الباب الثانى
التفكير الابتكاري في الرياضيات

الفصل الأول
فوق مستوى الطموح

الفصل الثانى
الانطلاق في سماء الرياضيات

الفصل الأول
فوق مستوى الطموح

(1) الابتكارات في الهندسة النظرية:

للأستاذ/ السيد جمعة محمد سالم مفتش أول الرياضيات 1960م.

قد يكون الشكل الهندسي للنظرية أو التمرين مثيرًا لأفكار كثيرة وتمارين متعددة ترتبط بهذا الشكل، وتبرز أثناء المحاولات التي يقوم بها المدرس أو الطالب أثناء شرح النظرية أو حل التمرين، والتي يجب الإلمام بحلولها أو الاستفادة منها، وبذلك يتفتق ذهن الطالب، وتربى فيه الملكة الرياضية والتفكير السليم.

ولإيضاح ذلك سأذكر المثال الآتي:

• **تمرين:**

المطلوب إيجاد قيمة نقطة n داخل المثلث abc بحيث يكون: $\overline{na} + \overline{nb} + \overline{nc}$ أصغر ما يمكن.

وقد اعترض طريقي أثناء التفكير في حل هذا التمرين عدة تمارين يرتبط بعضها ببعض سأذكرها فيما يلي:

$\Delta\, abc$ رسمت على أضلاعه المثلثات متساوية الأضلاع cae ، bcd ، abf

والمطلوب إثبات أن:

(1) $ad = be = cf$

(2) كل اثنين من المستقيمات الستة المتفرعة من n يحصران بينهما زاوية قياسها = $60°$

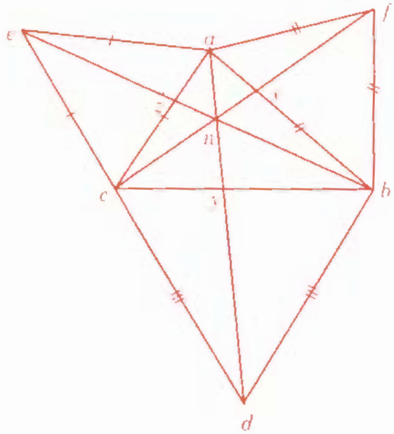
(3) الدوائر cae ، bcd ، abf تمر كلها بنقطة n.

(4) $ne = na + ac$ ، $nf = na + nb$ ، $nd = nb + nc$

(5) فى الشكل الرباعي غير الدائري مساحة المستطيل المكون من القطرين أكبر من مجموع مساحتي المستطيلين المكون كل منهما من ضلعين متقابلين.

(6) $\overline{na} + \overline{nb} + \overline{nc}$ نهاية صغرى.

اولا:



المعطيات: $\Delta\ abc$ رسم خارجه المثلثات

متساوية الأضلاع ace ، bcd ، abf

المطلوب: إثبات أن: $\overline{ad} = \overline{be} = \overline{cf}$

البرهان: $\Delta\ abd \equiv \Delta\ fbc$

(ضلعان وزاوية محصورة)

ومنه ينتج أن: $\overline{ad} = \overline{cf}$

وبالمثل: $\Delta\ acf \equiv \Delta\ aeb$

وهو المطلوب $\therefore\ \overline{ad} = \overline{be} = \overline{cf}$

ثانيا:

المطلوب: إثبات أن:

$$(\angle\ anf) = (\angle\ fnb) = (\angle\ bnd) = (\angle\ dnc) = (\angle\ cne) = (\angle\ ena) = 60^\circ$$

البرهان: من تطابق $\Delta\ abd, \Delta\ fbc$ ينتج أن: $(\angle\ adb) = (\angle\ fcb)$

وهما مرسومتان على القاعدة المشتركة $\overline{bn}$ وفي جهة واحدة منها.

$\therefore\ nbdc$ رباعي دائري

وبالمثل يمكن إثبات أن: $anbf$ رباعي دائري، $ance$

$\therefore\ (\angle\ bnd) = (\angle\ bcd) = 60^\circ,\qquad (\angle\ cnd) = (\angle\ cbd) = 60^\circ$

$(\angle\ anf) = (\angle\ abf) = 60^\circ,\qquad (\angle\ bnf) = (\angle\ baf) = 60^\circ$

$(\angle\ ane) = (\angle\ ace) = 60^\circ,\qquad (\angle\ cne) = (\angle\ cae) = 60^\circ$

ثالثا:

المطلوب: إثبات أن: abf, bcd, ace تتقاطع فى نقطة n

البرهان: يتضح مما تقدم أن الدوائر abf, bcd, ace كلها تمر بنقطة n

---

رابعًا:

المطلوب: إثبات أن: $nd = nb + nc$ ، $ne = nc + na$ ، $nf = na + nb$

في الشكل الرباعي الدائري $bncd$

البرهان: $nd \,.\, bc = bn \,.\, cd + bd \,.\, cn$ (نظرية بطليموس)

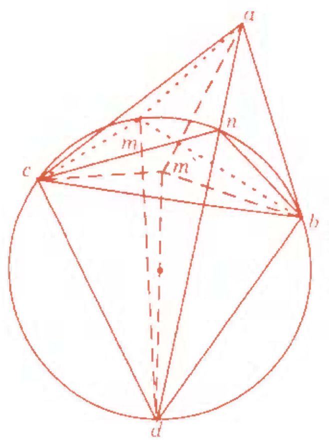
$\because bc = cd = bd \qquad \therefore nd = nb + nc$

وبالمثل يمكن إثبات أن:

$\overline{ne} = \overline{na} + \overline{nc} \qquad nf = na + nb \,,$

خامسا:

والآن نعود إلى التمرين الأصلى الذى تفرع أثناء التفكير فى حله، وليس هذا معناه أن التمارين السابق المذكورة ضرورية كلها لحل التمرين الأصلى، إنما هي قد برزت أثناء التفكير. ويمكن أن يكون كل منها تمرينًا قائمًا بذاته وفيما يلى حل التمرين الأصلى.



المعطيات: $\Delta\, abc$

المطلوب: إيجاد نقطة داخله مثل n بحيث يكون

$\overline{na} + \overline{nb} + \overline{nc}$ أصغر ما يمكن

العمل: نرسم $\Delta\, bcd$ متساوي الأضلاع

ثم نصل $\overrightarrow{ad}$ فيقطع الدائرة

التى خارجه في n فتكون

هي النقطة المطلوبة.

البرهان: مما تقدم ينتج أن: $\overline{ad} = \overline{na} + \overline{nb} + \overline{nc}$ ولكي نثبت أن:

$\overline{na} + \overline{nb} + \overline{nc}$ أصغر ما يمكن نفرض أن نقطة أخرى مثل m داخل $\Delta\, abc$ ،

m هذه إما أن تقع على الدائرة bcd أو لا تقع عليه فإن وقعت عليه كان

$md = mb + mc$

$(na + nb + nc) < ad < ma + mb + mc = ma + md$

أي أن:

$$\overline{na} + \overline{nb} + \overline{nc} < \overline{ma} + \overline{mb} + \overline{mc}$$

وإذا كانت $\overline{m}$ غير واقعة على الدائرة فإن الشكل $b\,m\,cd$ رباعي غير دائري

$$\therefore\ \overline{bm} \times \overline{cd} + \overline{cm} \, . \, \overline{bd} > \overline{dm} \, . \, \overline{bc}$$

$$\because\ \overline{cd} = \overline{bd} = \overline{bc} \qquad \therefore\ \overline{bm} + \overline{cm} > \overline{dm}$$

$$\therefore\ \overline{bm} + \overline{cm} + \overline{am} > \overline{dm} + \overline{am}$$

∴ من باب أولى يكون:

$\overline{bm} + \overline{cm} + \overline{am} > \overline{ad}$ لأن: $\overline{dm} + \overline{am} > \overline{ad}$

أى: أكبر من: $\overline{na} + \overline{nb} + \overline{nc}$

أى أن: $na + nb + nc < \overline{ma} + \overline{mb} + \overline{mc}$

وبالمثل يمكن إثبات أن: $\overline{na} + \overline{nb} + \overline{nc}$ أصغر من مجموع أبعاد أي نقطة أخرى داخل المثلث abc ∴ n هى النقطة المطلوبة (وهو المطلوب)

وأرجو أن يفهم أنه يمكن استنتاج تمارين أخرى غير السابقة، لها علاقة بالشكل، بل إن الحل السابق ليس هو الوحيد لهذا التمرين، فربما يكون هناك حلول أخرى أسهل أو أصعب من الحل المذكور.

(2) الكشف عما يجول بخاطر الممتحن:

للأستاذ/ السيد جمعة محمد سالم مفتش أول الرياضيات 1960م .

هذا ملخص موجز للباب من مؤلف (سوبر) نرجو أن يستفيد منه واضعو الأسئلة عندما يهتدوا بلمحاته المثيرة. وسيرى القارئ أن المؤلف رياضي خصب الخيال، وكتابه الذي ننقل منه يمس موضوعات رياضية طريفة يقدمها في أسلوب أدبي أخاذ. والمؤلف أستاذ بجامعة كنتربري بنيوزيلندة، وقد اشتغل بين 1948 - 1950م في جمهورية غانا كرئيس لقسم الرياضيات بجامعاتها. وله عدا هذا الكتاب مؤلفات أخرى منها كتاب أكثر رواجًا وهو Math Delight وهو يتناول الرياضيات الابتدائية بطريقة سهلة ممتعة تقرأه وكأنك تقرأ رواية بوليسية مشوقة.

بعض الممتحنين يهتمون باختبار مقدرة الطالب في الشغل الروتيني في العمليات. هل يعرف مثلاً ـ جدول الضرب؟ هل يجيد ـ مثلاً ـ استخدام اللوغاريتمات ؟ ـ صحيح من الضروري اختبار مثل هذه القدرات الروتينية، ولكني منذ صباي كنت أعتبر مثل هذه الاختبارات سخيفة. فهي محببة عند المدرس الضعيف وما على مدرس الفصل ليمرن تلاميذه فيها إلا أن يعطي تلاميذه التمارين جميعًا من 1 إلى 50

ولكن هناك قلة من الممتحنين يريدون تشجيع المدرس الراغب في تبصير تلاميذه لا بالحقائق بل بالإدراك والشعور بالموضوع الذي يدرسه. فالممتحن يريد أن يختبر الموضوع كله ومعه تخيل الطالب وقدرته على الإبداع فهو يتوخى في أسئلته قياس هذه النواحي. ويعترض بعض المدرسين قائلين لمثل هذا الممتحن أنه غير عادل معهم. فالتلاميذ لا يمكن إعدادهم لمثل هذه الامتحانات التى لا يمكن التنبؤ بها. وردي عليهم هو أن أسألهم بدوري أيمكن التنبؤ بالموقعة الحربية؟ وإذن فهل من المستحيل تدريب قادة حربيين؟

إن تدريب الضباط يتم ـ أو قل يجب أن يتم ـ على مبادئ عامة تشتمل وتنطبق على كل المواقع الحربية. ثم إنماء وتشجيع التصرف بوضع الطالب في مجموعة من المواقف غير المتوقعة ويطالب بمعالجتها. ومثل هذا يجب أن نفعله في تدريب الرياضي. فالامتحان والموقعة شيئان يشتركان في عوامل كثيرة ... خذ مثلاً :

$$127x + 341y = 274, \qquad 218x + 73y = 111$$

والمطلوب حل المعادلتين:

هذا سؤال روتيني بحت وواضعه لا يبغي أكثر من اختبار قدرة الطالب على إتقان عمليات حسابية.

يقابل هذه المسألة التالية :

$$6751x + 3249y = 26751, \qquad 3249x + 6751y = 23249$$

والمطلوب حل المعادلتين

إن هذا السؤال فيه تنظيم واضح فهو على نمط النموذج المماثل $\begin{pmatrix} x & \cdot \\ \cdot & x \end{pmatrix}$ فالمقداران فى الطرف الأيمن يتبادلان بوضع x ، y كل مكان الآخر . وعرضهما على الطالب المفكر يوحى بالفكرة الواجب الاستعانة بها فى الحل .

فبالجمع نحصل على : (1) ...... $10000x + 10000y = 50000$

وبالطرح تحصل على : (2) ...... $2502x - 2502y = 2502$

من (1) : $x + y = 5$ ، من (2) : $x - y = 1$

$\therefore x = 3$ ، $y = 2$

..... هذه مسالة تسر الأطفال المبتدئين . أما للطلبة الأرقى فيجب أن نستوحى الطبيعة فى مسائلنا .. إن الباحث فى تركيب الذرة يتوقع أن يقوده المزيد من البحث إلى المزيد من البساطة والمزيد من الدقة فى التنظيم .

..... إن السؤال فى الامتحان الجيد لا يمكن أن يخلو من هدف . فيجب أن يحتوى على تركيب ظريف أو نتيجة رائعة ، وليس من السهل تكوين مسألة جيدة . ولكن الباحث الرياضى يمكنه أن يتناول نقطة فى بحثه وجعلها نواة لمسألة طريفة .

منذ بضع سنوات جاء لى طالب بمسألة وجدها عويصة الحل وهى :

إذا كان : $\dfrac{ac - b^2}{a - 2b + c} = \dfrac{bd - c^2}{b - 2c + d}$ فبرهن أن كلاً من النسبتين = $\dfrac{ad - bc}{a - b - c + d}$

هذا سؤال محدد الشكل جدًا . وواضح أن حل مثل هذا السؤال بالحسابات العويصة أمر عديم المغزى ، وإن كان من الممكن الوصول لمثل هذا الحل بهذه الطرق البسيطة . إلا إن ذلك لا يصل للب السؤال وروحه. وقد شاقني سؤال آخر يرتبط به. وهو كيف وصل الممتحن لمثل هذا السؤال؟ قلت إن بالسؤال تنظيمًا شاملاً تتلخص مظاهره فيما يلي أن: $ac - b^2 = 0$ هو شرط كون a,b,c في توال هندسي

وبسط النسبة الأولى يحتوي على $(ac - b^2)$ أما مقام الأول ففيه $(a - 2b + c)$ وهي مرتبط بالمتوالية العددية فإن $a + c = 2b$ إذا كان a,b,c في توال عددي .. وأخيرًا كل من الكسور الثلاثة واضح التنظيم بالنسبة لما تدخله في حروف فلو أخذت الأول مثلاً لوجدت a,c عاملي الحد الأول في البسط ومجموعي الحدين الأول والثالث في المقام. وشبيه بذلك عن b^2. ويمكن أن تقارب هذا التنظيم وتكشف ما يماثله في الكسرين الآخرين.

نخرج من ذلك بأن اختراع مسألة كهذه مستحيل تقريبًا. فهي من النوع الذي لا يُخترع بل أن مكتشفها يقع عليها عندما يبحث عن شرط ما خلال بحث رياضي.

كيف إذن صيغت المسألة. نجيب عن ذلك. افرض كلاً من النسبتين المتساويتين تساوي k والمطلوب مساواة النسبة الثالثة بها.

في المعادلة: $\frac{ac - b^2}{a - 2b + c} = k$ ..... (1) بالضرب التبادلي.

ينتج أن : $ac - k(a + c) = b^2 - 2bk$

وواضح أن كلاً من الطرفين ينقصه k^2 لنحصل على تنظيم أجمل أضف إذن k^2 للطرفين ثم حلل.

$\therefore\ (a - k)(c - k) = (b - k)^2$ وهي نتيجة من (1)

نترجمها بأن: $a - k,\ b - k,\ c - k$ ثلاثة مقادير في توال هندسي، ها قد اتضح لنا الطريق. فلنفعل مثل ذلك مع الكسر الثاني:

$$(2)\ .....\quad \frac{bd - c^2}{b - 2c + d} = k$$

فنستنتج أن: $(b - k)(d - k) = (c - k)^2$

وترجمتها أن: $b - k,\ c - k,\ d - k$ في توالٍ هندسي

$\therefore\ a - k,\ b - k,\ c - k,\ d - k$ تكون متوالية هندسية.

$$\therefore\ (a - k)(d - k) = (b - k)(c - k)$$

ومنها نصل بعد الضرب وحذف k^2 إلى : $\frac{ad - bc}{a - b - c + d} = k$

لقد كون الممتحن مسألته من الوضع الآتي:

إذا أخذنا أعدادًا أربعة a,b,c,d فما شرط ارتباطها بحيث لو طرح من كل منها

عدد معين نكون من البواقي الأربعة متوالية هندسية؟ تخرج من هذه المسالة لنقرر تقريرًا هامًا هو أنه "حيث نجد تنظيمًا سنجد معنى". ومغزى ذلك أنه حيثما تقع على تنظيم في مقدار رياضي علينا أن نتحرى وراء أصله ومسبباته. وليس بكاف أن نكتشف نظرية ونتمكن من برهنتها بحسابات عديمة الشكل والمغزى. إنما يجب أن نفهم ما كشفناه.

