الفصل الثانى

الرياضيون والماديون على مائدة المفاوضات

(1) الذى أفزعته مسألة بسيطة .

للأستاذين : شوقي شوقي موافي وسمير محمد عثمان

مدرسا الرياضيات الثانوى بالمنصورة 1996م

• **التمرين** :

أوجد مجموعة حل المعادلتين الآنيتين الاتيتين فى ح :

$x + \sqrt{y} = 5 \quad , \sqrt{x} + y = 17$

لقد عرض علي بعض الطلاب هذه المسألة وحينما قمت بحلها للطلاب المتميزين فى المرحلة الإعدادية حيث قد عرضت فى نفس الوقت على الأستاذ (شوقي شوقي موافي) والذى كان يعمل فى مدرسة أخرى . إذ نفاجأ بمعلم يدخل المدرسة صائحًا (وقد أخذ أجازة عارضة فى ذلك اليوم لذلك الموقف) قائلاً إن هذه المسألة ليس لها حل فى المرحلة الإعدادية ، وليس هناك ما يسمى بالطلاب المتفوقين ، بل كل الطلاب سواسية ، وهذه الأفكار قد تكون لكم أنتم ، ومثل هذه المسائل قد تُحرج البعض منا أثناء إعطاء الدروس الخصوصية ، فدعونا (نأكل عيش) كما واجه الأستاذ (شوقي شوقي) نقدًا لاذعًا أيضًا ..

إننا نترك للقارئ التعليق على ما سبق ونوجه لك عزيزي القارئ سؤالاً واحدًا .

أليس يعد سلوك مثل هذا المعلم صراعًا بين المادة والحياة وليس صراعًا بين المادة والعلم ؟ . . . . والآن نقدم لحل هذه المسألة :

الحل الأول

للأستاذ / شوقي شوقي موافي . وزميل آخر لم أعرف اسمه .

$x + \sqrt{y} = 5 \quad ...... (1) \qquad , \qquad y + \sqrt{x} = 17 \quad ...... (2)$

من (1) : $\sqrt{y} = 5 - x$

$\therefore\ y = (5 - x)^2 = 25 + x^2 - 10x$ ...... (3)

بالتعويض من (3) فى (2)

$\therefore\ x^2 - 10x + 25 + \sqrt{x} - 17 = 0$ $\qquad \therefore\ x^2 - 10x + 8 + \sqrt{x} = 0$

$\therefore\ (x^2 - 9x + 8) - (x - \sqrt{x}) = 0$

$\therefore\ (x - 1)(x - 8) - \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) = 0$

$\therefore\ (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)(x - 8) - \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) = 0$

$\therefore\ (\sqrt{x} - 1)[(\sqrt{x} + 1)(x - 8) - \sqrt{x})] = 0$

$\therefore\ \sqrt{x} - 1 = 0$ $\qquad \therefore\ \sqrt{x} = 1$ $\qquad \therefore\ x = 1$

$\because\ \sqrt{y} = 5 - x = 5 - 1 = 4$ $\qquad \therefore\ y = 16$

∴ الحل المشترك هو : $x = 1$ ، $y = 16$

∴ م . ح = $\{(1 ، 16)\}$

وإذا كان تحليل $(x - 1)$ فرق بين مربعين هو الذى أفزعه !

فنقدم له الحلين الآتيين :

حل ثان:

للأستاذ / المتولي عبده فرحات موجه رياضيات ثانوى 1999م[1] .

$\because\ x + \sqrt{y} = 5$ ...... (1) , $\quad y + \sqrt{x} = 17$ ...... (2)

نفرض أن : $\sqrt{x} = a \Leftarrow x = a^2$

نفرض أن : $\sqrt{y} = b \Leftarrow y = b^2$

∴ تكون المعادلتان على الصورة التالية :

$a^2 + b = 5$ ...... (3) , $\quad b^2 + a = 17$ ...... (4)

من (3) : $\therefore\ b = 5 - a^2$ .... (5)

$\therefore\ (5 - a^2)^2 + a = 17$ $\qquad \therefore\ a^4 - 10a^2 + 25 + a - 17 = 0$

---

(1) هو شقيق الأستاذ الفاضل / محمد عبده فرحات موجه الرياضيات بالدقهلية حاليًا .

$\therefore a^4 - 10a^2 + a + 8 = 0 \qquad \therefore a^4 - 10a^2 + a + 8 + 1 - 1 = 0$

$\therefore (a^4 - 1) - (10a^2 - a - 9) = 0$

$\therefore (a^2 - 1)(a^2 + 1) - (a - 1)(10a + 9) = 0$

$\therefore (a - 1)(a + 1)(a^2 + 1) - (a - 1)(10a + 9) = 0$

$\therefore (a - 1)[(a + 1)(a^2 - 1) - (10a + 9)] = 0$

$\therefore a - 1 = 0$ ومنها $a = 1$

$\therefore \sqrt{x} = a \qquad \therefore \sqrt{x} = 1 \qquad \therefore x = 1$

$\because b = 5 - a^2 \qquad \therefore b = 5 - 1 = 4,$

$\because \sqrt{y} = b \qquad \therefore \sqrt{y} = 4 \qquad \therefore y = 16$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{(1, 16)\}$

حل ثالث

للأستاذ/ سمير محمد عثمان الحفناوي م.ث إدارة شرق المنصورة 1996م.

