$\therefore\ \bar{x} = 2\cos 30° - 3\sin 30° = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 \times \frac{1}{2}$$

$\therefore\ \bar{x} = (\sqrt{3} - 1.5)$ $\qquad$ فإذا أخذنا $\sqrt{3} = 1.7$ تقريبًا

$\therefore\ \bar{x} = 1.7 - 1.5 = 0.2$ تقريبًا

$\because \ \bar{y} = x \sin\theta + y \cos\theta$

$\therefore \ y = 2 \sin 30° + 3 \cos 30° = 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \ \bar{y} = 1 + \frac{5.1}{2} = \frac{2+5.1}{2} = \frac{7.1}{2} = 3.5$ تقريبًا

$\therefore \ \bar{a} = (0.2, 3.5)$ تقريبًا

ثانيًا: $\theta = 30°$ ، $y = 1$ ، $x = 1$ $\because$

$\therefore \ \bar{x} = -1 \cos 30° - 1 \sin 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

$\bar{y} = -1 \sin 30° + 1 \cos 30° = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

$\therefore \ \bar{b} = (-\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2})$

والآن يجب أن نطرح السؤال الآتي:

إذا علمت نقطة a ، $\bar{a}$ صورتها في المستوى، فهل يمكن إيجاد قياس زاوية الدوران؟

لنأخذ الأمثلة السابقة بصورة عكسية لبحث ذلك.

(4) استنتاج قياس زاوية الدوران بمعلومية النقطة وصورتها:

• مثال (8):

إذا كانت : $a = \left(\sqrt{3}, 1\right)$ ، $\bar{a} = (0, 2)$ صورة a بالدوران بزاوية قياسها θ في المستوى، أوجد قياس زاوية الدوران $(\angle a f \bar{a})$

الحـل:

$\because \ x = \sqrt{3}, \ y = 1, \ \bar{x} = 0$ $\qquad$ $\because \ \bar{x} = x \cos\theta - y \sin\theta$

$\therefore \ 0 = \sqrt{3} \cos\theta - \sin\theta$

$\therefore \ \sqrt{3} \cos\theta = \sin\theta$ $\qquad$ بالقسمة على $\cos\theta$ $\qquad$ $\therefore \ \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \sqrt{3}$

$\therefore \ \tan\theta = \sqrt{3}$ $\qquad$ $\therefore \ \theta = \tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)$

$\therefore \ \theta = 60°$ $\qquad$ $\therefore \ (\angle a f \bar{a}) = 60°$

• مثال (9):

إذا كانت : $\bar{a} = (0, 6)$ ، $a = \left(3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right)$: $\bar{a}$ صورة a بالدوران $d(f, \theta)$ في المستوى $\wp$ أوجد $(\angle af\bar{a})$

الحـــل:

$\because \bar{x} = x\cos\theta - y\sin\theta$ ، $\because \bar{x} = 0, \quad x = y = 3\sqrt{2}$

$\therefore 0 = 3\sqrt{2}\cos\theta - 3\sqrt{2}\sin\theta$

$\therefore \cos\theta - \sin\theta = 0$ $\qquad \therefore \cos\theta = \sin\theta$

$\therefore \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = 1$ $\qquad \therefore \tan\theta = 1$

$\therefore \theta = \tan^{-1}(1)$ $\qquad \therefore (\angle af\bar{a}) = 45^\circ$

• مثال (10):

إذا كانت : $a = (0, 1)$، وكانت $\bar{a}$ صورة a بالدوران $d(f, \theta)$ حيث $\bar{a} = (-1, 0)$ أوجد قياس $(\angle af\bar{a})$

الحـــل:

$\because \bar{x} = x\cos\theta - y\sin\theta$ $\qquad \because \bar{x} = -1, \; x = 0, \; y = 1$

$\therefore -1 = -\sin\theta$ $\qquad \therefore \sin\theta = 1$ $\qquad \therefore \theta = \sin^{-1}(1)$

$\therefore (\angle af\bar{a}) = 90^\circ$

لقد لاحظنا أن الأمثلة الواردة في الصفحة السابقة قد تكون سهلة نسبيًا، ولكن دعنا نطرح السؤال الآتي:

• مثال (11):

إذا كانت : $a = (-1, 1)$، وكانت $\bar{a}$ صورة a بالدوران $d(f, \theta)$ حيث $\bar{a} = \left(-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$ أوجد قياس زاوية الدوران

الحـــل:

$\because \bar{x} = x\cos\theta - y\sin\theta$ ، $\because \bar{x} = -\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}, \; y = -1, \; y = 1$

$\therefore -\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} = -1\cos\theta - 1\sin\theta$

$$\therefore\ -\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) = -1\cos\theta - 1\sin\theta$$

بمقارنة المعاملات في الطرفين $\therefore -\cos 30° - \sin 30° = -\cos\theta - \sin\theta$

$\therefore \cos 30° = \cos\theta$ $\qquad \therefore \theta = 30°$

∴ قياس زاوية الدوران = $30°$ ، ويمكن التعويض في المعادلة:

$$\bar{y} = x\sin\theta + y\cos\theta$$

وقد تكون الطريقة السابقة في مثال (11) غير منطقية عند معظم الباحثين، ويريدون الوصول للحل من أقرب طريقة ولا سيما إذا كانت المعادلتان على الصورة:

$$\bar{x} = x\cos\theta - y\sin\theta$$

$\bar{y} = x\sin\theta + y\cos\theta$ ، عندما $\bar{x} \neq 0,\ \bar{y} \neq 0,\ x \neq 0,\ y \neq 0$

$$\because\ \bar{x} = x\cos\theta - y\sin\theta \quad ......(1)$$

$$\bar{y} = x\sin\theta + y\cos\theta \quad ......(2)$$

من (1) $\therefore x\cos\theta = \bar{x} + y\sin\theta \quad ......(3)$

بضرب المعادلة رقم (2) في x

$$\therefore x\bar{y} = x^2\sin\theta + y\,(x\cos\theta) \quad ......(4)$$

بالتعويض من (3) في (4)

$$\therefore x\bar{y} = x^2\sin\theta + y(\bar{x} + y\sin\theta)$$

$$\therefore x\bar{y} = x^2\sin\theta + \bar{x}y + y^2\sin\theta$$

$$\therefore x\bar{y} - \bar{x}y = \sin\theta\,(x^2 + y^2) \qquad \therefore \sin\theta = \frac{x\bar{y} - \bar{x}y}{x^2 + y^2}$$

$$\therefore \theta = \sin^{-1}\left(\frac{x\bar{y} - \bar{x}y}{x^2 + y^2}\right) \quad (\text{أ})$$

ومن ناحية أخرى:

من (1) $y\sin\theta = x\cos\theta - \bar{x} \quad .....(5)$

بضرب المعادلة رقم (2) في y

$$\therefore y\bar{y} = x(y\sin\theta) + y^2\cos\theta$$

$$\therefore y\bar{y} = x(x\cos\theta - \bar{x}) + y^2\cos\theta$$

$$\therefore\ y\bar{y} = x^2 \cos\theta - x\bar{x} + y^2 \cos\theta$$

$$\therefore\ x\bar{x} + y\bar{y} = \cos\theta\,(x^2 + y^2) \qquad \therefore\ \cos\theta = \frac{x\bar{x} + y\bar{y}}{x^2 + y^2}$$

$$\therefore\ \theta = \cos^{-1}\left(\frac{x\bar{x} + y\bar{y}}{x^2 + y^2}\right) \qquad (\text{ب})$$

وبإحدى العلاقتين (أ) أو (ب) يمكن استنتاج قياس زاوية الدوران بين النقطة وصورتها في المستوى ويبدو أو العلاقة (ب) تكون أكثر ثباتًا في الذهن من العلاقة (أ)

« إن الاستنتاجات السابقة تشعرني أنا شخصيًا بمتعة وغذاء روحي .. لأنني لم أكن أتصور استنتاجهما ، وإنما جاءت الفكرة لي وأنا أكتب البحث .. ألم تر أن الموضوع شائق !! » .

• مثال (12):

إذا كان $\bar{a} = \left(-\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$ ، $a = (-1, 1)$، حيث $\bar{a}$ صورة a بالدوران $d(f, \theta)$ أوجد قياس زاوية الدوران $(\angle af\bar{a})$

الحل:

$$\because\ x = -1,\quad \bar{x} = -\frac{\sqrt{3}+1}{2},\quad y = 1,\quad \bar{y} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\because\ \theta = \cos^{-1}\frac{x\bar{x} + y\bar{y}}{x^2 + y^2}$$

$$\therefore\ x\bar{x} + y\bar{y} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\therefore\ x^2 + y^2 = 1 + 1 = 2$$

$$\therefore\ \theta = \cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \therefore\ \theta = 30^\circ$$