إن كشف مغزى معادلة جبرية قد يستغرق وقتًا طويلاً. وقد علمتني التجربة أن مهاجمة أمثال هذه المسائل قد لا يثمر قبل مضي ربما يوم أو أسبوع أو شهر حتى تواتيني فكرة. إلا إذا أوحينا أمامها بفكرة تقود للسير في الاتجاه السليم.

... لنأخذ كمثال آخر لبحثنا المسألة الآتية من جبر "هول" و "نايت" (العالي)

إذا كانت: $a = tb + yc,\ \ b = xc + ta,\ \ c = ya + xb$

برهن أن:
$$\frac{a^2}{1-x^2} = \frac{b^2}{1-y^2} = \frac{c^2}{1-t^2}$$

هذا تمرين جبري سهل ولكننا هنا نبحث كيف أنشأه واضعه.

إن لم تكن هناك مصادفة عجيبة فإن السيدين هول ونايت كانا يبحثان حساب مثلثات لا جبر عند وضع هذا السؤال .. فثلاثة مجاهيل تتحدد بثلاث معادلات لا باثنتين فلنحاول بعض حساب المثلثات.

... فإذا علم من المثلث abc أضلاعه الثلاثة $\bar{c}$ ، $\bar{b}$ ، $\bar{a}$ فإن تحديد الزوايا a,b,c يستلزم ثلاث معادلات ولكن حساب المثلثات يعطينا علاقة $\bar{a} = \bar{c}\cos b + \bar{b}\cos c$ ، ومثلها:

$$\cos a = \frac{\bar{b}^2 + \bar{c}^2 - \bar{a}^2}{2\bar{b}\bar{c}} \qquad ..... (2)$$

$$\frac{\bar{a}}{\sin a} = \frac{\bar{b}}{\sin b} = \frac{\bar{c}}{\sin c} \qquad ..... (3)$$

فإذا رمزنا بالرمز: $\cos a = x, \cos b = y, \cos c = t$ فإن:

$$\sin^2 a = 1 - x^2\ ,\quad \sin^2 b = 1 - y^2\ ,\quad \sin^2 c = 1 - t^2$$

وهنا سنجد تفسير سؤال السيدين هول ونايت إذا وضعنا $a = \bar{a}$ ، $b = \bar{b}$ ، $c = \bar{c}$ فالفرض هي الثلاث معادلات في (1) والمطلب هما العلاقتان الموجودتان فى (3) بعد رفعهما للقوى الثانية.

(3) الرياضة متعة وغذاء:

للأستاذ/ محمد رشاد عبد المجيد مفتش الرياضيات بالتعليم الثانوي

حينما نتجاذب أطراف الحديث عن طرق التفكير والإبداع في علم الرياضيات ولا سيما حينما نعالج موضوعًا أو مسألة بفكرة جديدة بعيدة عن معظم أذهان الآخرين فإننا نحس بنشوة الانتصار، كما لو كنا في معركة فاصلة بين حق وباطل، وتغمرنا السعادة ونحس بمتعة ذهنية وإشباع علمي وغذاء روحي ...

هكذا فقد قدمت بإحساس عن هذه المسألة التي بعثها الأستاذ محمد رشاد عبد المجيد إلى أحد المدرسين الأوائل، وإنني أتصور كما لو كنت جالسًا معهم.. فإنني احترم الجلسات العلمية وأهل العلم والعلماء.

• التمرين:

$\Delta\, abc$ فيه: $\cot a + \cot b + \cot c = \sqrt{3}$ أثبت أنه متساوي الأضلاع.

الحل:

$\because (\angle a) + (\angle b) + (\angle c) = 180°$ $\quad\therefore (\angle a) + (\angle b) = 180° - (\angle c)$

$\therefore \tan(a + b) = -\tan c$

$\therefore \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} = -\tan c$ بضرب الطرفين فى الوسطين

$\therefore \tan a + \tan b + \tan c = \tan a \tan b \tan c$

وبالضرب في $\cot a \cot b \cot c$ يكون:

$\cot b \cot c + \cot c \cot a + \cot a \cot b = 1 \qquad ...... (1)$

$(\cot a + \cot b + \cot c)^2 = 3$ من الفرض

$\therefore \cot^2 a + \cot^2 b + \cot^2 c + 2\cot a \cot b + 2\cot b \cot c + 2\cot a \cot c = 3$

$...... (2)$

وبضرب (1) فى 6 وبضرب (2) فى 2 والطرح

$$\therefore\ 2\cot^2 a + 2\cot^2 b + 2\cot^2 c - 2\cot a\cot b - 2\cot b\cot c - 2\cot a\cot c = 0$$

$$\therefore\ (\cot^2 a - 2\cot a\cot b - \cot^2 b) + (\cot^2 b - 2\cot b\cot c - \cot^2 c) + (\cot^2 c - 2\cot c\cot a + \cot^2 a) = 0$$

$$\therefore\ (\cot a - \cot b)^2 + (\cot b - \cot c)^2 + (\cot c - \cot a)^2 = 0$$

ولا يكون مجموع هذه المربعات مساويًا للصفر إلا إذا كان كل منها = صفرًا على حدة.

$$\therefore\ \cot a - \cot b = 0\ ,\ \cot b - \cot c = 0\ ,\ \cot c - \cot a = 0$$

ومنها: $\cot a = \cot b$

$\therefore\ (\angle a) = (\angle b)$, $\cot b = \cot c$ $\therefore\ (\angle a) = (\angle b) = (\angle c)$

$\therefore\ \Delta\, abc$ متساوي الأضلاع.

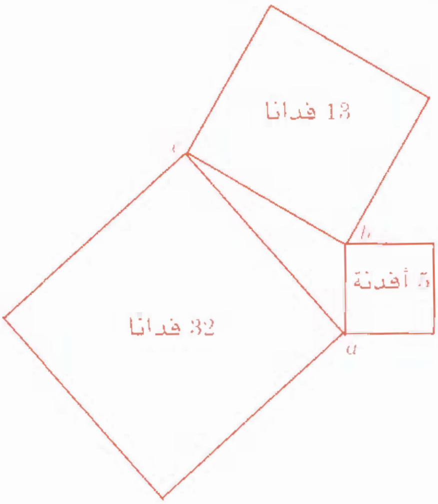
(4) حل طريف:

للأستاذ / راغب إسكندر رئيس قسم الرياضة بكلية المعلمين 1956م.

• التمرين:

قطعة أرض abc محصورة بين ثلاثة مربعات مساحتها 5 أفدنة، 13 فدانا، 32 فدانا على الترتيب. المطلوب: إيجاد مساحة $\Delta\, abc$

تمهيد الحل:



$\because (ab)^2 = 5, \quad \therefore ab = \sqrt{5}$

$\because (bc)^2 = 13, \quad \therefore bc = \sqrt{13}$

$\because (ac)^2 = 32, \quad \therefore ac = \sqrt{32}$

$\because 5 = 4 + 1$

$\therefore (\sqrt{5}\,)^2 = (2)^2 + (1)^2$

$\because 13 = 9 + 4,$

$\therefore (\sqrt{13}\,)^2 = (3)^2 + (2)^2$

$\because 32 = 16 + 16$

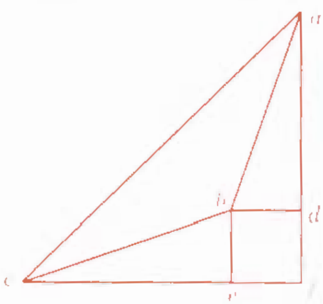
$\therefore (\sqrt{32}\,)^2 = (4)^2 + (4)^2$

إذا اعتبرنا أن طول ضلع المربع الذى مساحته فدان واحد وحدة للطول فإن:

$ab = \sqrt{5}\,,\ \ bc = \sqrt{13}\,,\ \ ac = \sqrt{32}$

يمكن رسم الشكل الموضح هنا وفيه:

$ad = 2,\ \ bd = 1,\ \ be = 2,\ \ ce = 3$



فيكون: $cf = 4$، $af = 4$ من الوحدات

$\therefore ab = \sqrt{(ad)^2 + (bd)^2} = \sqrt{5}$ وحدة طول

$\therefore bc = \sqrt{(be)^2 + (ce)^2} = \sqrt{13}$ وحدة طول

$\therefore ac = \sqrt{(af)^2 + (fc)^2} = \sqrt{32}$ وحدة طول

أى أن: $\Delta\, abc$ هو المثلث المفروض فى المسألة

ومن الرسم يمكن إيجاد مساحة abc كما يلي:

مساحة $\Delta\, cba$ =

مساحة $\Delta\, cfa$ − [مساحة $\Delta\, dba$ + مساحة $\Delta\, ceb$ + مساحة المستطيل $efdb$]

$$= \frac{4\times 4}{2} - \left(\frac{2\times 1}{2} + \frac{2\times 3}{2} + 1\times 2\right) = 8 - 6 = 2$$ فدان

وليس من العسير الوصول لنفس الجواب عن طريق إحدى النظريتين الخاصتين بطول الضلع المقابل للزاوية الحادة أو المنفرجة ومنه نحصل على أحد ارتفاعات المثلث.

(5) استغلال الميكانيكا في برهان نظرية فيثاغورث:

للأستاذ/ محمد محمد مصطفى المدرس بالمعهد العلمي 1959م.

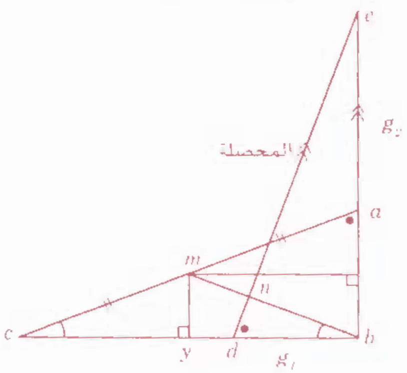
الحل:

العمل: نرسم $\overrightarrow{ba}$ ، ونأخذ $e \in \overrightarrow{ba}$ بحيث $\overline{be} = \overline{bc}$ ثم نأخذ نقطة $d \in \overline{bc}$ بحيث $\overline{bd} = \overline{ba}$ ، وننصف $\overline{ac}$ فى m ثم نسقط الأعمدة $\overrightarrow{my}, \overrightarrow{mx}$ على $\overline{bc}, \overline{ab}$ على الترتيب، نصل $\overline{mb}$ فيقطع $\overline{de}$ فى نقطة n .

البرهان: $\because$ $\overline{bm}$ متوسط فى $\Delta\, abc$ القائم الزاوية فى a

$$\therefore\ \overline{bm} = \frac{1}{2}\,\overline{ac} = \overline{am}$$

$$\therefore\ (\angle\, mab) = (\angle\, mba)$$



لكن $(\angle\, mba)$ تتمم $(\angle\, mbd)$

$\therefore$ $(\angle\, mab)$ تتمم $(\angle\, mbd)$

$\therefore$ $\Delta\, bac \equiv \Delta\, bde$ وينتج أن: $\overline{ac} = \overline{ed}$

، $(\angle\, bac) = (\angle\, dbe)$

، $(\angle\, bde)$ تتمم $(\angle\, mbd)$

أيضًا $(\angle\, bnd) = 90°$

أى أن: $\overline{de} \perp \overline{bm}$ فى نقطة n

$\therefore$ $\overline{ab} \,//\, \overline{my}$ ، $\overrightarrow{my}$ ينصف $\overline{ac}$ فى m

$$\therefore\ my = \frac{1}{2}\, ab$$

وبالمثل: $mx = \frac{1}{2}\, bc$

نفرض أن: $\overline{be}$ ، $\overline{db}$ يمثلان القوتين ϑ_2 ، ϑ_1 تمثيلاً تامًا.

$\therefore$ محصلتهما تؤثر فى نقطة b ويمثلها $\overline{de}$ مقدارًا واتجاهًا.

بأخذ العزوم حول نقطة m:

عزم القوة ϑ_1 حول m =

$$\overline{db} \times \overline{my} = \overline{ab} \times \frac{1}{2}\,\overline{ab} = \frac{1}{2}\,(\overline{ab})^2$$

عزم القوة ϑ_2 حول m =

$$\overline{db} \times \overline{mx} = \overline{bc} \times \frac{1}{2}\,\overline{bc} = \frac{1}{2}(\overline{bc})^2$$

$\because$ $\overline{de} \perp \overline{bm}$ $\because$ المحصلة تعمل عند نقطة m ، وتوازي $\overline{de}$

$\therefore$ $\overline{bm} \perp$ خط عمل المحصلة المار بنقطة b

$\therefore$ $\overline{bm}$ هو ذراع عزم المحصلة حول نقطة m

$\therefore$ عزم المحصلة حول m =

$$\overline{de} \times \overline{mb} = \overline{ac} \times \frac{1}{2}\,\overline{ac} = \frac{1}{2}(\overline{ac})^2$$

$\because$ المجموع الجبري لعزمي القوتين حول m = عزم محصلتهما حول نفس النقطة

$$\therefore\ \frac{1}{2}(\overline{ab})^2 + \frac{1}{2}(\overline{bc})^2 = \frac{1}{2}(\overline{ac})^2$$

$\therefore\ (\overline{ab})^2 + (\overline{bc})^2 = (\overline{ac})^2$ وهو المطلوب

(6) شبه المنحرف على المشرحة:

للأستاذ / كامل فؤاد عبد الجواد — مدرس بمدرسة د كرنس الثانوية

الحــل:

شكل من الأشكال .. له من الأضلاع أربعة يتوازي اثنان منها ويعرف باسم شبه المنحرف. وقيل إنه سمِّي كذلك لأن ضلعًا فيه ينحرف عن الطريق القويم فلا يوازي زميله المقابل. ورأت كتب الهندسة أن تشير إليه في ذيل طائفة الأشكال الرباعية متوازية الأضلاع على زعم أنه متوازي أضلاع ناقص. ويجوز أيضًا القول بأنه مثلث ناقص بكيفية خاصة بدليل أن المسائل المتعلقة به لها ما يناظرها عند المثلث، ولكنه على كل حال لم يبلغ من المثلث أهميته، ولا شارك متوازي الأضلاع خواصه الأنيقة والأصح إنه عاله عليهما نُشرِّحه إلى مثلثات ومتوازيات أضلاع. وبعد هذا التقديم لشبه المنحرف نعرض موضوعنا، وهو معالجة بنواح مختلفة عن الشكل أغلبها غير مطروق مراعين أنه في الأشكال الآتية $\overline{ad} \parallel \overline{bc}$ وأن بعض الصيغ تستلزم أن يكون $\overline{ad} < \overline{bc}$.

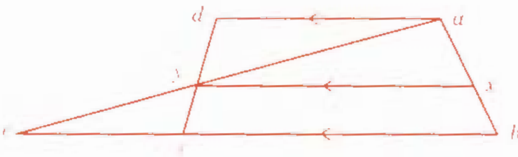
---

(1) كل مستقيم يرسم موازيًا قاعدتي شبه المنحرف يقسم ساقيه (وكذلك قطريه) إلى أجزاء متناسبة وبالعكس: إذا انقسم ساقاه (أو قطراه) إلى أجزاء متناسبة كان المستقيم الواصل بين نقطتي التقسيم موازيًا قاعدتيه. (العمل كما فى الشكل).