$\because x + \sqrt{y} = 5 \quad ......(1), \qquad y + \sqrt{x} = 5$

$\sqrt{y} = 5 - x \quad \Rightarrow \quad y = (5 - x)^2 \quad ......(3)$

$\sqrt{x} = 17 - y \quad \Rightarrow \quad x = (17 - y)^2 \quad ......(5)$

نفرض أن: $z = 17 - y \quad \Leftarrow \quad y = (17 - z) \quad .....(5)$

من (3) ، (4)

$\therefore y = [5 - (17 - y)^2]^2 = (5 - z^2)^2 \qquad \therefore y = z^4 - 10z^2 + 25$

$\therefore 17 - z = z^4 - 10z^2 + 25 \qquad \therefore z^4 - 10z^2 + z + 8 = 0$

$\therefore z^4 - 10z^2 + z + 8 + 1 - 1 = 0$

ونكمل الحل كما سبق .. ونعوض بقيمة $z = 1$ لإيجاد قيم y ، x

(2) غيرة واعتكاف تحقق الذات:

لقد عُرض على الأستاذ / رمضان إبراهيم عبد الرحمن الضباع ..

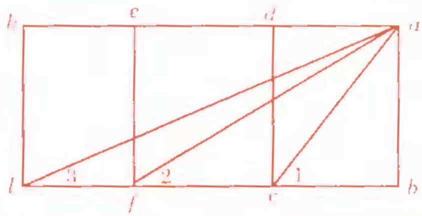
مدرس رياضيات بمدرسة الشهيد حمزة السحيتي بدكرنس 1988م ، هذه المسألة والتى جاء بها من مدرس آخر بقرية المرازيق مركز البدرشين محافظة الجيزة وهى:

• **التمرين**:

فى الشكل المقابل:

$abcd$ ، $dcfe$ ، $eflk$ ثلاثة مربعات

آثبت أن : $(\angle 1) = (\angle 2) + (\angle 3)$



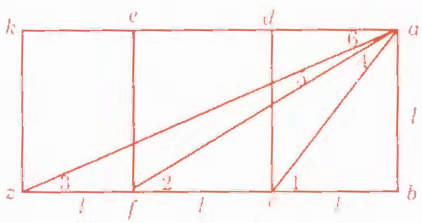
ولقد تناقشنا نحن مدرسى الرياضيات وقتئذ حتى أن الأستاذ / عبد العظيم شبكة مدرس رياضيات ثانوي بمدرسة حسين حماد الثانوية سنة 1988م قد أخذ إجازة من العمل لحل هذه المسألة بطريقة أو بأخرى ، والآن نقدم بعضًا من هذه الحلول والتى اعتكفنا حتى توصلنا لها ، نقدمها لكم في غياب الثقافة المتخصصة والغيرة العلمية عسى أن ننهض سويًا بهذا الفكر الجديد بمستوى معلم الرياضيات .

قام بحل هذا التمرين:

الأستاذ / سمير محمد عثمان الحفناوي

مدرس رياضيات بمدرسة الشهيد حمزة الإعدادية بدكرنس 1988م .

أولا :



$\because$ $\overline{ac}$ قطر فى المربع $abcd$

$\therefore (\angle 1) = 45°$

$\therefore$ المطلوب إثبات أن:

$(\angle 2) + (\angle 3) = (\angle 1) = 45°$

أى يمكن إثبات أن : $\tan(\angle 2 + \angle 3) = \tan(45°) = 1$

$$\tan(\angle 2 + \angle 3) = \frac{\tan\angle 2 + \tan\angle 3}{1 - \tan\angle 2 \tan\angle 3} = \frac{\frac{l}{2l} + \frac{l}{3l}}{1 - \frac{l}{2l} \times \frac{l}{3l}} = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1$$

وهو المطلوب.

ثانيا:

من هندسة الشكل نجد أن: $az = l\sqrt{10}$ ، $af = l\sqrt{5}$ ، $ac = l\sqrt{2}$

المطلوب إثبات أن: $\tan(\angle 2 + \angle 3) = \tan(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\sin\angle 2 = \frac{1}{\sqrt{5}},\quad \cos\angle 2 = \frac{2}{\sqrt{5}},\quad \sin\angle 3 = \frac{1}{\sqrt{10}},\quad \cos\angle 3 = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore \sin(\angle 2 + \angle 3) = \sin\angle 2 \cos\angle 3 + \cos\angle 2 \sin\angle 3$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{50}} + \frac{2}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

وهو المطلوب.

ثالثا:

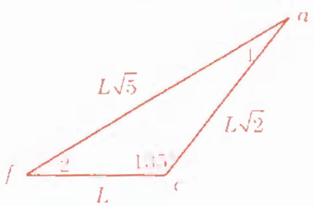
$$\cos(\angle 2 + \angle 3) = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \cos\angle 2 \cos\angle 3 - \sin\angle 2 \sin\angle 3 = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{50}} - \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

وهو المطلوب.