---

(2) فى الشكل المرسوم يتعين طول $\overline{xy}$ بدلالة القاعدتين والنسبة التى ينقسم بها كل من الساقين ولتكن $m : n$

البـرهـان:



$$\frac{de}{ad} = \frac{ce}{yd} = \frac{n}{m}$$

$$\therefore\ ce = \frac{n}{m} \times ad \qquad ......(1)$$

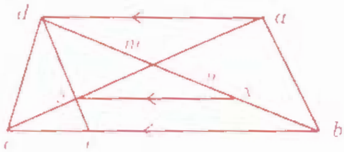
$$\frac{xy}{be} = \frac{ax}{ab} = \frac{m}{m+n}$$

$$\therefore\ xy = \frac{m}{m+n} \times be = \frac{m}{m+n}\ (bc + ce)$$

$$= \frac{m}{m+n}\left(\overline{bc} + \frac{n}{m} \times \overline{ad}\right) = \frac{m.\overline{bc} + n.\overline{ad}}{m+n}$$ وهو المطلوب

إذا كان $\overline{xy}$ يقسم كلاً من $\overline{cd}$ ، $\overline{ab}$ من الخارج بنسبة $m : n$ فإنه يمكن بطريقة مماثلة تماماً إثبات أن:

$$\overline{xy} = \frac{m.\overline{bc} - n.\overline{ad}}{m-n}$$



(3) أما إذا انقسم القطران $\overline{ac}$ ، $\overline{db}$ من الداخل في x, y بنسبة $m : n$ فإنه يمكن بطريقة مماثلة تماماً إثبات أن:

$$xy = \frac{m.bc - n.ad}{m+n}$$

---

(4) نتيجتان هامتان لما سبق:

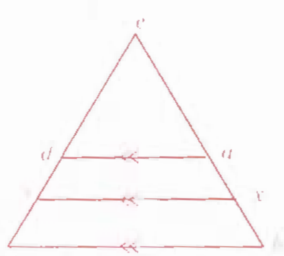
- المستقيم الواصل بين منتصفى الضلعين غير المتوازيين يوازى القاعدتين ويساوي نصف مجموعهما.
- المستقيم الواصل بين منتصفي القطرين يوازي القاعدتين ويساوي نصف الفرق بينهما.

---

(5) كيف تقسم شبه المنحرف إلى شكلين متشابهين بمستقيم يوازي قاعدته؟

نرسم $\overline{cd}, \overline{ba}$ حتى يتلاقيا في e، نأخذ $x \in \overline{be}$ بحيث يكون: $\overline{ex}$ وسطاً متناسباً بين $\overline{eb}, \overline{ea}$ ثم نرسم $\overline{xy} // \overline{bc}$ ويقطع $\overline{ce}$ في y فيكون الشكلان $xbcy$ ، $axyd$ متشابهين.

البرهان:



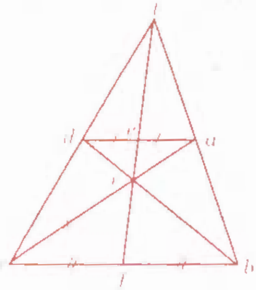
$$\therefore \frac{ea}{ex} = \frac{ex}{eb} = \frac{ad}{xy} = \frac{xy}{bc}$$

$$\therefore \frac{ex - ea}{eb - ex} = \frac{ad}{xy} = \frac{xy}{bc}$$

$$\therefore \frac{ad}{xb} = \frac{ad}{xy} = \frac{xy}{bc} = \frac{dy}{yc}$$

وحيث إن الزوايا المتناظرة بالشكلين متساوية. $\therefore$ فهما متشابهان.

(6) إذا كانت e منتصف $\overline{ad}$ ، f منتصف $\overline{bc}$ فإن $\overline{ef}$ يمر بنقطة تلاقي القطرين وامتداده يمر بنقطة تلاقي امتدادي الساقين



يوجد أكبر من برهان وأجملها كالآتي:

في $\Delta\, tbc$:

$$\frac{\overline{ta}}{\overline{ab}} = \frac{\overline{td}}{\overline{dc}},\quad \overline{bf} = \overline{fc}$$

$$\therefore\ \overline{ta} \times \overline{bf} \times \overline{cd} = \overline{ab} \times \overline{fc} \times \overline{dt}$$

$\therefore$ $\overline{ca}$ ، $\overline{bd}$ ، $\overline{tf}$ تتلاقى في نقطة واحدة (r) ..... (1)

، وبالمثل في $\Delta\, tad$ يمكن إثبات أن:

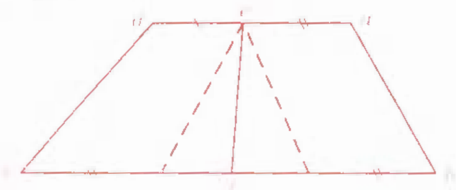
$$\overline{tb} \times \overline{ae} \times \overline{dc} = \overline{ba} \times \overline{ed} \times \overline{ct}$$

$\therefore$ $\overline{db}$ ، $\overline{ac}$ ، $\overline{te}$ تتلاقى في نقطة واحدة (r) أيضًا ..... (2)

من (1) ، (2) يثبت المطلوب

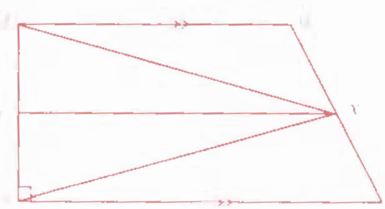
---

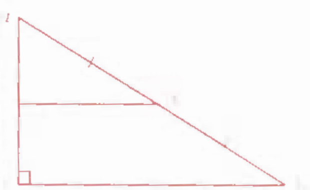
(7) علاقة $\overline{ef}$ بأضلاع شبه المنحرف:



$$(\overline{ab})^2 + (\overline{dc})^2 = 2(\overline{bf} - \overline{ae})^2 + 2(\overline{ef})^2$$

(نلاحظ صيغة أبولونيوس والعمل كما في الشكل) كما أنه يسهل إثبات أن $\overline{ef}$ يقسم الشكل إلى شكلين متكافئين فهو بحق المستقيم المتوسط لشبه المنحرف. وأقدم هذا لكي أشير إلى أن معظم المسائل المتعلقة بشبه المنحرف يسهل اكتشافها وبرهنتها بالبحث عن نظائرها عند المثلث (المثلث هو شبه المنحرف صغرت إحدى قاعدتيه حتى انعدمت).





$abcd$ شبه منحرف قائم فيه: $(\angle\, c) = 90°$ ، $\overline{ad} \,//\, \overline{bc}$ ، x منتصف $\overline{ab}$ والمطلوب

إثبات أن: $\overline{xc} = \overline{xd}$ ويمكن إثبات ذلك بطرق مختلفة منها الطريقة التى نثبت بها أن: $\overline{xc} = \overline{xd}$ في $\Delta\, abc$ إذا فرض أن: $(\angle\, b) = 30°$ فلاشك أن: $\overline{dc} = \frac{1}{2}\,\overline{ab}$ على اعتبار أن $\overline{ab}$ هو نظير الوتر.

---

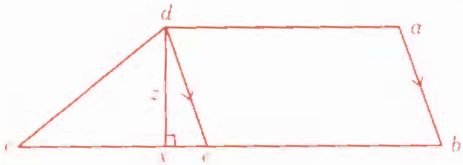
(8) لو بحثنا عن عناصر شبه المنحرف فمن المناسب القول بأنها ثمانية: أربعة أضلاع، قطران، زاويتان غير متكاملتين هذا مع العنصر المتضمن في التعريف، وهو توازي ضلعين فيه بما يجعل عدد زوايا الشكل تختزل إلى اثنتين عند أخذها في الاعتبار.

وعلى العموم يتعين الشكل الرباعى بمعلومية خمسة عناصر منها ضلعان على الأقل طبعًا، فإذا توازى فيه ضلعان فهذا أحد العناصر حيث يجعل تحديد زاوية للشكل تحديدًا ضمنيًا لأخرى.

$\therefore$ أربعة عناصر تكفي لتعيين شبه المنحرف ويبدو أن عدد الحالات الممكنة $ق^{8}{}_{4} = 70$ ولكن يلاحظ وجود حالات متماثلة مثل ($\overline{da}$ ، $\overline{cd}$ ، $\angle\, c$ ، $\overline{bc}$ ، $\overline{ad}$ ، $\overline{ba}$ ، $\angle\, b$ ، $\overline{cb}$) كما توجد حالات مبهمة (أكثر من حل) مثل ($\overline{cd}$ ، $\overline{ba}$ ، $\angle\, b$ ، $\overline{cb}$) ومثل هذه الحالات يجب إسقاطها ومع ذلك فلا يزال العدد كبيرًا وبعض الحلول صعبة والحديث عنها يطول، ولكنى قد أعطيته فكرة وأكتفى بالإشارة بأنه من السهل رسم شبه المنحرف بمعلومية أضلاعه الأربعة، وكذلك بمعلومية ضلعيه المتوازيين وقطريه وأترك ذلك للقارئ.

---

(9) إيجاد مساحة شبه المنحرف بدلالة أضلاعه الأربعة:



لذلك نرسم: $de \,//\, ab$ فيكون $de = ab$

$$\overline{ec} = \overline{bc} - \overline{ad}$$

$$\therefore\ z = \frac{2\,(\Delta\ dec)}{\overline{ec}}$$

حيث z ارتفاع شبه المنحرف، ح نصف محيط $\Delta\, dec$

$$z = \frac{2}{\overline{ec}}\sqrt{ح\,(ح - \overline{de})(ح - \overline{ec})(ح - \overline{cd})}$$

$$= \frac{2}{\overline{bc} - \overline{ad}}\sqrt{ح\,(ح - \overline{ab})(ح - \overline{bc} + \overline{ad})(ح - \overline{cd})}$$

نرمز لنصف مجموع أطوال أضلاع شبه المنحرف بالرمز ح_1

بالنظر في الشكل نجد أن محيط شبه المنحرف - محيط المثلث = $2ad = be + ad$

$$\overline{ad} = \overline{be} - \overline{ad} \qquad \therefore \overline{ad} = \text{ح} - {}_1\text{ح} \qquad \therefore \overline{ad} - {}_1\text{ح} = \text{ح}$$

$$\therefore z = \frac{2}{\overline{bc} - \overline{ad}} \sqrt{\left(\text{ح}_1 - \overline{ad}\right)\left(\text{ح}_1 - \overline{ad} + \overline{ab}\right)\left(\text{ح}_1 - \overline{bc}\right)\left(\text{ح}_1 - \overline{ad} - \overline{cd}\right)}$$

$\therefore$ مساحة شبه المنحرف = $z \times \dfrac{\overline{bc} + \overline{ad}}{2}$

$$= \frac{\overline{bc} + \overline{ad}}{\overline{bc} - \overline{ad}} \sqrt{\left(\text{ح}_1 - \overline{ad}\right)\left(\text{ح}_1 - \overline{ad} - \overline{ab}\right)\left(\text{ح}_1 - \overline{bc}\right)\left(\text{ح}_1 - \overline{ad} - \overline{cd}\right)}$$

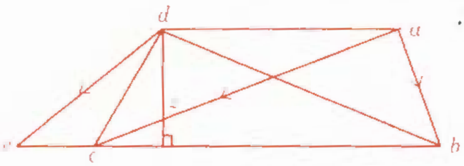
---

(10) إيجاد مساحة شبه المنحرف بدلالة قاعدتيه وقطريه:

نرسم $\overline{de} \,//\, \overline{ac}$ فيكون: $\overline{de} = \overline{ac}\ ,\ \overline{eb} = \overline{bc} + \overline{ad}$

$$\therefore z = \frac{2\,(\Delta\ deb)}{\overline{ec}}$$

$\because$ $\text{ح} = \dfrac{1}{2}$ محيط $\Delta\ bed$



$$z = \frac{2}{\overline{eb}} \sqrt{\text{ح}\left(\text{ح} - \overline{de}\right)\left(\text{ح} - \overline{eb}\right)\left(\text{ح} - \overline{bd}\right)}$$

$$= \frac{2}{\overline{bc} + \overline{ad}} \sqrt{\text{ح}\left(\text{ح} - \overline{ac}\right)\left(\text{ح} - \overline{bc} - \overline{ad}\right)\left(\text{ح} - \overline{bd}\right)}$$

نضع $\text{ح}_2 = \dfrac{1}{2}\left(\overline{ac} + \overline{bd} + \overline{ad} + \overline{bc}\right)$ ...... (1) ولكن:

$$\text{ح} = \frac{1}{2}\left(\overline{de} + \overline{eb} + \overline{bd}\right) = \frac{1}{2}\left(\overline{ac} + \overline{bc} + \overline{ad} + \overline{bd}\right) \qquad ..... (2)$$

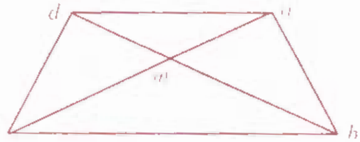
من (1) ، (2) $\therefore$ $\text{ح} = \text{ح}_2$

$$\therefore z = \frac{2}{\overline{bc} + \overline{ad}} \sqrt{\text{ح}_2\left(\text{ح}_2 - \overline{ac}\right)\left(\text{ح}_2 - \overline{ad} - \overline{bc}\right)\left(\text{ح}_2 - \overline{ba}\right)}$$

ومنه مساحة شبه المنحرف تساوى:

$$= \sqrt{\text{ح}_2\left(\text{ح}_2 - \overline{ac}\right)\left(\text{ح}_2 - \overline{bc} - \overline{ad}\right)\left(\text{ح}_2 - \overline{bd}\right)}$$

(11) إذا تقاطع قطرا شبه المنحرف فإن مساحة كل مثلث من المثلثات الأربعة الناشئة تتعين بدلالة قاعدتي شبه المنحرف وارتفاعه:



$$\frac{\text{مساحة}\,(\Delta mad)}{\text{مساحة}\,(\Delta mcb)} = \frac{(\overline{ad})^2}{(\overline{cb})^2}$$

$$\therefore \frac{\text{مساحة}\,(\Delta mad)}{(\overline{ad})^2} = \frac{\text{مساحة}\,(\Delta mcb)}{(\overline{cb})^2}$$

$$\therefore \frac{\text{مساحة}\,(\Delta mad)}{\text{مساحة}\,(\Delta mab)} = \frac{\overline{md}}{\overline{mb}} = \frac{(\overline{ad})^2}{\overline{ad}\times\overline{cb}}$$

$$\therefore \frac{\text{مساحة}\,(\Delta mad)}{(\overline{ad})^2} = \frac{\text{مساحة}\,(\Delta mab)}{\overline{ad}\times\overline{cb}}$$

$$\therefore \frac{\text{مساحة}\,(\Delta mad)}{(\overline{ad})^2} = \frac{\text{مساحة}\,(\Delta mcb)}{(\overline{cb})^2} = \frac{\text{مساحة}\,(\Delta mab)}{\overline{ad}\times\overline{cb}} = \frac{\text{مساحة}\,(\Delta mdc)}{\overline{ad}\times\overline{cb}}$$

وهذه هي النسبة بين المثلثات بدلالة القاعدتين، ثم بجمع المقدمات والتوالي:

$$\frac{\text{مساحة شبه المنحرف}}{(\overline{ad})^2+(\overline{cb})^2+2\,\overline{ad}\times\overline{cb}} = \frac{\text{مساحة}\,(\Delta mad)}{(\overline{ad})^2}$$

$$\frac{\text{مساحة شبه المنحرف}}{(\overline{ad}+\overline{cb})^2} = \frac{\text{مساحة}\,(\Delta mad)}{(\overline{ad})^2}$$

$$\therefore \text{مساحة}\,(\Delta\ mad) = \text{مساحة شبه المنحرف} \times \frac{(\overline{ad})^2}{(\overline{ad}+\overline{cb})^2}$$

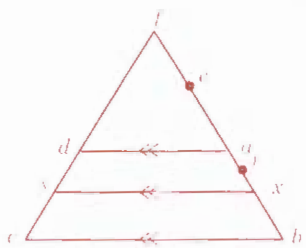
$$= \frac{1}{2} z \times (\overline{ad}+\overline{cb}) \times \frac{(\overline{ad})^2}{(\overline{ad}+\overline{cb})^2} = \frac{1}{2} z \times \frac{(\overline{ad})^2}{(\overline{ad}+\overline{cb})}$$

وبالمثل

$$\text{مساحة}\,(\Delta\ mcb) = \frac{1}{2} z \times \frac{(\overline{cb})^2}{(\overline{ad}+\overline{cb})}$$

$$\text{مساحة}\,(\Delta\ mab) = \frac{1}{2} z \times \frac{\overline{ad}.\overline{cb}}{\overline{ad}+\overline{cb}}$$

(12) كيف تقسم شبه المنحرف إلى جزئين متكافئين بمستقيم // قاعدتيه :



نمدّ $\overrightarrow{cd}$ ، $\overrightarrow{ba}$ ليتقاطعا فى e

نأخذ $f \in \overline{be}$ بحيث يكون: $(\overline{ea})^2 = \overline{ef} \times \overline{eb}$

(عملية إيجاد الثالث المتناسب)

ننصف $\overline{fb}$ في r ، ونأخذ $x \in \overline{eb}$ بحيث يكون:

$$(\overline{ex})^2 = \overline{er} \times \overline{eb}$$

(عملية إيجاد الوسط المتناسب) ، نرسم $\overline{xy} \parallel \overline{bc}$

البرهـــان:

$$\frac{(\Delta ebc)\ \text{مساحة}}{(\overline{eb})^2} = \frac{(\Delta exy)\ \text{مساحة}}{(\overline{ex})^2} = \frac{(\Delta ead)\ \text{مساحة}}{(\overline{ea})^2}$$

$$\therefore \frac{(\Delta ebc)\ \text{مساحة}}{(\overline{eb})^2} = \frac{(\Delta exy)\ \text{مساحة}}{\overline{er} \times \overline{eb}} = \frac{(\Delta ead)\ \text{مساحة}}{\overline{ef} \times \overline{eb}}$$

$$\therefore \frac{(\Delta ebc)\ \text{مساحة}}{\overline{eb}} = \frac{(\Delta exy)\ \text{مساحة}}{\overline{er}} = \frac{(\Delta ead)\ \text{مساحة}}{\overline{ef}}$$

$$\therefore \frac{(\Delta exy)\ \text{مساحة} - (\Delta ebc)\ \text{مساحة}}{\overline{eb} - \overline{er}} = \frac{(\Delta ead)\ \text{مساحة} - (\Delta exy)\ \text{مساحة}}{\overline{er} - \overline{ef}}$$

$$\therefore \frac{(xbcy)\ \text{مساحة الشكل}}{\overline{rb}} = \frac{(axyd)\ \text{مساحة الشكل}}{\overline{fr}}$$

$\because \overline{fr} = \overline{rb}$ $\therefore$ الشكل $axyd$ يكافئ الشكل $xbcy$

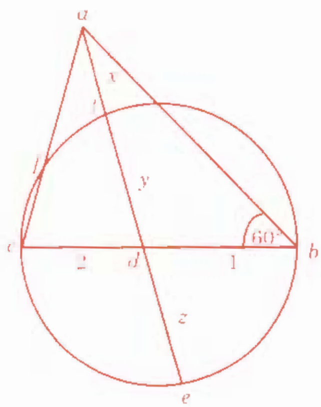
(7) تركيب مسألة:

للأستاذ/ كامل فؤاد عبد الجواد م.ث. بمدرسة دكرنس الثانوية

• التمرين:

$\Delta\, abc$ متساوي الأضلاع. رسمت دائرة قطرها $\overline{bc}$ ، $d \in \overline{bc}$ بحيث كان $\overline{bd} : \overline{dc} = 1 : 2$ ، رسم $\overrightarrow{ad}$ فقطع الدائرة فى t ، e والمطلوب إثبات أن:
$\overline{at} : \overline{td} : \overline{de} = 6 : 8 : 7$

الحل:



البرهان: فى $\Delta\, abd$:

$$(\overline{ad})^2 = (\overline{ab})^2 + (\overline{bd})^2 - 2\,\overline{ab}\,.\,\overline{bd}\,\cos 60°$$

$$= 4r^2 + \frac{4}{9}r^2 - 2 \times 2r \times \frac{2}{3}r \times \frac{1}{2}$$

$$= 4r^2 + \frac{4}{9}r^2 - \frac{4}{3}r^2 = \frac{28}{9}r^2$$

$$\therefore\ \overline{ad} = \frac{2\sqrt{7}}{3}r$$

$$td \times de = bd \times dc = \frac{2}{3}r \times \frac{4}{3}r = \frac{8}{9}r^2$$

$$at \times ae = af \times ac = r \times 2r = 2r^2\ ,$$

نفرض أن: $at = x,\ \ td = y,\ \ de = z$

$$\therefore\ x + y = \frac{2\sqrt{7}}{3}r \quad \ldots\ldots.\ (1) \qquad , \qquad y \times z = \frac{8}{9}r^2 \quad \ldots\ldots.\ (2)$$

$$x(x + y + z) = 2r^2 \quad \ldots\ldots..\ (3)$$

نحل المعادلات الثلاثة كالآتي:

$$\therefore\ \left(\frac{2\sqrt{7}}{3}r - y\right)\left(\frac{2\sqrt{7}}{3}r + \frac{8}{9}r^2\right) = 2ry$$

$$\therefore\ \frac{28}{9}ry - \frac{2\sqrt{7}}{3}y^2 + \frac{16\sqrt{7}}{27}r^2 - \frac{8}{9}ry = 2ry$$

$$\therefore\ 84ry - 18\sqrt{7}\,y^2 + 16\sqrt{7}\,r^2 - 24ry = 54ry$$

$$\therefore -18\sqrt{7}\,y^2 + 6ry + 16\sqrt{7}\,r^2 = 0$$

$$\therefore 9\sqrt{7}\,y^2 - 3ry - 8\sqrt{7}\,r^2 = 0$$

$$\therefore (3\sqrt{7}\,y - 8r)(3y + \sqrt{7}\,r) = 0$$

ومنها r $y = \dfrac{8}{3\sqrt{2}}$ ، وبالتعويض عن قيمة y في (2)

$$\therefore \frac{8}{3\sqrt{7}} r \times z = \frac{8}{9} r^2 \qquad \therefore z = \frac{8}{9} \times \frac{3\sqrt{7}}{8} r = \frac{\sqrt{7}}{3} r$$

وبالتعويض عن y في (1)

$$\therefore x = \frac{2\sqrt{7}}{3} r - \frac{8}{3\sqrt{7}} r = \frac{14-8}{3\sqrt{7}} r = \frac{2}{\sqrt{7}} r$$

$$\therefore x : y : z = \frac{2}{\sqrt{7}} r : \frac{8}{3\sqrt{7}} r : \frac{\sqrt{7}}{3} r = 6 : 8 : 7$$ وهو المطلوب

---

(2) من البرهان: $\because\ z = \frac{1}{2}(x + y)$

أي أن: $de = \frac{1}{2} ad$

من الفرض: $bd = \frac{1}{2} dc$

$\therefore be = \frac{1}{2} ac = r \qquad \therefore \Delta\, bde \simeq \Delta\, cda \qquad (\angle\, bde) = (\angle\, cda)$

$\therefore$ $\overline{be}$ = طول ضلع المسدس المنتظم المرسوم داخل الدائرة

---

(3) الخطة السابقة في الحل تبدو منطقية كما أنها عامة بمعنى أنه إذا تعينت النسبة التي تتقسم بها $\overline{bc}$ في d فإن النسبة $\overline{de}$: $\overline{td}$: $\overline{at}$ يمكن إيجادها كالآتي:

(1) نحل $\Delta\, abd$ (ضلعان وزاوية محصورة) للحصول على طول $\overline{ad}$ بدلالة r لزوم تشكيل إحدى المعادلات الثلاثة.

(2) نحصل على المعادلتين الأخريين من خواص الشكل الهندسية كما سبق، وهذا ممكن دائمًا.

(3) نحل المعادلات الثلاثة وهذا ممكن أيضًا. وإذا أريد إيجاد $\overline{be}$ بدلالة r

(أ) نوجد $\overline{ae}$ بدلالة r كما سبق $(x + y + z =)$

(ب) نوجد $\cos a_1$ من العلاقة $\frac{\overline{bd}}{\overline{ab}} = \frac{\sin a_1}{\sin(120° - a_1)}$

قانون الجيب = قيمة عددية m مثلاً ونعوض عن الجيب بجيب التمام ونحل المعادلة وهي سهلة.

(جـ) نطبق $(\overline{be})^2 = (\overline{ab})^2 + (\overline{ae})^2 = 2\overline{ab}.\overline{ae}\cos a_1$ هذا مع وجود طرق أخرى غير أن ما ذكرناه هو الأسهل لصعوبة التفاهم مع الجذور الصم.

---

(4) لاحظنا في البرهان السابق أن: $\overline{at} : \overline{td} = 6 : 8 = 3 : 4$ ويمكن إذن استغلال الشكل في وضع عكسي ناجح ثم البحث عن حل أو حلول:

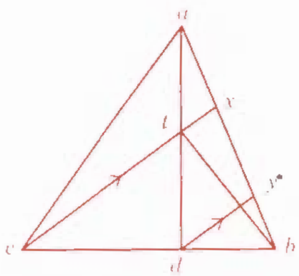
• تمرين:

$\Delta\, abc$ متساوي الأضلاع. فرضت النقطة d على $\overline{bc}$ بحيث كان $\overline{bd} : \overline{dc} = 1 : 2$. وصل $\overline{ad}$ أثبت أن النقطة التي تقسم $\overline{ad}$ بنسبة $3 : 4$ تقع على الدائرة التي قطرها $\overline{bc}$

الحل:

العمل: لتكن t هي النقطة التي تقسم $\overline{ad}$ بنسبة $3 : 4$ فنصل $\overline{tc}$، $\overline{tb}$ ثم نرسم $\overline{ct}$ حتى يقطع $\overline{ab}$ في x، ونرسم $\overline{dy} // \overline{cx}$ ويقطع $\overline{ab}$ في y، ونصل $\overline{xd}$

البرهان: في $\Delta\, ayd$:



$$\frac{ax}{xy} = \frac{at}{td} = \frac{3}{4}$$

في $\Delta\, bxc$:

$$\frac{by}{yx} = \frac{bd}{dc} = \frac{2}{4}$$

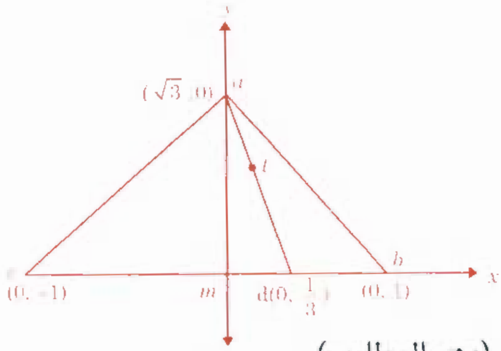
$$\therefore\ \overline{ax} : \overline{xy} : \overline{yb} = 3 : 4 : 2$$

ومنه: $\overline{ax} = \frac{1}{3}\overline{ab}$ ولكن $\overline{bd} = \frac{1}{3}\overline{bc}$

$$\therefore\ \overline{ax} = \overline{bd}$$

(ويمكن الحصول على هذه النتيجة باختصار باستخدام نظرية منيلوس دون رسم $\overline{dy}$)

$\therefore$ $\Delta\, axc, \Delta\, bda$ ينطبقان (ضلعان وزاوية محصورة) ومنه $(\angle bda) = (\angle axc)$



∴ الشكل $xbdt$ رباعي دائري

∴ $(\angle xtb) = (\angle xdb)$

ولكن $(\angle xdb) = 90°$

(لأن $(\angle b) = 60°$ ، $\overline{bd} = \frac{1}{2}\ \overline{bx}$)

$(\angle btc) = 90°$ ،$(\angle xtb) = 90°$

∴ t تقع على الدائرة التى قطرها $\overline{bc}$ (وهو المطلوب)

من الحل يتبين أنها مسألة تعجب حزب المحافظين كما أن الحل التحليلي لها لا يخلو من جمال خلاصته:

نتخذ $\overleftrightarrow{ma}$ ، $\overleftrightarrow{cb}$ محورين للإحداثيات (حيث m منتصف $\overline{bc}$) ونفرض للسهولة أن نصف طول ضلع المثلث يساوى الوحدة.

∴ النقط m,c,d,a هي كما بالرسم. ثم نعين النقطة t باستخدام قانون التقسيم من الداخل، ونعوض بإحداثيها في معادلة الدائرة التي قطرها $\overline{bc}$ نجد أنهما يحققان المعادلة أو نوجد ميلي كل من $\overleftrightarrow{tc}$ ، $\overleftrightarrow{tb}$ نجد أن حاصل ضربهما = 1-

---

(5) بالمثل يمكنْ إعطاء حل أو حلول للمسألتين الآتيتين (هما عكسان لمسألتين سبق معالجتهما) ويكشفان عن جانب من الخواص الرائعة في المثلث متساوي الأضلاع.

• المسألة الأولى:

$\Delta\, abc$ متساوي الأضلاع. فرضت النقطة t داخله بحيث كان:

$$\overline{ta} : \overline{tb} : \overline{tc} = 1 : \sqrt{3} : 2$$

أثبت أن: t تقع على دائرة طول قطرها $\overline{bc}$ وإذا كان $\overrightarrow{ct}$ ، $\overrightarrow{at}$ يقطعان $\overline{ab}$ ، $\overline{bc}$ في d, x على الترتيب. فأثبت أنهما يقسمان $\overline{ab}$ ، $\overline{bc}$ بنسبة $1 : 2$

• المسألة الثانية:

$\Delta\, abc$ متساوي الأضلاع. فرضت النقطة $d \in \overline{bc}$ بحيث كان $\overline{bd} : \overline{dc} = 1 : 2$.

وصل $\overline{ad}$. رسم $\overrightarrow{ct}$ يصنع مع $\overline{ca}$ زاوية قياسها يساوى $(\angle bad)$ ويقطع $\overline{ad}$ فى t . أثبت ان t تقع على دائرة طول قطرها $\overline{bc}$

(6) وهذه التمارين يمكن أن تقدم للطلبة الممتازين وهي متنوعة الحلول رغم أنها اشتقت من مصدر واحد.

(1) $\Delta\, abc$ متساوي الأضلاع، $d \in \overline{bc}$ بحيث كان $\overline{bd} : \overline{dc} = 1 : 2$ ، رسم $\overline{ad}$ ، $t \in \overline{ad}$ بحيث كان: $\overline{at} : \overline{td} = 3 : 4$ أثبت أن $\overrightarrow{cd}$ يمس الدائرة المارة برؤوس $\Delta\, atc$.

(2) $\Delta\, abc$ متساوي الأضلاع، $d \in \overline{bc}$ بحيث كان $\overline{bd} : \overline{dc} = 1 : 2$ ،

أثبت أن العمود النازل من منتصف $\overline{ac}$ على $\overline{ad}$ يقسمه بسبة 3 : 4.

(3) $\Delta\, abd$ فيه: $(\angle\, b) = 60°$ ، $\overline{ab} = 3\,\overline{bd}$ ، $t \in \overline{ad}$ ، بحيث كان : $\overline{at} : \overline{td} = 3 : 4$ ، أثبت أن: $(\angle\, btd) = 30°$

(4) $\Delta\, abd$ فيه: $(\angle\, b) = 60°$ ، $\overline{ab} = 3\,\overline{bd}$ ، أثبت أن:

القطعة الواصلة من d إلى منتصف $\overline{ab}$ تساوي $\frac{1}{2}\,\overline{ad}$ (عدديًا)

(يوجد حل في حدود منهج الإعدادية).

(8) منصف زاوية فى مثلث:

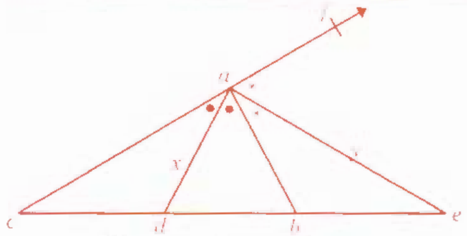
للأستاذ / كامل فؤاد عبد الجواد م.ث بمدرسة د كرنس الثانوية

هذا المثلث - الشكل البسط ذو الأضلاع الثلاثة - ما أعجبه ! وما أكثر الخواص التي يمكن أن نكتشفها فيه: علاقات بين أضلاعه وزواياه وارتفاعاته ومتوسطاته ومنصفات زواياه الداخلة والخارجة والدوائر المرسومة داخله وخارجه .... إلخ .