رابعا:



من هندسة الشكل يمكن إثبات أن:

$$(\angle 2) + (\angle 3) = (\angle 4) + (\angle 5) + (\angle 6)$$

أي أن المطلوب إثبات أن:

$$(\angle 4) + (\angle 5) + (\angle 6) = 45°$$

لإيجاد $(\angle 4)$ فى $\Delta\, acf$ نحل المثلث acf كالآتي:

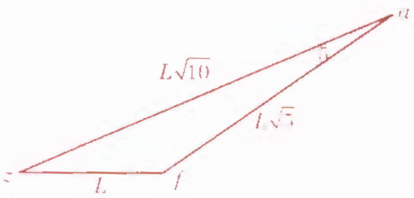
$$\frac{\bar{a}}{\sin a} = \frac{\bar{c}}{\sin c} \qquad \therefore \frac{l}{\sin a} = \frac{l\sqrt{5}}{\sin 135^\circ}$$

$$\therefore \frac{1}{\sin a} = \frac{\sqrt{5}}{\sin 45^\circ} \qquad \therefore \frac{1}{\sin a} = \frac{\sqrt{5}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \qquad \therefore \frac{1}{\sin a} = \frac{\sqrt{10}}{1}$$

$$\therefore \sin a = \frac{1}{\sqrt{10}} = \qquad \therefore \sin \angle 4 = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$(\angle 4) = ...^\circ$

لإيجاد $(\angle 5)$ نحل المثلث afz بمعلومية أطوال أضلاعه



$$\cos a = \frac{\bar{f}^2 + \bar{z}^2 - \bar{a}^2}{2\bar{f}\,\bar{z}}$$

$$= \frac{10l^2 + 5l^2 - l^2}{2 \times l\sqrt{10} \times l\sqrt{5}}$$

$$= \frac{14}{10\sqrt{2}} = \frac{7}{5\sqrt{2}}$$

$$\therefore (\angle 5) = ...^\circ$$

من الشكل: $\cos \angle 6 = \cos \angle 3 = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

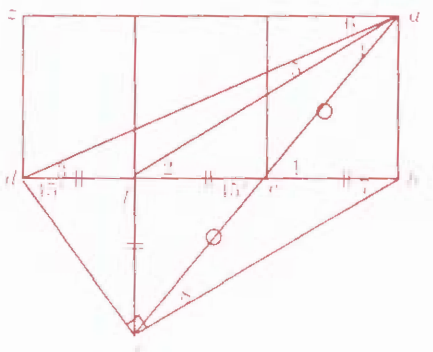
$\therefore (\angle 4) = ...^\circ, \quad (\angle 5) = ...^\circ, \quad (\angle 6) = ...^\circ$

$\therefore (\angle 4) + (\angle 5) + (\angle 6) = ...^\circ$ وهو المطلوب

حل هندسي

للأستاذ / عبد العظيم شبكة

مدرس رياضيات بمدرسة حسين حماد الثانوية بنات بد كرنس 1988م .



العمـــل:

نرسم $\overline{ae}$ ، $\overline{dc} \perp \overline{ae}$ يقطعه فى c

البــرهـان:

من هندسة الشكل نستنتج أن: $ce = cd$

$\because (\angle bac) = (\angle bdc)$

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة $\overline{bc}$ وفي جهة واحدة

$\therefore$ الشكل $abcd$ رباعي دائري

$\therefore (\angle 8) = (\angle 3)$ (نظرية)

$\because (\angle 1) = (\angle ced) = 45^\circ$ بالتقابل بالرأس

فيكون المطلوب $(\angle ced) = (\angle 2) + (\angle 3)$

ولكن $(\angle 3) = (\angle 6)$ بالتبادل لأن $\overline{ad}$ قطر فى المستطيل $abdz$

$(\angle 2) = (\angle 3) + (\angle 5), \quad (\angle 1) = (\angle 2) + (\angle 4)$

$\therefore$ نثبت أن: $(\angle 1) = (\angle ced) = (\angle 4) + (\angle 5) + (\angle 6)$

$\because$ $(\angle ced)$ خارجة عن $\Delta\, ebc$

$\therefore (\angle ced) = (\angle 7) + (\angle 8)$

$\therefore (\angle 8) = (\angle 3) = (\angle 6), \quad (\angle 7) = (\angle 4) + (\angle 5)$

$\therefore (\angle 8) + (\angle 7) = (\angle 4) + (\angle 5) + (\angle 6) = 45^\circ$

وهو المطلوب

وقد قام الأستاذ/ رمضان عبد الرحمن (مدرسة الشهيد حمزة السحيتي ع. بدكرنس) بحل مشابه بعد إضافة ثلاثة مربعات أسفل المربعات الثلاثة الأولى وتشترك فى الأضلاع $\overline{fl}$ ، $\overline{cf}$ ، $\overline{bc}$

(3) مسائل على هيئة ألغاز:

للأستاذ/ سمير محمد عثمان الحفناوي

مدرس رياضيات ثانوي بمدرسة الملك الكامل بالمنصورة 1996م.