(1) تمرين:

في $\Delta\, abc$ قياس الزاوية بين منصف زاوية a الخارجة والشعاع $\overline{cb} = \dfrac{\angle b - \angle c}{2}$

أي المطلوب: إثبات أن: $(\angle e) = \dfrac{\angle b - \angle c}{2}$



الحــل:

البـرهـــان: $(\angle fab) = (\angle abc) + (\angle c)$

$(\angle fae) = (\angle e) + (\angle c)$

ولكن $(\angle fab) = 2\,(\angle fae)$

$\therefore\ (\angle abc) + (\angle c) = 2(\angle e) + 2(\angle c)$

$\therefore\ (\angle abc) - (\angle c) = 2(\angle e)$

أى أن: $(\angle e) = \dfrac{\angle b - \angle c}{2}$ (وهو المطلوب)

---

(2) تمرين:

في الشكل السابق: إذا رسمنا المنصف الداخلي فإنه يكون عموديا على المنصف الخارجي $\therefore\ \dfrac{x}{y} = \tan e = \tan \dfrac{b - c}{2}$

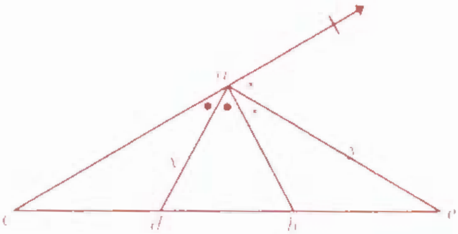
أي أن النسبة بين المنصفين الداخلي والخارجي لزاوية في مثلث تساوي ظل نصف الفرق بين الزاويتين الآخريين.

وهذه القاعدة يمكن أن يكون لها تطبيقات مفيدة مثلاً:

أوجد الشرط اللازم ليتساوى المنصفان الداخلي والخارجي لزاوية في مثلث.

اي المطلوب: إثبات أن: $(\angle e) = \dfrac{b - c}{2}$

الحـل:



النسبة بين المنصفين = $\tan\frac{b-c}{2}$

$\therefore 1 = \tan\frac{b-c}{2}$

$\therefore \left(\frac{b-c}{2}\right) = 45°$

وهو الشرط المطلوب $\therefore (\angle\, b - c) = 90°$

مثلاً، المثلث الذي قياسات زواياه $70°$, $10°$, $100°$ من الدرجات يكون به المنصفان الداخلي والخارجي للزاوية الثالثة متساويين. وتوجد صور أخرى طريفة لهذا الشرط آثرت للقارئ استنتاجها منها.

$\therefore \frac{b}{c} = \tan\left(45° + \frac{a}{2}\right)$

كما أن نتيجة هذا البند تسهل حل مسألة طريفة أعرضها فيما يلي:

• **المسألة:**

حل $\Delta\, abc$ المعلوم فيه قياس الزاوية a وطولا المنصفين الداخلي والخارجي لها.

الحـل:

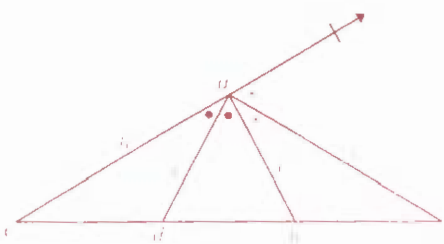
المنصفان معلومان $\therefore$ $\tan\frac{b-c}{2}$ معلوم ومنه نوجد $(\angle\, b - c)$ ولكن $(\angle\, b + \angle\, c)$ معلوم لأن $(\angle\, a)$ معلومة

$\therefore$ يمكن إيجاد قيمة كل من قياس الزاويتين $(\angle\, c)$ ، $(\angle\, b)$

ولإيجاد $(\angle\ c)$ ، $(\angle\ b)$ نحل المثلثين $abd,\ \ acd$ المعلوم في كل منهما زاويتان والضلع $\overline{ad}$

---

(3) ونتيجة البند السابق تغري بالتوسع في الموضوع مع استخدام حساب المثلثات ثم العودة للهندسة بعد كشف أسرارها. ونوجد طرقًا مختلفة لتسلسل البنود، ولكني انتهيت للآتي:



فى الشكل المرسوم:

مساحة $(\Delta\, ade)$ = مساحة $(\Delta\, aeb)$ + مساحة $(\Delta\, adb)$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\,xy = \frac{1}{2}\,\bar{c}y\sin(90^\circ - \frac{a}{2}) + \frac{1}{2}\,\bar{c}\times x\sin\frac{a}{2} \qquad \therefore\ xy = \bar{c}y$$

$$\therefore\ xy = \bar{c}y\cos\frac{a}{2} + \bar{c}x\sin\frac{a}{2} = \bar{c}\,(y\cos\frac{a}{2} + x\sin\frac{a}{2})$$

$$\therefore\ \bar{c} = \frac{xy}{\left(y\cos\frac{a}{2} + x\sin\frac{a}{2}\right)} \qquad \text{.....}\ (1)$$

$\because$ مساحة $(\Delta\, ade)$ = مساحة $(\Delta\, aec)$ - مساحة $(\Delta\, adc)$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\,x\times y = \frac{1}{2}\,\bar{b}\times y\sin(90^\circ + \frac{a}{2}) - \frac{1}{2}\,\bar{b}\times x\sin\frac{a}{2}$$

$$\therefore\ xy = \bar{b}y\cos\frac{a}{2} - \bar{b}x\sin\frac{a}{2} = \bar{b}\left(y\cos\frac{a}{2} - x\sin\frac{a}{2}\right)$$

$$\therefore\ \bar{b} = \frac{xy}{\left(y\cos\frac{a}{2} - x\sin\frac{a}{2}\right)} \qquad \text{.....}\ (2)$$

وهاتان العلاقتان يمكن استخدامهما في حل المثلثات المعلوم فيها قياس زاوية وطولا المنصفين الداخلي والخارجي لها، كما يمكن استخدامهما في أغراض أخرى.

---

(4) من العلاقتين السابقتين:

$$\frac{a}{c`} = \frac{y\cos\frac{a}{2} + x\sin\frac{a}{2}}{xy} \quad , \qquad \frac{a}{b`} = \frac{y\cos\frac{a}{2} - x\sin\frac{a}{2}}{xy}$$

$$\therefore\ \frac{1}{\bar{c}} + \frac{1}{\bar{b}} = \frac{2y\cos\frac{a}{2}}{xy}$$ بالجمع

$$\therefore\ \frac{\bar{b} + \bar{c}}{\bar{b}\bar{c}} = \frac{2\cos\frac{a}{2}}{x} \qquad \text{.....}\ (3)$$

$$\therefore\ \frac{1}{\bar{c}} - \frac{1}{\bar{b}} = \frac{2\sin\frac{a}{2}}{xy}$$ بالطرح

$$\therefore\ \frac{\bar{b} - \bar{c}}{\bar{b}\bar{c}} = \frac{2\sin\frac{a}{2}}{y} \quad , \qquad \therefore\ y = \frac{2\,\bar{b}\,\bar{c}}{\bar{b} - \bar{c}}\,\sin\frac{a}{2}$$

وهاتان العلاقتان يمكن استخدامهما في إيجاد طولي المنصفين لزاوية إذا علمت

قياسها وعلم طولا الضلعين اللذين يحصرانها.

وسوف نعطي اهتمامًا بالعلاقة (3) التي يمكن صياغتها في العبارة:

(طول المنصف الداخلي لزاوية في المثلث يساوي الوسط التوافقي بين ضلعي هذه الزاوية × جيب تمام نصف قياسها) .

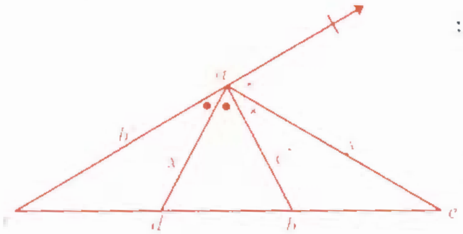
نتيجة:

$$\frac{x}{y}=\frac{2\bar{b}\bar{c}}{\bar{b}+\bar{c}}\cos\frac{a}{2}\div\frac{2\bar{b}\bar{c}}{\bar{b}-\bar{c}}\sin\frac{a}{2}=\frac{\bar{b}-\bar{c}}{\bar{b}+\bar{c}}\tan\frac{a}{2}=\tan\frac{b-c}{2}$$

وهذه هي النتيجة التي وصلنا إليها هندسيًا في بند (2).

---

(5) حساب طول $\overline{de}$ بدلالة عناصر $\Delta\, abc$:



$$(\overline{de})^2=x^2+y^2$$

$$=\left[\frac{2\bar{b}\bar{c}}{\bar{b}+\bar{c}}\cos\frac{a}{2}\right]^2+\left[\frac{2\bar{b}\bar{c}}{\bar{b}-\bar{c}}\sin\frac{a}{2}\right]^2$$

$$=4\bar{b}^2\bar{c}^2\left[\frac{1}{(\bar{b}+\bar{c})^2}\cos^2\frac{a}{2}+\frac{1}{(\bar{b}-\bar{c})^2}\sin^2\frac{a}{2}\right]^2$$

$$=\frac{4\bar{b}^2\bar{c}^2}{\left(\bar{b}^2-\bar{c}^2\right)^2}\left[(\bar{b}-\bar{c})^2\cos^2\frac{a}{2}+(\bar{b}+\bar{c})^2\sin^2\frac{a}{2}\right]^2$$

$$=\frac{4\bar{b}^2\bar{c}^2}{\left(\bar{b}^2-\bar{c}^2\right)^2}\left[\bar{b}^2\left(\cos^2\frac{a}{2}+\sin^2\frac{a}{2}\right)+\bar{c}^2\left(\cos^2\frac{a}{2}+\sin^2\frac{a}{2}\right)\right]^2$$

$$-2\bar{b}\bar{c}\left(\cos^2\frac{a}{2}-\sin^2\frac{a}{2}\right)$$

$$=\frac{4\bar{b}^2\bar{c}^2}{\left(\bar{b}^2-\bar{c}^2\right)^2}\left(\bar{b}^2+\bar{c}^2-2\bar{b}\bar{c}\cos a\right)=\frac{4\bar{b}^2\bar{c}^2}{\left(\bar{b}^2-\bar{c}^2\right)^2}\bar{a}^2$$

$$\therefore\ \overline{de}=\frac{2\bar{a}\bar{b}\bar{c}}{\bar{b}^2-\bar{c}^2}$$

وواضح أن هذه الطريقة منطقية ما دام قد حصلنا على طولي $\overline{ae}$ ، $\overline{ad}$ وهي قد أهدتنا متطابقة طريفة.

$\bar{a}^2 = (\bar{b}-\bar{c})^2 \cos^2 \frac{a}{2} + (\bar{b}-\bar{c}) \sin^2 \frac{a}{2}$ ولكنها ليست أسرع الطرق فقد وجدت ثلاث طرق أخرى أكثرها اختصارًا هي:

$$\overline{de} = x \div \sin\frac{b-c}{2} = \frac{2\bar{b}\bar{c}}{\bar{b}+\bar{c}} \cos \frac{a}{2} \div \frac{\bar{b}-\bar{c}}{\bar{a}} \cos \frac{a}{2} = \frac{2\bar{a}\bar{b}\bar{c}}{\bar{b}^2 - \bar{c}^2}$$

ويضعف من شأن هذا البرهان أن القانون المستخدم: $\sin \frac{b-c}{2} = \frac{\bar{b}-\bar{c}}{\bar{a}} \cos \frac{a}{2}$

وهو إحدى نتائج قانون الجيب، ليس بدرجة كافية من الشهرة.

• نتائج:

(أ) إذا كان : $\frac{\bar{b}}{\bar{c}} = m$ مثلاً فإن : $\bar{b} = m\bar{c}$

$$\overline{de} = \frac{2\bar{a} \times m\bar{c}^2}{m^2c^2 - \bar{c}^2} = 2\bar{a} \times \frac{2\bar{a}m}{m^2-1}$$

$\therefore$ نصف قطر دائرة أبولونيوس $= \frac{2m}{m^2-1} \times \overline{bc}$

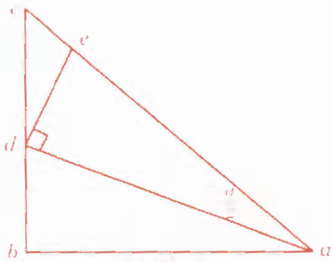
وذلك للنقطتين b, c ، النسبة m

(ب) إذا كانت $\bar{a}$ ، $\bar{b}$ ، $\bar{c}$ أضلاعًا لمثلث فإن: $(\bar{b}+\bar{c}) \sin \frac{a}{2}$ ، $(\bar{b}-\bar{c}) \cos \frac{a}{2}$ ، $\bar{a}$ تكون أضلاعًا لمثلث قائم الزاوية وتره $\bar{a}$.

(جـ) إذا كان كل من $\bar{a}$ ، $\bar{b}$ ، $\bar{c}$ جذريًا فإن $\overline{de}$ يكون جذريًا لذلك.

---

(6) المنصف الداخلي والوسط التوافقي:



وحيث أن: $x = \frac{2\bar{b}\bar{c}}{\bar{b}+\bar{c}} \cos \frac{a}{2}$

$\therefore$ الوسط التوافقي بين $\bar{b}$ ، $\bar{c}$ $= x \sec \frac{x}{2}$

ومن المفيد أن نطلب من الشكل طولاً يساوي $x \sec \frac{a}{2}$

ونجد ذلك سريعًا لو كان لدينا $\overline{df} \perp \overline{ad}$ ويقطع $\overline{ac}$ في f

$\therefore$ $\overline{af}$ هو المطلوب مقدارًا . ونعود لتركيب البرهان كالآتي:

$$\overline{af} = x \sec \frac{a}{2} = \frac{2\bar{b}\bar{c}}{\bar{b}+\bar{c}} \cos \frac{a}{2} \sec \frac{a}{2} = \frac{2\bar{b}\bar{c}}{\bar{b}+\bar{c}}$$

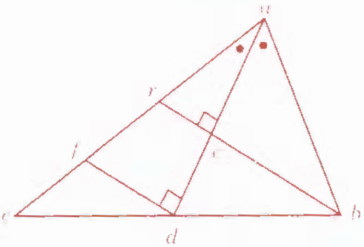
والنتيجة أننا وصلنا إلى طريقة هندسية سهلة لإيجاد الوسط التوافقي بين طولين $\overline{c}$ ، $\overline{b}$ مثلاً بجعلهما ضلعين في مثلث بينهما أي زاوية وننصف هذه الزاوية بالمنصف $\overline{ad}$ مثلاً ثم نقيم عمودًا من d يقطع أحد الضلعين أو امتداده في (f) فيكون $\overline{af}$ هو الوسط التوافقي المطلوب.

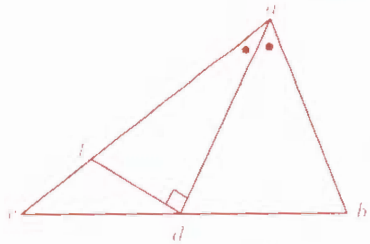
---

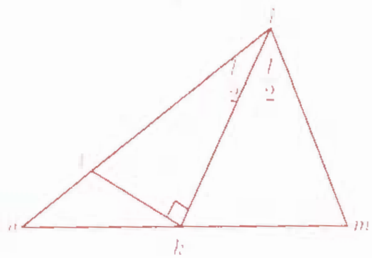
(7) برهان هندسي لما سبق:

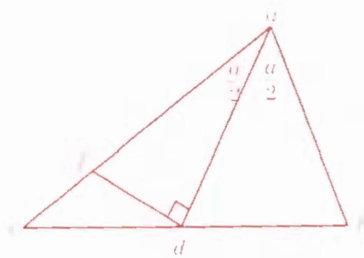
• **مسألة:**

$\Delta\, abc$ نصفت $(\angle\, a)$ بالمنصف $\overline{ad}$ الذي لاقى $\overline{bc}$ في d . ثم أقيم $\perp$ $\overline{ad}$ $\overline{df}$ فقطع $\overline{ac}$ في f . برهن على أن $\overline{af}$ وسط توافقي بين $\overline{ac}$ ، $\overline{ab}$









الحــل:

لذلك نرسم $\overline{br} \perp \overline{ad}$ فيقطع $\overline{ac}$ في r

حينئذ يكون $\overline{br} \,//\, \overline{df}$ ، $\overline{ar} = \overline{ab}$

$$\therefore \quad \frac{\overline{ab}}{\overline{ac}} = \frac{\overline{bd}}{\overline{dc}} \qquad \text{(نظرية)} \quad ,$$

$$\frac{\overline{rf}}{\overline{fc}} = \frac{\overline{bd}}{\overline{dc}} \qquad \text{(نظرية)}$$

$$\therefore \quad \frac{\overline{ab}}{\overline{ac}} = \frac{\overline{rf}}{\overline{fc}} = \frac{\overline{rf} - \overline{ar}}{\overline{ac} - \overline{af}} = \frac{\overline{af} - \overline{ab}}{\overline{ac} - \overline{af}} = \frac{\overline{ab} - \overline{af}}{\overline{af} - \overline{ac}}$$

$\therefore$ $\overline{af}$ (وسط توافقي) بين ، $\overline{ac}$ ، $\overline{ab}$

• **نتيجة:** ينطبق المثلثان كل على الآخر تمام الانطباق إذا ساوى في أحدهما طولا ضلعين وطول منصف الزاوية بينهما نظائرها في المثلث الآخر.

لأنه في المثلثين إذا كان:

$\overline{ab} = \overline{lm}$ ، $\overline{ac} = \overline{ln}$ ، $\overline{ad} = \overline{lk}$

ورسمنا $\overline{kt} \perp \overline{lk}$ ، $\overline{fd} \perp \overline{ad}$ كما بالشكل

فإن: $\overline{af}$ يكون وسطًا توافقيًا بين $\overline{ac}$ ، $\overline{ab}$

ويكون lt وسطًا توافقيًا بين $\overline{ln}$ ، $\overline{lm}$

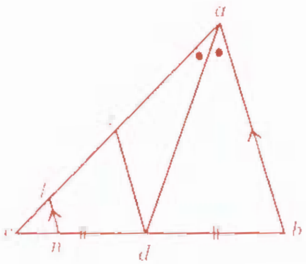
$\therefore\ \overline{af} = \overline{lt}$

$\therefore\ \Delta\, adf$ ينطبق على $\Delta\, lkt$

$\therefore\ \Delta\, abc \equiv \Delta\, lmn$ $\qquad \therefore\ (\angle\, a) = (\angle\, l)$ $\qquad \therefore\ \frac{1}{2}(\angle\, a) = \frac{1}{2}(\angle\, l)$

---

(8) طريقة أخرى لإيجاد الوسط التوافقي:



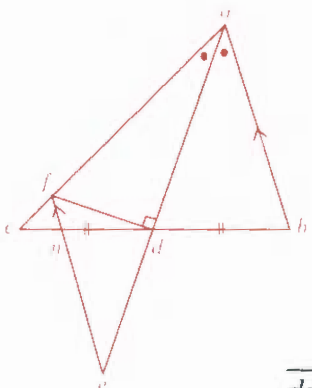
نرسم $\Delta\, abc$ الذي فيه: $\overline{ac}$ ، $\overline{ab}$ هما الطولان المراد إيجاد وسطهما التوافقي وننصف $(\angle\, a)$ بالمنصف $\overrightarrow{ad}$ الذي يقطع $\overline{bc}$ في d ثم نأخذ $n \in \overline{bc}$ بحيث يكون: $\overline{dn} = \overline{bd}$ ونرسم $\overline{nf} \,//\, \overline{ba}$ ويلاقي $\overline{ac}$ في f فيكون $\overline{af}$ هو الوسط التوافقي المطلوب

وللبرهنة على صحة ذلك ننصف $\overline{af}$ في z ونصل $\overline{dz}$ ، فيكون موازيًا لكل من $\overline{nf}$ ، $\overline{ba}$

$$\therefore\ \frac{\overline{az}}{\overline{zc}} = \frac{\overline{ab}}{\overline{ac}} \qquad \therefore\ \frac{\overline{az}}{\overline{zc}} = \frac{\overline{bd}}{\overline{dc}}$$

$$\therefore\ \overline{az} = \frac{\overline{ab} \times \overline{ac}}{\overline{ab} + \overline{ac}} \qquad \therefore\ \frac{\overline{az}}{\overline{az} + \overline{zc}} = \frac{\overline{ab}}{\overline{ab} + \overline{ac}}$$

$$\therefore\ \overline{af} = \frac{2\overline{ab} \times \overline{ac}}{\overline{ab} + \overline{ac}}$$



أى أن: $\overline{af}$ وسط توافقي بين $\overline{ac}$ ، $\overline{ab}$

• **نتيجة**: بمقارنة هذه الطريقة بالطريقة السابقة نجد أن لدينا تمرينين على الأقل:

ففي الشكل: $\overrightarrow{ad}$ ينصف $(\angle\, a)$

أولاً: إذا كان $nf \,//\, ba$ ، $\overline{dn} = \overline{bd}$

فإن $\overline{df} \perp \overline{ad}$

ثانيًا: إذا كان: $\overline{fn} \,//\, \overline{ab}$ ، $\overline{df} \perp \overline{ad}$ فإن $\overline{dn} = \overline{bd}$

والطريف أن لكل من التمرينين برهانًا بنظريات الإعدادي، والعمل نرسم $\overrightarrow{ad}$ حتى يقطع $\overrightarrow{fn}$ في (e) مثلاً.

(9) معالجة مسألة:

للأستاذ/ كامل فؤاد عبد الجواد مدرس بمدرسة د كرنس الثانوية

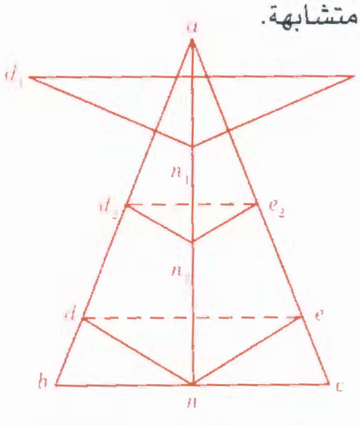
يقال إن الحديث ذو شجون بمعنى أننا قد تناولنا بالحديث موضوعًا معينًا فيثير آخر ذا صلة به ، وهذا يدفعنا إلى ثالث وهكذا نجد أنفسنا في النهاية على بُعد قريب أو بعيدُ عن موضوعنا الأول ولا يختلف الأمر كثيرًا فى الرياضة ، حيث نتناول بالمعادلة مسألة معينة فتفتح لنا مجالاً وتقودنا إلى مالم نتوقع فنعمل من الحبة قبة كما يقول المثل.

وكان الموضوع أمامى هو : أوجد نقطة على ضلع مثلث معلوم بحيث تكون النسبة بين طولي العمودين النازلين منها على الضلعين الآخرين كالنسبة بينهما على الترتيب.

هذه المسألة تطبيق مباشرة لمسألة إيجاد المحل الهندسي لنقطة بحيث تكون النسبة بين بعديها عن مستقيمين متقاطعين نسبة معلومة. ولكن الذي حدث أنه غاب عني هذا لبعض الوقت، في حين قفزت إلى ذهني فكرة معينة تعتمد على إمكان رسم مثلث يشابه آخر وتقع رءوسه على أضلاع مثلث معلوم فحاولت كالآتي:

ليكن المعلوم $\Delta\ abc$ والمطلوب تعيين النقطة n على $\overline{bc}$ بحيث إذا أسقط $\overline{ne} \perp \overline{ac}$ ، $\overline{nd} \perp \overline{ab}$ يكون: $\dfrac{\overline{nd}}{\overline{ne}} = \dfrac{\overline{ab}}{\overline{ac}}$

لذلك نفرض نقطة مثل n_1 داخل المثلث ونسقط منها عمودين على الضلعين $\overline{ac}$ ، $\overline{ab}$ ونأخذ على العمودين البعدين $\overline{n_1e_1} = \overline{ac}$ ، $\overline{n_1d_1} = \overline{ab}$ ، ثم نرسم $\overline{d_1e_1}$ // $\overline{d_2e_2}$ قاطعا $\overline{ab}$ فى d_2 ، $\overline{ac}$ فى e_2 ، ونقيم من e_2 ، d_2 عمودين يتلاقيان في n_2 . نصل $\overline{an_2}$ ونمده على استقامته حتى يلاقي $\overline{bc}$ في n فتكون n هي النقطة المطلوبة. وإثبات ذلك سهل حيث أن المثلثات الثلاثة متشابهة.



وهذه الخطة لتعيين النقطة n تصح أن تكون خطة منطقية لتخطيط المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث تكون النسبة بين بعديها عن مستقيمين متقاطعين نسبة معلومة ($\frac{x}{y}$ مثلاً) ليكون $\overrightarrow{ac}$ ، $\overrightarrow{ab}$ متقاطعين في نقطة a.

(الشكل السابق) n النقطة المتحركة بالشرط المذكور. نرسم $\Delta\, n_1d_1e_1$ فيه $\overline{n_1e_1}$ ، $\overline{n_1d_1}$ عمودان على $\overline{ac}$ ، $\overline{ab}$ على الترتيب النسبة بينهما $\frac{x}{y}$ (عملية) ثم نرسم $\Delta\, n_2d_2e_2$ يشابه $\Delta\, n_1d_1e_1$ كما سبق فيكون $\overline{an_2}$ وامتداده من جهتيه هو المحل الهندسي المطلوب تخطيطه (مع حفظ حق المحل الهندسي الآخر).

يعرف القارئ أن مسائل المحل الهندسي على نوعين: نوع تعطى فيه مواصفات النقطة المتحركة ويطلب كشف المحل الهندسي ونوع آخر يصرح فيه بالمحل الهندسي ويطلب البرهنة على صحة هذا التصريح، فإذا كانت المسألة من النوع الأول فهي دعوى عملية ووجب أن يتضمن الحل الخطوتين:

(1) كشف المحل الهندسي وبيان مواصفاته.

(2) الخطة العملية لتخطيطه وإثبات أن كل نقطة عليه تفي بالشرط المذكور. وفي مسألتنا هذه ما هو الطريق الطبيعي الذي يتبعه الذهن للوصول إلى الخطوة الأولى:

ليكن: $\overleftrightarrow{cac}$ ، $\overleftrightarrow{bab}$ المستقيمين المتقاطعين

فإذا فرضنا أوضاعًا للنقطة المتحركة n بين $\overline{ac}$ ، $\overline{ab}$ مثل ... n_1 ، n_2 ، n_3 نجد أن المثلثات $n_2d_2e_2$ ، $n_1d_1e_1$ متشابهة دائمًا ونقطة a هي مركز التشابه لأنه:

$$\because\ \frac{n_1d_1}{n_1e_1} = \frac{n_2d_2}{n_2e_2} = \frac{x}{y}$$

$\therefore$ في كل مثلثين

$$\left.\begin{array}{l} m(\angle n_1) = m(\angle n_2) \quad \text{من التوازي} \\ \dfrac{n_1d_1}{n_2d_2} = \dfrac{n_1e_1}{n_2e_2} \end{array}\right\}$$

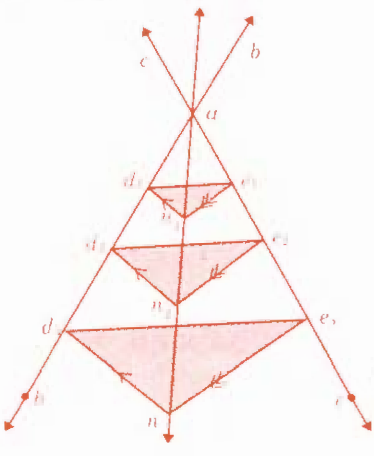
$\therefore$ المثلثان متشابهان

$\therefore$ كل من ... n_3n_2 ، n_2n_1 يمر بالنقطة a

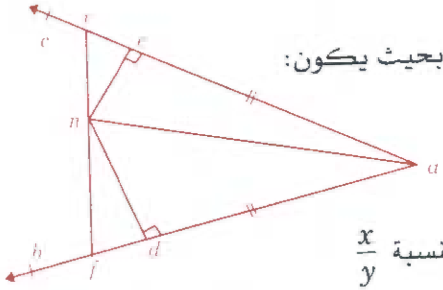
$\therefore$ n على مستقيم ثابت يمر بالنقطة a

أما إذا أردنا جعل مسألتنا من النوع الثاني فنضع نص رأسها في الأسلوب الخبري الآتي:

المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث تكون النسبة بين بعديها عن مستقيمين متقاطعين نسبة



معلومة وهو مستقيم يمر بنقطة تقاطع المستقيمين ويقسم الزاوية بينهما إلى جزئين النسبة بين جيبيها كالنسبة المعلومة (يوجد حلان هندسيًا). وإضافة العبارة (ويقسم الزاوية بينهما إلى جزئين النسبة بين جيبيها كالنسبة المعلومة) مفيدة لزيادة تحديد المحل الهندسي، وهنا يبرز سؤال جديد: كيف تقسم زاوية إلى جزئين النسبة بين جيبيهما نسبة معلومة؟



ليكن المعلوم $(\angle a)$ والمطلوب رسم $\overrightarrow{an}$ بحيث يكون:

مثلاً $\dfrac{\sin(\angle nab)}{\sin(\angle nac)} = \dfrac{x}{y}$

لذلك نأخذ على $\overrightarrow{ac}$ ، $\overrightarrow{ab}$ البعدين

المتساويين $\overline{ar}$ ، $\overline{af}$ نصل $\overline{fr}$ نقسمه في n بنسبة $\dfrac{x}{y}$

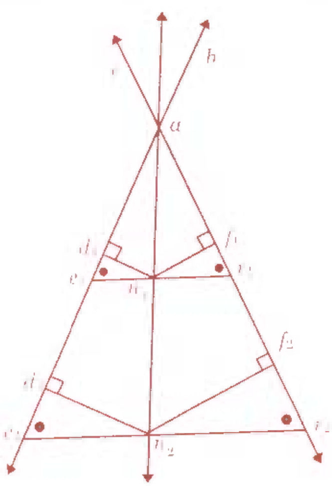
فيكون $\overrightarrow{an}$ هو المستقيم المطلوب ولإثبات ذلك نسقط العمودين $\overline{ne}$ ، $\overline{nd}$ ثم

$$\frac{\sin nab}{\sin nac} = \frac{nd}{ne} = \frac{nf}{nr} = \frac{x}{y}$$

ومعنى هذا أنه قد ظهرت طريقة أخرى لتخطيط المحل الهندسي في مسألتنا وذلك برسم $\overline{an}$ كما في العملية.

والسؤال الآن: ما هي الخطوة الأولى المناظرة من حل المسألة؟

إذا فرضنا أوضاعًا للنقطة n بين $\overrightarrow{ac}$ ، $\overrightarrow{ab}$ ورسمنا $\overline{f_2n_2r_2}$ ، $\overline{fn_1r_1}$ بحيث يكون المثلثان af_2r_2 ، af_1r_1 متساويي الساقين فإن:



$$\frac{n_1d_1}{n_1e_1} = \frac{n_2d_2}{n_2e_2} = \frac{x}{y}$$

$$\therefore \frac{n_1f_1}{n_1r_1} = \frac{n_2f_2}{n_2r_2} \quad \text{(من تشابه المثلثات)}$$

$$\therefore \frac{f_1r_1}{n_1r_1} = \frac{f_2r_2}{n_2r_2} \quad \text{(من خواص التناسب)}$$

$$\therefore \frac{f_1r_1}{n_1r_1} = \frac{n_1r_1}{n_2r_2} = \frac{r_1a}{r_2a}, \quad (\angle r_1) = (\angle r_2)$$

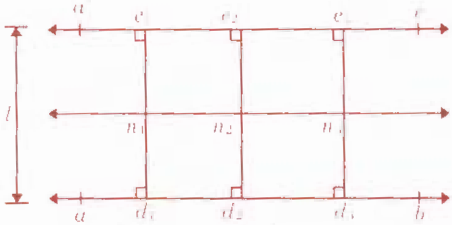
$\therefore$ $\Delta\Delta\ n_1r_1a,\ n_2r_2a$ متشابهان

$$\therefore \overline{n_1a} = \overline{n_2a}$$

وهذا برهان قيمته عندي تغري ببرهان مماثل في حالة توازي المستقيمين:

ليكن: $\overleftrightarrow{ac}$ ، $\overleftrightarrow{ab}$ متوازيين البعد بينهما l ويراد إيجاد المحل الهندسي للنقطة n التي تتحرك ...