• تمرين (1):

إذا كانت: $9^x = 4$ فأوجد قيمة: $\frac{27^x+1}{3^x+3}$

الحل:

$\because 9^x = 4 \qquad \therefore 9^{2x} = 2^2 \qquad \therefore (3^x)^2 = 2^2 \qquad \therefore 3^x = 2$

$\because 27^x = (3^3)^x = (3^x)^3 = (2^3) = 8$

$$\therefore \frac{27^x+1}{3^x+3} = \frac{8+1}{2+1} = \frac{9}{3} = 3$$

• تمرين (2):

إذا كان: $x^y = y^x$ فأثبت أن: $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}} = x^{\frac{x}{y}-1}$

الحل:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}} = \frac{x^{\frac{x}{y}}}{y^{\frac{x}{y}}} = \frac{x^{\frac{x}{y}}}{\left(y^x\right)^{\frac{1}{y}}} = \frac{x^{\frac{x}{y}}}{\left(x^y\right)^{\frac{1}{y}}}$$

عوضنا عن y^x بالقيمة x^y من المعطيات.

$$\therefore \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}} = \frac{x^{\frac{x}{y}}}{x} = x^{\frac{x}{y}-1}$$

وهو المطلوب

• تمرين (3):

إذا كان: $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}} = x^{\frac{x}{y}-1}$ فأثبت أن: $x^y = y^x$

الحل:

$\because \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}} = x^{\frac{x}{y}-1} \qquad \therefore \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}} = x^{\frac{x}{y}} \times x^{-1} = \frac{x^{\frac{x}{y}}}{x}$

$\therefore \dfrac{x^{\frac{x}{y}}}{y^{\frac{x}{y}}} = \dfrac{x^{\frac{x}{y}}}{x}$ $\quad \therefore \dfrac{1}{y^{\frac{x}{y}}} = \dfrac{1}{x}$ $\quad \therefore y^{\frac{x}{y}} = x$ $\quad \therefore \left(y^{\frac{x}{y}}\right)^{y} = x^{y}$

$\therefore x^{y} = y^{x}$ وهو المطلوب

• تمرين (4):

إذا كان: $x^{\frac{1}{m+1}} = 4$ ، $x^{\frac{1}{m}} = 8$ أوجد قيمة m ، x

الحل:

$x^{\frac{1}{m}} = 8 \qquad \therefore x^{\frac{1}{m}} = 2^{3} \qquad \therefore \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{m} = (2^{3})^{m}$

$\therefore x = 2^{3m}$ ...... (1) $\quad , \quad \because x^{\frac{1}{1+m}} = 4 = 2^{2}$

$\therefore \left(x^{\frac{1}{1+m}}\right)^{1+m} = \left(2^{2}\right)^{1+m} \qquad \therefore x = 2^{2m+2}$ ...... (2)

من (1) ، (2): $\therefore 3m = 2m + 2 \qquad \therefore m = 2$

$\therefore x = 2^{3m} = 2^{6} = 64$

• تمرين (5):

أثبت أن: $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$

الحل:

$\because 4 - 3 = 3 - 2$ ، بتحليل الطرفين كفرق بين مكعبين

$\therefore \left(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{9}\right) = \left(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}\right)$

وعندما يكون: $ab = cd$ وكان $a > c$ يكون $b > d$

وحيث أن: $\left(\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{9}\right) > \left(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}\right)$

$\therefore \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$

• تمرين (6):

إذا كان: $x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}}$ أوجد قيمة x

الحل:

بتربيع الطرفين $\because x^{2} = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}}$

$\therefore x^2 = 2 + x \qquad \therefore x^2 - x - 2 = 0 \qquad \therefore (x-2)(x+1) = 0$

$\therefore x = 2 \quad , \quad x = -1$ مرفوضة

• تمرين (7):

إذا كان: $2^x = 3^y = 12^z$ فأثبت أن: $xy = z(x + 2y)$

الحـــل:

$\because 2^x = 3^y \qquad \therefore 2 = 3^{\frac{y}{x}}$

$\because 3^y = 12^z \qquad \therefore 3^y = (2^2 \times 3)^z = 2^{2z} \times 3^z$

$$\therefore 3^y = \left(3^{\frac{y}{x}}\right)^{2z} \times 3^z = 3^{\frac{2zy}{x}+z}$$

$\therefore y = \dfrac{2zy}{x} + z \qquad \therefore xy = 2zy + xz \qquad \therefore xy = z(2y + x)$

• تمرين (8):

إذا كان: $b^3 = zc$ ، $a^x = b^y = c^z$ أثبت أن: $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{3}{y}$

الحـــل:

$\because a^x = b^y \qquad \therefore a^{3x} = b^{3y}$

$\therefore a^{3x} = \left(b^3\right)^y = (ac)^y = a^y c^y \qquad \therefore a^{3x-y} = c^y$