نفرض أوضاعًا للنقطة n مثل $n_1, n_2, n_3, ...$ ونرسم الأعمدة كما بالشكل



النسبة المعلومة $\dfrac{n_1d_1}{n_1e_1} = \dfrac{n_2d_2}{n_2e_2} = \dfrac{x}{y}$

$\therefore \dfrac{n_1d_1}{d_1e_1} = \dfrac{n_2d_2}{d_2e_2}$

$\therefore\ n_1d_1 = n_2d_2$ لأن $d_1e_1 = d_2e_2 = l$

$\therefore$ الشكل $d_1d_2n_2n_1$ مستطيل وحيث أن هذا صحيح مهما كان وضع n فهو المحل الهندسي لها (ويحتفظ بحق المحل الهندسي الآخر وهو خارج المستقيمين من جهة $\overleftrightarrow{ab}$ إذا كان $x < y$ ، ومن جهة $\overleftrightarrow{ac}$ إذا كان $x > y$.

بقي سؤال: هل من الممكن اعتبار هذه الحالة الأخيرة حالة خاصة من مسألتنا؟

نحاول المنطق الآتي:

$\because$ $\overleftrightarrow{ca}$ و $\overleftrightarrow{ab}$ متوازيان $\quad \therefore\ \phi = \overleftrightarrow{ab} \cap \overleftrightarrow{ac}$

$\therefore$ المحل الهندسي للنقطة n هو مستقيم يمر بنقطة التقاطع.

$\because$ لا يوجد نقطة تقاطع $\quad \therefore$ المحل الهندسي // كلاً من المستقيمين المتوازيين .

وبعد أيها القارئ: التمارين الآتية تجدها على صلة مباشرة بالموضوع نحاول حلها.

(1) $\Delta\ abc$ كيف ترسم مستقيمًا من a يقسم المثلث إلى جزئين النسبة بينهما كالنسبة: $\dfrac{(\overline{ab})^2}{(\overline{ac})^2}$ (راجع أول مسألة).

(2) $\Delta\ abc$ رسم $\overrightarrow{an}$ فقطع $\overline{bc}$ في n ، أثبت أن: $\dfrac{nb}{nc} = \dfrac{ab}{ac} \times \dfrac{\sin nab}{\sin nac}$

(3) أوجد نقطة في مستوى مثلث تكون النسبة بين أبعادها عن أضلاعه نسبة معلومة ($x : y : z$ مثلاً).

(4) $\Delta\ abc$ فيه: $d \in \overline{bc}$ ، $ab = ac$ برهن على أن: $\dfrac{bd}{dc} = \dfrac{\sin(\angle\ dab)}{\sin(\angle\ dac)}$

(10) ملاحظات رياضية:

للأستاذ/ كامل فؤاد عبد الجواد م.ث بمدرسة علي مبارك الثانوية

بمناسبة موضوعي هذا أشير إلى كلمة للأستاذ حبيب رزق الله وردت بمقال لسيادته في مجلة عام 1962م تحت عنوان آراء وتجارب حيث قال: « أرجو أن يحاول المدرس حل كل مسألة أو تمرين هندسي بأكثر من حل إذا أمكن، وأن يشجع تلاميذه على إبداء ما عندهم من أفكار أو حلول أو اتجاهات غير واضحة في أذهانهم، وإذا تمكن المدرس من إيجاد حل أو أكثر نتيجة بحث مقترحات تلاميذه فإنه يكون بذلك قد أشبع رغبة في نفوسهم في معرفة مدى فائدة مقترحاتهم في الوصول إلى حلول مختلفة، وهم بذلك يشعرون بالانتصار، ويزداد حبهم للمادة. وبالعكس فإن المدرس الذي يكتفي بالوصول إلى حل واحد للمسألة، فإنه غالبًا ما يتقيد به أثناء الدرس ويوجه تلاميذه إليه من غير رغبة أكيدة منهم وإذا حاول أحدهما أن يسأل عما إذا كانت فكرته تؤدي للحل فإنه غالبًا ما يكون الجواب بالنفي لأنه جواب غير مبني على البحث السليم والدراسة الدقيقة » .

ولما كنت من أنصار رأي الأستاذ وضد الرأي (خلينا في اللي عرفناه) الذي نسمعه من بعض التلاميذ وقليل من المدرسين للأسف، لذلك أعرض بعضًا مما وصلنا إليه في الفصل نتيجة لتطبيق الرأي السابق، وأرجو أن يعرض الزملاء ما عندهم.

---

(1) القانون الثالث في اللوغاريتمات نتيجة من القانون الأول:

$\log_a x^n = \log_a (x \times x \times x \times \ldots$ إلى n من العوامل)

$= \log_a x + \log_a x + \ldots$ إلى n من الحدود)

$= n \log_a x$ (القانون الأول)

الاستدلال السابق سليم فيما لو كانت n كسرًا أو عددًا سالبًا ليكن المطلوب

إثبات أن: $\log_a x^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m} \log_a x$

$\log_a x = \log_a (x^{\frac{1}{m}} \times x^{\frac{1}{m}} \times x^{\frac{1}{m}} \times \ldots$ إلى m من العوامل)

$= \log_a x^{\frac{1}{m}} + \log_a x^{\frac{1}{m}} + \ldots$ إلى m من الحدود)

$= m \log_a x^{\frac{1}{m}}$

$\therefore \log x^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m} \log_a x$ بقسمة الطرفين على m

∴ الاستدلال السابق سليم أترك للقارئ التحقق من أن هذا سليم أيضًا في حالة n سالبة.

---

(3) المتباينة: $x^2 - 2xy + y^2 > 0$ تقود إلى أن الوسط العددي لعددين أكبر من وسطهما الهندسي:

$x^2 - 2xy + y^2$ موجب لأنه مربع كامل

$\therefore x^2 + y^2 > 2\frac{x}{y}$ $\qquad \therefore x^2 + 2xy + y^2 > 4xy$

$\therefore (x+y)^2 > 4xy$ $\qquad \therefore x + y > 2\sqrt{xy}$

$\therefore \frac{x+y}{2} > \sqrt{xy}$

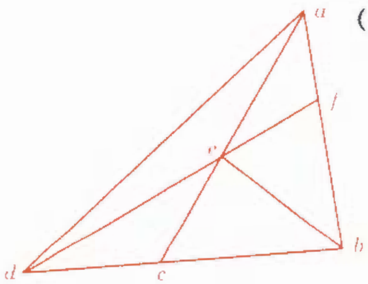
---

(4) إثبات نظرية مينلوس بطريقة مماثلة لإثبات نظرية شيفا:

$\frac{(\Delta dae)\text{ مساحة}}{(\Delta dbe)\text{ مساحة}} = \frac{\overline{af}}{\overline{fb}}$ كما في شيفا ...... (1)

$\frac{(\Delta dbe)\text{ مساحة}}{(\Delta dce)\text{ مساحة}} = \frac{\overline{bd}}{\overline{dc}}$ ...... (2)

$\frac{(\Delta dce)\text{ مساحة}}{(\Delta dae)\text{ مساحة}} = \frac{\overline{ce}}{\overline{ea}}$ ...... (3)



من (1) ، (2) ، (3) نحصل على المطلوب

---

(5) إثبات نظرية شيفا بالاعتماد على نظرية مينلوس:

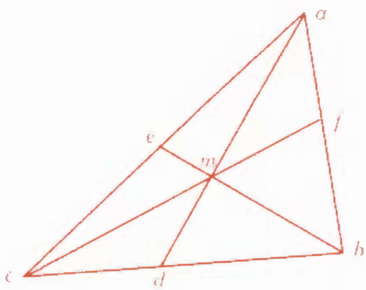
$\overleftrightarrow{cm}$ قطع $\overline{ab}$ في f ، $\overline{ad}$ في m ، $\overline{bd}$ في c

∴ $\overleftrightarrow{cm}$ قطع أضلاع $\Delta\, abd$

$\therefore \frac{\overline{af}}{\overline{fb}} \times \frac{\overline{bc}}{\overline{cd}} \times \frac{\overline{dm}}{\overline{ma}} = 1$

، $\overleftrightarrow{bm}$ قطع أضلاع $\Delta\, cad$

$\therefore \frac{\overline{ae}}{\overline{ec}} \times \frac{\overline{cb}}{\overline{bd}} \times \frac{\overline{dm}}{\overline{ma}} = 1$



$\therefore \frac{\overline{af}}{\overline{fb}} \times \frac{\overline{bc}}{\overline{cd}} = \frac{\overline{ae}}{\overline{ec}} \times \frac{\overline{cb}}{\overline{bd}}$ $\qquad \therefore \frac{\overline{af}}{\overline{fb}} \times \frac{\overline{bd}}{\overline{dc}} \times \frac{\overline{ce}}{\overline{ea}} = 1$

(6) في الإحصاء: إثبات أن مجموع الانحرافات عن الوسط الحسابي = صفر.

نفرض أن القيم هى $a, b, c, \ldots$ وأن عددها n ووسطها الحسابي (f) .

$\therefore f = \dfrac{a+b+c+\ldots.}{n}$ من تعريف الوسط الحسابي

$\therefore a + b + c + \ldots = nf$

$\therefore$ الانحرافات هي: $a - f, b - f, c - f$

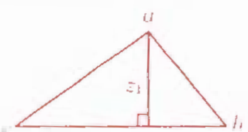
مجموعها $= a + b + c + \ldots - nf = nf - nf = 0$

---

(7) « إذا ساوى قياس زاوية من مثلث قياس زاوية من مثلث آخر أو كملتها فالنسبة بين المستطيلين المكون كل منها من ضلعي الزاوية كالنسبة بين مساحتي المثلث على التناظر » .

برهان هذه النظرية وملحقاتها استغرق منا حصتين:

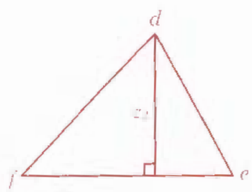
في الحصة الأولى أعطيت البرهان المذكور في الكتاب المقرر ثم بحثت مع التلاميذ كالعادة عما إذا كان العكس صحيحًا (بغض النظر عن أهميته) ووصلنا إلى الآتي:



الفرض:

$$\frac{\text{مساحة}\,(\Delta abc)}{\text{مساحة}\,(\Delta def)} = \frac{\overline{ab} \times \overline{bc}}{\overline{de} \times \overline{ef}}$$

المطلوب: $(\angle\, b) = (\angle\, e)$ أو $(\angle\, b) + (\angle\, e) = 180°$



العمـــل: نسقط العمودين z_1 , z_2

البرهــان:

$$\frac{\text{مساحة}\,(\Delta abc)}{\text{مساحة}\,(\Delta def)} = \frac{\frac{1}{2}\, z_1 \times bc}{\frac{1}{2}\, z_2 \times ef}$$

ولكن $\dfrac{\text{مساحة}\,(\Delta abc)}{\text{مساحة}\,(\Delta def)} = \dfrac{\overline{ab} \times \overline{bc}}{\overline{de} \times \overline{ef}}$ من الفرض

$\therefore \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\overline{ab}}{\overline{de}}$ $\qquad \therefore \dfrac{z_1}{\overline{ab}} = \dfrac{z_2}{\overline{de}}$ $\qquad \therefore \sin b = \sin e$

$\therefore (\angle\, b) = (\angle\, e)$ أو تكملها وفي الحصة الثانية أعطيت البرهان الآخر للنظرية وهو المستقل عن التشابه (حيث نضع أحد المثلثين على الآخر).

وطبقًا لهذا البرهان من الممكن نقل هذه النظرية المعتمدة عليها.

(11) متفرقات:

للأستاذ/ الدكتور عبد الحميد لطفي أستاذ الرياضة بجامعة عين شمس

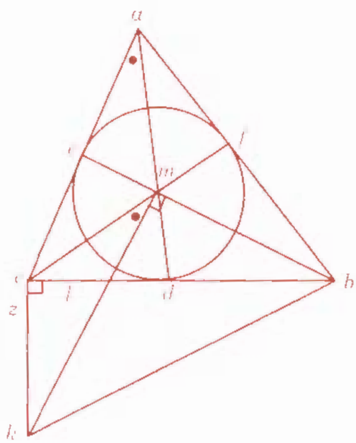
(1) برهان هيرون مع بعض التعديل على مساحة المثلث

$$= \sqrt{h\,(h-\bar{a})\,(h-\bar{b})\,(h-\bar{c})}$$

ليكن المثلث abc. نرسم الدائرة الداخلة m تمس الأضلاع في d, e, f

$\therefore$ مساحة المثلث $= hr$ ثم نرسم $\overline{bm} \perp \overline{mk}$ ، $\overline{bc} \perp \overline{ck}$ فيقطع $\overline{bc}$ في l

$bmck$ رباعي دائري.



$$\therefore (\angle\, cbk) = (\angle\, cmk) = (\angle\, mae)$$

$$\therefore \Delta\, aem \simeq \Delta\, bck$$

$$\therefore \frac{ae}{bc} = \frac{em}{ck} = \frac{md}{ck} = \frac{dl}{lc}$$

$$\therefore \frac{ae}{ae+bc} = \frac{dl}{dl+lc} = \frac{\dfrac{(\overline{md})^2}{bd}}{cd}$$

$$\therefore \frac{h-\bar{a}}{h} = \frac{r^2}{(h-\bar{b})\,(h-\bar{c})}$$

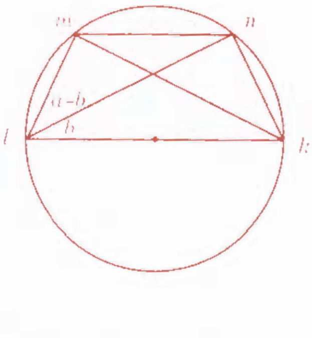
$$\therefore hr^2 = (h-\bar{a})\,(h-\bar{b})\,(h-\bar{c})$$

$\therefore$ مساحة $(\Delta\, abc) = \sqrt{h^2r^2} = \sqrt{h\,(h-\bar{a})\,(h-\bar{b})\,(h-\bar{c})}$

---

(2) برهان بطليموس مع بعض التعديل على أن:

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$



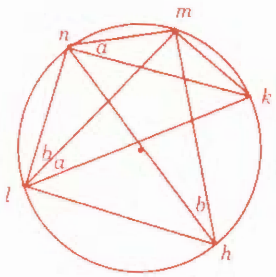
نرسم دائرة قطرها $\overline{kl}$ يساوي الوحدة

ثم نرسم $(\angle\, klm) = a°, (\angle\, kln) = b°$

$$(\angle\, m\,\ln) = a - b$$

$$\therefore \overline{mn}.\overline{kl} = \overline{km}.\overline{nl} - \overline{ml}.\overline{nk}$$

$$\therefore \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$



(3) برهان بطليموس مع بعض التعديل على أن:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

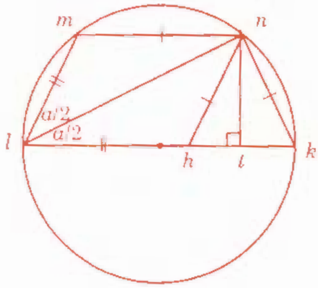
نرسم دائرة قطرها $\overline{kl}$ يساوي الوحدة

ثم نرسم $(\angle\, klm) = a°, (\angle\, mln) = b°$

ثم نصل القطر $\overline{mh}$

$\therefore \overline{ln}.\overline{mh} = \overline{lm}.\overline{nh} - \overline{lh}.\overline{nm}$

$\therefore \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$



(4) برهان بطليموس مع بعض التعديل على أن:

$$\sin^2 \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}(1-\cos a)$$

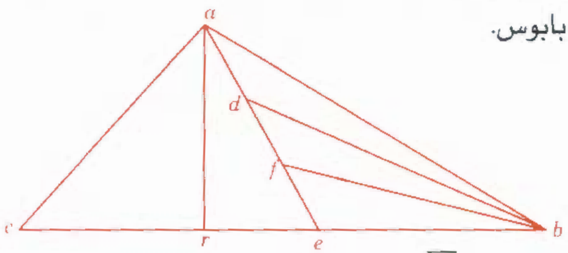
نرسم دائرة قطرها $\overline{kl}$ يساوي الوحدة

ثم نرسم $(\angle\, klm) = a°, (\angle\, kln) = \frac{1}{2}a°$

ونأخذ $\overline{lh} = \overline{lm}$ ونرسم $\overline{nt} \perp \overline{kl}, \overline{kn} = \overline{nh} = \overline{nm}$

$\therefore\ \overline{kt} = \overline{th} = \frac{1}{2}\overline{kh} = \frac{1}{2}(\overline{kl} - \overline{ml}) = \frac{1}{2}(1-\cos a)$

(5) إذا كانت d نقطة داخل مثلث abc، فإن $\overline{db} + \overline{dc} < \overline{ab} + \overline{ac}$ ، فإذا أخذنا e على $\overline{bc}$ فهل $\overline{db} + \overline{de}$ تكون أصغر من $(\overline{ab} + \overline{ac})$ ، ليس هذا ضروريًا كما يتبين من الرسم الآتي الذي أورده بابوس.



$\Delta\, abc$ فيه $\overline{ab} > \overline{ac}$.

خذ $e \in \overline{bc}$ بحيث $f \in \overline{ae}$،

$\overline{ae} > \overline{ac}$ بحيث $\overline{ef} = \overline{ac}$ ، d منتصف $\overline{af}$

$$(\overline{db} + \overline{da}) + \overline{ac} > \overline{ab} + \overline{ac}$$

$\therefore\ \overline{db} + (\overline{df} + \overline{fe}) > \overline{ab} + \overline{ac}$

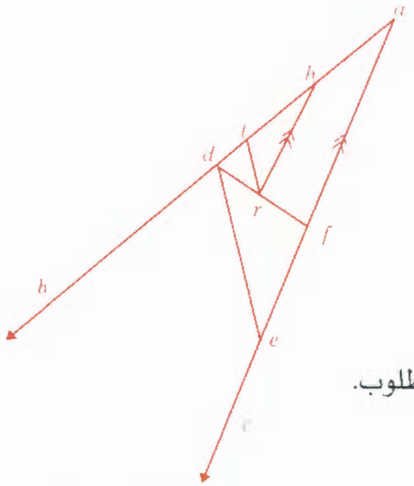
$\therefore\ \overline{db} + \overline{de} > \overline{ab} + \overline{ac}$

(6) برهان بابوس مع بعض التعديل للمسألة الآتية:

$\overleftrightarrow{ac}$ ، $\overleftrightarrow{ab}$ مستقيمان ثابتان، $\overleftrightarrow{de}$ مستقيم متغير يقطع $\overleftrightarrow{ab}$ في d، $\overleftrightarrow{ac}$ فى e

فإذا كان: $\frac{\overline{ae}}{\overline{db}}$ = نسبة ثابتة، فأوجد المحل الهندسي لمركز ثقل المثلث ade

r مركز ثقل المثلث ade، $at = \frac{1}{3}\, ab$ ، $\overrightarrow{ac} \mathbin{//} \overline{rh}$ ،



$\therefore \frac{hr}{ae} = \frac{1}{3} = \frac{ah}{ad} = \frac{at}{ab} = \frac{ht}{db}$

$\therefore \frac{hr}{ht} = \frac{ae}{db} =$ نسبة ثابتة

$(\angle\, rht) = (\angle\, a)$

$\therefore$ $\Delta\, rht$ متشابه فى جميع أوضاعه

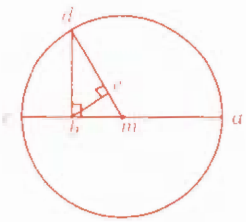
$\therefore$ $(\angle\, htr)$ ثابتة

$\therefore$ $\overleftrightarrow{tr}$ مستقيم ثابت وهو المحل الهندسي المطلوب.

---

(7) إيجاد الأوساط العددية والهندسية والتوافقية بين قطعتين:

(أ) طريقة بابوس:

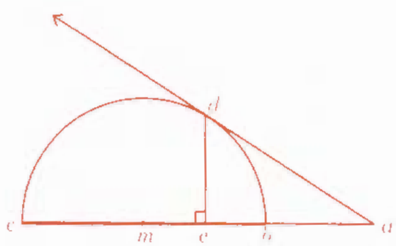


لتكن $\overline{bc}$ ، $\overline{ab}$ قطعتين مستقيمتين

ارسم دائرة قطرها $\overline{ac}$ ، وارسم $\overline{be} \perp \overline{dm}$ ، $\overline{bd} \perp \overline{ac}$

فيكون $\overline{de}$ ، $\overline{bd}$ ، $\overline{am}$ هى الأوساط المطلوبة

(ب) طريقة أخرى:



لتكن $\overline{ac}$ ، $\overline{ab}$ قطعتين مستقيمتين

ارسم دائرة قطرها $\overline{bc}$ وارسم $\overrightarrow{ad}$ مماسًا ،

$\overline{de} \perp \overline{ac}$ ،

$\therefore$ $\overline{ae}$ ، $\overline{ad}$ ، $\overline{am}$ هى الأوساط المطلوبة.

(8) مسألة عن المسبع المنتظم المرسوم داخل دائرة، وقد ذكرها ثابت بن قرة، ونسبت إلى أرخميدس.

$\overline{abcd}$ مستقيم فيه: $cd^2 = \overline{cb}.\overline{ca}$, $(\overline{ab})^2 = \overline{bd}.\overline{cd}$، وكل من $\overline{cd}$ ، $\overline{ab} < \overline{bc}$.

رسم المثلث bec بحيث يكون $\overline{ce} = \overline{cd}$ ، $\overline{be} = \overline{ab}$.

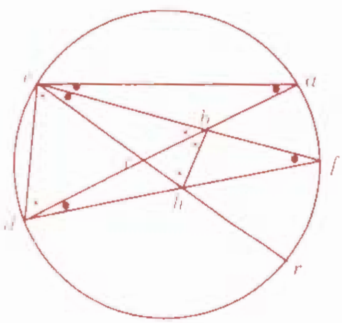
ثم رسمت الدائرة aed. $\overrightarrow{eb} \cap \overrightarrow{ec} = \{e\}$ وقطعا الدائرة الثانية في r، f على الترتيب.

أثبت أن $\overline{fr}$ هو ضلع المسبع المنتظم المرسوم داخل الدائرة.

$$(\overline{ce})^2 = (\overline{cd})^2 = \overline{cb}.\overline{ca}$$

$$\therefore (\angle\, ceb) = (\angle\, cae) = (\angle\, aeb) = (\angle\, adf) = (\angle\, dfe)$$

$$\therefore (\overset{\frown}{af}) = (\overset{\frown}{fr}) = (\overset{\frown}{ed})$$



ولكن:

$$(\overline{eb})^2 = (\overline{ab})^2 = \overline{bd}.\overline{cd} = \overline{eh}.\overline{ec}$$

$$\therefore (\angle\, ebc) = (\angle\, ehb) = (\angle\, edb) = (\angle\, der)$$

$$\therefore 2(\angle\, bae) = (\angle\, ebc) = (\angle\, der)$$

$$\therefore 2(\overset{\frown}{ed}) = (\overset{\frown}{ae}) = (\overset{\frown}{dr})$$

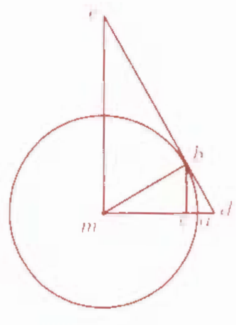
$$\therefore (\overset{\frown}{fr}) = \frac{1}{7} \text{ المحيط}$$

إيجاد النسب المثلثية الست لزاوية بقياس قطعة مستقيمة واحدة:

نجعل الزاوية amb زاوية مركزية في دائرة نصف قطرها الوحدة ثم نرسم $\overline{bc} \perp \overline{am}$

ثم نرسم المماس عند b، فيقطع $\overline{ma}$ في d،

العمودي عليه من m في e فيكون



طول $\overline{bc}$ هو الجيب، طول $\overline{cm}$ هو جيب التمام،

طول $\overline{bd}$ هو الظل، وطول $\overline{be}$ هو ظل التمام،

طول $\overline{dm}$ هو القاطع، طول $\overline{em}$ هو قاطع التمام.

(12) إثبات قانون الهنود لمساحة الشكل الرباعي الدائري:

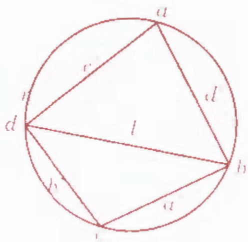
للأستاذ/ عبد العزيز غريب مدرس بالأقباط الثانوية ببورسعيد 1958م.

إثبات أن مساحة الشكل الرباعي الدائري الذي أطوال أضلاعه $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$.

وطول نصف محيطه = h هي: $\sqrt{h\,(h-\bar{a})\,(h-\bar{b})\,(h-\bar{c})\,(h-\bar{d})}$

العمل: نصل $\overline{bd}$ ونفرض أن طوله = l

البرهان:



مساحة الشكل الرباعي $abcd$

= مساحة $(\Delta\, cbd)$ + مساحة $(\Delta\, abd)$

$\because$ مساحة $(\Delta\, abd) = \frac{1}{2}\, \bar{c}\bar{d}\ \sin a,$

, مساحة $(\Delta\, cbd) = \frac{1}{2}\, \bar{a}\bar{b}\ \sin c,$

$\therefore$ مساحة الشكل $(abcd) = \frac{1}{2}\, \bar{c}\bar{d}\ \sin a + \frac{1}{2}\, \bar{a}\bar{b}\ \sin c$

$$= \frac{1}{2}\, \bar{c}\bar{d}\ \sin c + \frac{1}{2}\, \bar{a}\bar{b} \sin c$$

(لأن $\sin c = \sin a$ المكملة)

$$= \frac{1}{2}\ \sin c\,(\bar{c}\bar{d}+\bar{a}\bar{b}) = \frac{1}{2} \times 2 \sin \frac{c}{2} \cos \frac{c}{2}(\bar{c}\bar{d}+\bar{a}\bar{b})$$

$$= \sin \frac{c}{2}\ \cos \frac{c}{2}(\bar{c}\bar{d}+\bar{a}\bar{b})$$

$$= \sqrt{\sin^2 \frac{c}{2} \cos^2 \frac{c}{2}\,(\bar{c}\bar{d}+\bar{a}\bar{b})^2}$$

$$= \sqrt{\left(\bar{c}\bar{d}\, \sin^2 \frac{c}{2} + \bar{a}\bar{b}\, \sin^2 \frac{c}{2}\right)\left(\bar{c}\bar{d}\, \cos^2 \frac{c}{2} + \bar{a}\bar{b} \cos^2 \frac{c}{2}\right)}$$

$\because$ $(\angle\, a)$ تكمل $(\angle\, c)$ $\therefore$ $\frac{a}{2}$ تتم $\frac{c}{2}$

$$\therefore \sin\frac{c}{2} = \cos\frac{a}{2}, \quad \cos\frac{c}{2} = \sin\frac{a}{2}$$

$\therefore$ بالتعويض ينتج أن:

مساحة الشكل الرباعي $abcd$ =

$$= \sqrt{\left(\bar{c}\bar{d}\cos^2\frac{a}{2} + \bar{a}\bar{b}\sin^2\frac{c}{2}\right)\left(\bar{c}\bar{d}\sin^2\frac{a}{2} + \bar{a}\bar{b}\cos^2\frac{c}{2}\right)}$$

$$\because \cos a = 2\cos^2\frac{a}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{a}{2}$$

$$\cos c = 2\cos^2\frac{c}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{c}{2}$$

وفي $\Delta\, abd$: $\cos a = \dfrac{\bar{c}^2 + \bar{d}^2 - \bar{l}^2}{2\bar{c}\bar{d}}$ من حساب المثلثات

وفي $\Delta\, cbd$: $\cos c = \dfrac{\bar{a}^2 + \bar{b}^2 - \bar{l}^2}{2\bar{a}\bar{b}}$ من حساب المثلثات

$$\therefore 2\cos\frac{a}{2} = 1 + \cos a = 1 + \frac{\bar{c}^2 + \bar{d}^2 - \bar{l}^2}{2\bar{c}\bar{d}}$$

$$= \frac{2\bar{c}\bar{d} + \bar{c}^2 + \bar{d}^2 - \bar{l}^2}{2\bar{c}\bar{d}} = \frac{(\bar{c} + \bar{d})^2 - \bar{l}^2}{2\bar{c}\bar{d}}$$

$$\therefore 4\bar{c}\bar{d}\cos^2\frac{a}{2} = (\bar{c} + \bar{d})^2 - \bar{l}^2 \qquad \text{......} \ (2)$$

$$2\sin^2\frac{a}{2} = 1 - \cos a = 1 - \frac{\bar{c}^2 + \bar{d}^2 - \bar{l}^2}{2\bar{c}\bar{d}} = \frac{\bar{l}^2 - (\bar{c} + \bar{d})^2}{2\bar{c}\bar{d}}$$

$$\therefore 4\bar{c}\bar{d}\sin^2\frac{a}{2} = l^2 - (\bar{c} - \bar{d})^2 \qquad \text{......} \ (3)$$

وبنفس الطريقة يمكن إثبات أن:

$$\therefore 4\bar{a}\bar{b}\cos^2\frac{c}{2} = (\bar{a} + \bar{b})^2 - l^2 \qquad \text{......} \ (4)$$

$$\therefore 4\bar{a}\bar{b}\sin^2\frac{c}{2} = l^2 - (\bar{a} - \bar{b})^2 \qquad \text{......} \ (5)$$

$\therefore$ بجمع (2) ، (5) ينتج أن:

$$\therefore 4\bar{c}\bar{d}\sin^2\frac{a}{2} + 4\bar{a}\bar{b}\cos^2\frac{c}{2} = (\bar{c} + \bar{d})^2 - (\bar{a} + \bar{b})^2$$

$$\therefore \bar{c}\bar{d}\sin^2\frac{a}{2} + \bar{a}\bar{b}\cos^2\frac{c}{2} = \frac{(\bar{a} + \bar{b})^2 - (\bar{c} - \bar{d})^2}{4}$$

$\therefore$ بالتعويض في (1) ينتج أن:

مساحة الشكل الرباعي الدائري

$$= \sqrt{\frac{\left((\bar{c}+\bar{d})^2-(\bar{a}+\bar{b})^2\right)\left((\bar{a}+\bar{b})^2-(\bar{c}-\bar{d})^2\right)}{16}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\bar{c}+\bar{d}-\bar{a}+\bar{b})(\bar{c}+\bar{d}+\bar{a}-\bar{b})}{16}} \times \sqrt{\frac{(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}-\bar{d})(\bar{a}+\bar{b}-\bar{c}+\bar{d})}{16}}$$

وبفرض أن:

$$\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d} = 2h$$

$$\therefore\ \bar{c}+\bar{d}+\bar{b}-\bar{a} = 2h-2\bar{a}$$

$$\bar{c}+\bar{d}+\bar{a}-\bar{b} = 2h-2\bar{b},$$

$$\bar{a}+\bar{b}+\bar{d}-\bar{c} = 2h-2\bar{c},$$

$$\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}-\bar{d} = 2h-2\bar{d},$$

∴ بالتعويض ينتج أن:

مساحة الشكل الرباعي الدائري =

$$\sqrt{\frac{(2h-2\bar{a})(2h-2\bar{b})(2h-2\bar{c})(2h-2\bar{d})}{16}}$$

$$= \sqrt{\frac{16\,(h-\bar{a})(h-2)(h-2)(h-\bar{d})}{16}}$$

$$= \sqrt{(h-\bar{a})(h-\bar{b})(h-\bar{c})(h-\bar{d})}$$