$\therefore \left(a^{3x-y}\right)^y = \left(c^y\right)^y \qquad \therefore \left(a^y\right)^{3x-y} = c^{y^2} \quad \ldots\ldots (1)$

وأيضًا : $c^z = b^y \qquad \therefore c^{3z} = b^{3y}$

$\therefore c^{3z} = \left(b^3\right)^y = a^y c^y \qquad \therefore c^{3z-y} = a^y \quad \ldots\ldots (2)$

بالتعويض من (2) فى (1) عن a^y

$\therefore \left(c^{3z-y}\right)^{3x-y} = c^{y^2} \qquad \therefore (3z - y)(3x - y) = y^2$

$\therefore 9xz + y^2 - 3xy - 3zy = y^2$

$\therefore 3xz = xy + yz$

$\therefore \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{3}{y}$ بالقسمة على xyz للطرفين

حل آخر:

$b^y = c^z \qquad \therefore b^{3y} = c^{3z} \qquad \therefore c^{3z-y} = a^y \quad \ldots\ldots (1)$

$\because\ a^x = c^z \qquad \therefore\ (a^x)^y = (c^z)^y$

$\therefore\ (a^x)^y = c^{zy} \qquad ......\ (2)$

بالتعويض من (1) ، (2) عن a^y

$\therefore\ (c^{3z-y})^x = c^{zy} \qquad \therefore\ x(3z - y) = zy \qquad \therefore\ 3xz - xy = zy$

$\therefore\ 3xz = xy + yz$ بالقسمة على xyz $\therefore\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{3}{y}$

حل ثالث:

$\because\ a^x = b^y \qquad \therefore\ a = b^{\frac{y}{x}} \qquad \because\ c^z = b^y \qquad \therefore\ c = b^{\frac{y}{z}}$

$\because\ b^3 = ac \qquad \therefore\ b^3 = b^{\frac{y}{x}} \times b^{\frac{y}{z}} \qquad \therefore\ 3 = \frac{y}{x} + \frac{y}{z}$

$\therefore\ 3xz = xy + yz$ بالقسمة على xyz $\therefore\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{3}{y}$

حل رابع:

$\because\ b^3 = ac \qquad \therefore\ (b^3)^{xz} = (ac)^{xz} \qquad \therefore\ b^{3xz} = (a^x)^z \times (c^z)^x$

$\therefore\ b^{3xz} = (b^y)^z \times (c^y)^x \qquad \therefore\ b^{3xz} = b^{yz+yx}$

$\therefore\ 3xz = xy + yz$ بالقسمة على xyz $\therefore\ \frac{3}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$

حل خامس:

$\because\ a^x = b^y = c^z \qquad \therefore\ x \log a = y \log b = z \log c = k\ , \qquad \because\ b^3 = ac$

$\therefore\ 3 \log b = \log a + \log c \qquad ......\ (1)$

$\because\ \log a = \frac{k}{x}, \log b = \frac{k}{y}, \log c = \frac{k}{z}$ بالتعويض فى (1)

$\therefore\ 3 \times \frac{k}{y} = \frac{k}{x} + \frac{k}{z} \qquad \therefore\ \frac{3}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$ (وهو المطلوب)

ملاحظة: يمكن حل المسألة السابقة بنفس الطريقة

مثلا: نفرض أن: $x \log 2 = y \log 3 = z \log 12 = m$

$\because\ x \log 2 = m \qquad \Rightarrow \qquad \log 2 = \frac{m}{x}$

$\because\ y \log 3 = m \qquad \Rightarrow \qquad \log 3 = \frac{m}{y} \qquad \because\ z \log 12 = m$

$\therefore\ z \log(2^2 \times 3) = z[2 \log 2 + \log 3] = z\left(2 \times \frac{m}{x} + \frac{m}{y}\right) = m$

$\therefore\ z\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1$ بالضرب فى xy $\therefore\ z[2y + x] = xy$

• تمرين (9):

أوجد مجموعة الحل المعادلة: $2x^3 - 5x^2 + x + 2 = 0$

الحـــل:

$2x^3 - 5x^2 + x + 2 = 0\ ,\qquad 2x^3 + x + 2 - 5x^2 + 5 - 5 = 0$

$-5(x^2 - 1) + 2x^3 + x - 3 = 0,\qquad 2x^3 + x - 3 - 5(x^2 - 1) = 0$

$(2x^3 - 2x) + 2x + x - 3 - 5(x - 1)(x + 1) = 0$

$2x(x^2 - 1) + (3x - 3) - 5(x - 1)(x + 1) = 0$

$2x(x - 1)(x + 1) + 3(x - 1) - 5(x - 1)(x + 1) = 0$

$(x - 1)[2x(x + 1) + 3 - 5(x + 1)] = 0$

$(x - 1)[2x^2 + 2x + 3 - 5x - 5] = 0$

$(x - 1)(2x^2 - 3x - 2) = 0,\qquad (x - 1)(2x + 1)(x - 2) = 0$

$\therefore\ x = 1,\quad x = 2,\quad x = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ مجموعة الحل: $\left\{1,\ 2,\ -\frac{1}{2}\right\}$

حل آخر: عن طريق نظرية الباقي (المعاملات المنعزلة)

نكتب معاملات المعادلة السابقة حسب الترتيب ونختبر ما إذا كان (1) حلاً أم لا وهكذا ...

فإذا كان الباقي = صفر فهو يعتبر حلاً كالآتي:

		2	1	5-	2	1
		2-	3-	2		
أحد الحلول	$\therefore\ x = 1$	الباقي = صفر	2-	3-	2	2
			2	4		
حل ثان	$\therefore\ x = 2$	الباقي = صفر		1	2	

$\because\ 2x + 1 = 0 \qquad \therefore\ x = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ مجموعة الحل: $\left\{1,\ 2,\ -\frac{1}{2}\right\}$

• **تمرين (10):**

أوجد مجموعة الحل للمعادلة: $x^3 + x^2 = 36$ ، $x \in R$ ،
R مجموعة الأعداد الحقيقية.

الحل:

$x^3 + x^2 - 36 = 0$, $\qquad (x^3 - 27) + (x^2 - 9) = 0$

$(x - 3)(x^2 + 3x + 9) + (x - 3)(x + 3) = 0$

$\therefore (x - 3)[x^2 + 4x + 9 + 3] = 0$

$\therefore (x - 3)(x^2 + 4x + 12) = 0 \qquad \therefore x = 3$

طريقة ثانية:

$\because x^3 + x^2 = 36 \qquad \therefore x^2(x + 1) = 9 \times 4$

$\therefore x^2(x + 1) = 3^2(3 + 1)$ بالمقارنة $\therefore x = 3$

• **تمرين (11):**

أوجد مجموعة الحل للمعادلة: $x(x + 2)(x - 1)(x + 3) = 40$ حيث $x \in R$ ،
R مجموعة الأعداد الحقيقية.

الحل:

$x(x + 2)(x - 1)(x + 3) = 40$, $\qquad \therefore (x^2 + 2x)(x^2 + 2x - 3) = 40$

نفرض أن: $m = x^2 + 2x$

$\therefore m(m - 3) = 40 \qquad \therefore m^2 - 3m - 40 = 0$

$\therefore (m - 8)(m + 5) = 0 \qquad \therefore m = 8, \quad m = -5$

$\therefore x^2 + 2x = 8$ ...... (1), $\qquad x^2 + 2x = -5$ ...... (2)

بحل كل من (1) ، (2) نحصل على مجموعة حل المعادلة الأصلية

• **تمرين (12):**

إذا كان: $17^y = 11$ ، $11^x = 17$ فأوجد قيمة xy

الحل:

$\because 11^x = 17 \Rightarrow 11 = 17^{\frac{1}{x}}$ ..... (1) , $\because 11 = 17^y$ ..... (2)

من (1) ، (2)

$$\therefore 17^{\frac{1}{x}} = 17^{y} \quad , \frac{1}{x} = y \qquad \therefore xy = 1$$

حل اخر:

$$\because 11^{x} = 17 \qquad \therefore x \log 11 = \log 17 \qquad \therefore x = \frac{\log 17}{\log 11}$$

$$\because 17^{y} = 11 \qquad \therefore y \log 17 = \log 11 \qquad \therefore y = \frac{\log 11}{\log 17}$$

$\therefore xy = \frac{\log 17}{\log 11} \times \frac{\log 11}{\log 17} = 1$ وهو المطلوب

• تمرين (13):

إذا كان: $c^2 = (l^x \times m^y)^z$ ، $m = c^x$ ، $l = c^y$ فأثبت أن: $xyz = 1$

الحـــل:

$$\because c^2 = (l^x \times m^y)^z \qquad \therefore c^2 = (l)^{xz} \times (m)^{yz}$$

$$\therefore c^2 = (c^y)^{xz} \times (c^x)^{yz} \qquad \therefore c^2 = c^{xyz+xyz}$$

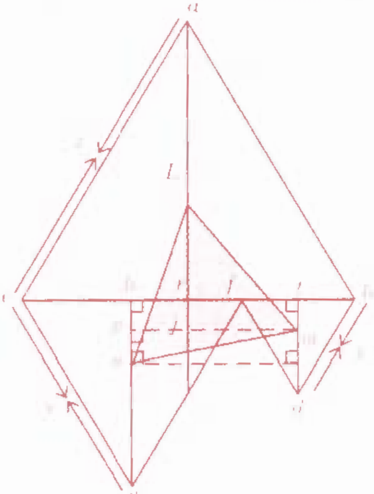
$$\therefore 2xzy = 2 \qquad \therefore xzy = 1$$

وهناك حلول أخرى أيضًا.

• تمرين (14):

$\Delta\, abc$ متساوي الأضلاع، $\Delta\, cef$ ، $\Delta\, bdf$ متساويا الأضلاع أيضا ، l, m, n هي نقاط تلاقي متوسطات المثلثات على الترتيب. أثبت ان $\Delta\, lmn$ متساوي الأضلاع.

الحـــل:



نفرض أن طول ضلع $\Delta\, cba$ = z وحدة طول

نفرض أن طول ضلع $\Delta\, bdf$ = x وحدة طول

نفرض أن طول ضلع $\Delta\, cef$ = y وحدة طول

العمـــل: كما بالشكل

$$y + x = z$$

$$\because \overline{mt} = \frac{1}{3}\,\overline{td} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$\therefore \overline{mt} = \frac{\sqrt{3}}{6}x$$

$\overline{lr} = \frac{\sqrt{3}}{6} z = \frac{\sqrt{3}}{6}(x+y)$ بالمثل: $\overline{hn} = \frac{\sqrt{3}}{6} y$

$\overline{mg} = \overline{th} = \frac{1}{2}(x+y)$ $\because\ \overline{lj} = \overline{lr} + \overline{mt} = \frac{\sqrt{3}}{6}(2x+y),$

$\overline{gn} = \overline{hn} - \overline{mt} = \frac{\sqrt{3}}{6}(y-x)$

$\overline{tr} = \frac{1}{2} z - \frac{1}{2} x = \frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{2} x = \frac{1}{2} y$ $\therefore\ \overline{mj} = \overline{tr} = \frac{1}{2} y$

$\overline{rh} = \frac{1}{2} z - \frac{1}{2} y = \frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{2} y$ $\therefore\ \overline{fn} = \overline{rh} = \frac{1}{2} x$

$\overline{lf} = \overline{lr} + \overline{nh} = \frac{\sqrt{3}}{6}(x+y) + \frac{\sqrt{3}}{6}(y)$ $\therefore\ \overline{lf} = \frac{\sqrt{3}}{6}(x+2y)$

فيه $\Delta\, mgn$:

$$(\overline{mn})^2 = (\overline{mg})^2 + (\overline{gn})^2$$

$$(\overline{mn})^2 = \frac{1}{4}(x+y)^2 + \frac{3}{36}(y-x)^2$$

$$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{12}y^2 - \frac{1}{6}xy$$

$$\therefore\ (\overline{mn})^2 = \frac{1}{3}(x^2 + y^2 + xy) \qquad \ldots\ldots (1)$$

فيه $\Delta\, ljm$:

$$(\overline{lm})^2 = (\overline{lj})^2 + (\overline{mj})^2 = \frac{3}{36}(2x+y)^2 + \frac{1}{4}y^2$$

$$\therefore\ (\overline{lm})^2 = \frac{1}{3}(x^2 + y^2 + xy) \qquad \ldots\ldots (2)$$

فيه $\Delta\, lfn$:

$$(\overline{ln})^2 = (\overline{lf})^2 + (\overline{nf})^2 = \frac{3}{36}(x+2y)^2 + \frac{1}{4}x^2$$

$$= \frac{1}{12}(x^2 + 4y^2 + 4xy) + \frac{1}{4}x^2$$

$$\therefore\ (\overline{ln})^2 = \frac{1}{3}(x^2 + y^2 + xy) \qquad \ldots\ldots (3)$$

من (1) ، (2) ، (3)

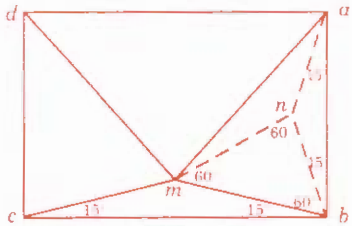
$$\therefore\ \overline{ml} = \overline{mn} = \overline{ln}$$

$\therefore\ \Delta\, mln$ متساوي الأضلاع .

• **تمرين (15):**

$abcd$ مربع ، m نقطة داخله بحيث: $(\angle\ mbc) = (\angle\ mcb) = 15^\circ$
أثبت أن: $\Delta\ amd$ متساوي الأضلاع.

الحـــل:



العـمـــل:

نأخذ n داخل المربع بحيث
$(\angle\ nab) = (\angle\ nba) = 15^\circ$ ونصل $\overline{mn}$

$\therefore$ $\Delta\Delta\ nab, mcb$ فيهما: $\left\{ \begin{array}{l} ab = bc \\ (\angle\ abn) = (\angle\ mcb) = 15^\circ \\ (\angle\ nab) = (\angle\ mbc) = 15^\circ \end{array} \right.$

$\therefore$ $\Delta\ mcb$ ، $\Delta\ nab$ $\therefore$ ينطبقان وينتج أن: $bn = bm$

$\because\ (\angle\ abn) = (\angle\ cbm) = 15^\circ$

$\therefore\ (\angle\ bnm) = (\angle\ bmn) = 60^\circ$

$\therefore$ $\Delta\ bnm$ متساوي الأضلاع $\therefore\ (\angle\ anm) = 150^\circ$

$\therefore$ $\Delta\Delta\ abn, amn$ فيهما: $\left\{ \begin{array}{l} bn = nm \\ \overline{an} \text{ مشترك} \\ (\angle\ anb) = (\angle\ anm) = 150^\circ \end{array} \right.$

$\Delta\Delta$ متطابقان وينتج $ab = am$ ...... (1)

وأيضًا $\Delta\Delta\ abm, dcm$ فيهما: $\left\{ \begin{array}{l} bm = mc \\ ab = dc \\ (\angle\ abm) = (\angle\ dcm) = 75^\circ \end{array} \right.$

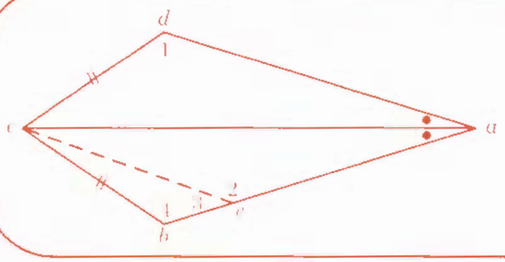
$\therefore$ $\Delta\Delta$ متطابقان وينتج أن: $am = md$ ..... (2)

من (1) ، (2)

$\therefore\ am = md = ad$

$\therefore$ $\Delta\ amd$ متساوي الأضلاع

• تمرين (16):



في الشكل المقابل: $cd = bc$ ،

$ab < ad$ ، $\overline{ac}$ ينصف $(\angle bad)$

أثبت أن :

الشكل $abcd$ رباعي دائري

الحـل:

نأخذ $e \in ab$ ، بحيث $ad = ae$ ونصل $\overline{ce}$

$\therefore \Delta\Delta\ aec, ade$ فيهما: $\left\{ \begin{array}{l} ad = ae \\ \overline{ac} \text{ مشترك} \\ (\angle dac) = (\angle bac) \end{array} \right.$

$\therefore \overline{cd} = \overline{ce}$ $\qquad \therefore \overline{ce} = \overline{cb}$ $\qquad \therefore (\angle 3) = (\angle 4)$ ..... (1)

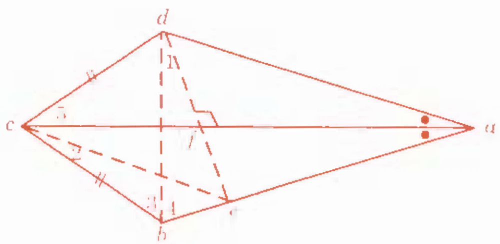
وأيضًا ينتج من التطابق: $(\angle 2) = (\angle 1)$ ..... (2)

بجمع (1) ، (2): $(\angle 3) + (\angle 2) = (\angle 1) + (\angle 4)$

ولكن: $(\angle 2) + (\angle 3) = 180°$

$\therefore (\angle 1) + (\angle 4) = 180°$ وهما زاويتان متقابلتان

$\therefore$ الشكل $abcd$ رباعي دائري



حل آخر:

نأخذ $e \in ab$ ، بحيث $ae = ad$

ونصل $\overline{ce}$ ، $\overline{db}$

$\Delta\ aed$ متساوي الساقين ، $\overline{af}$ ينصف $(\angle a)$

$\therefore \overline{af} \perp \overline{ed}\ ,\ \overline{ef} = \overline{fd}$

$\therefore \Delta\ dce$ متساوي الساقين

$\therefore dc = ec = bc$

$\therefore$ c مركز الدائرة المارة بالنقطة b ، e ، d

$\therefore (\angle 1) \times 2 = (\angle 2)$

لأنها زاوية مركزية تشترك مع المحيطية فى القوس eb

$\because (\angle dfc) = 90^\circ, \qquad (\angle adb) = (\angle abd)$

$\therefore (\angle 1) + (\angle 3) + (\angle 5) = 90^\circ \qquad ...... (1)$

$\because ce = cb \qquad \therefore (\angle b) = (\angle ceb)$

$\therefore 2(\angle 4) + 2(\angle 3) + (\angle 2) = 180^\circ$

لكن: $2 \times (\angle 1) = (\angle 2)$

$\therefore 2(\angle 1) + 2(\angle 3) + 2(\angle 4) = 180^\circ$

$\therefore (\angle 1) + (\angle 3) + (\angle 4) = 90^\circ \qquad ...... (2)$

من (1) ، (2)

$\therefore (\angle 4) = (\angle 5) \qquad \therefore (\angle abd) = (\angle acd)$

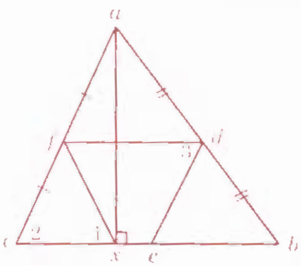
وهما مرسومتان على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة منها.

$\therefore$ الشكل $abcd$ رباعي دائري.

• **تمرين (17):**

$\Delta\, abc$ فيه: f ، e ، d منتصفات أضلاعه $\overline{ca}$ ، $\overline{bc}$ ، $\overline{ab}$ على الترتيب $\overline{ax} \perp \overline{bc}$ قطعه في x . أثبت أن: $edfx$ رباعي دائري

الحل:



$\because\ \overline{df} \parallel \overline{bc}\,,\ = \frac{1}{2}\,\overline{bc}$

$\because\ \overline{de} \parallel \overline{ac}\,,\ = \frac{1}{2}\,\overline{ac}$

$\Delta\, axc$ قائم الزاوية في x

$\therefore\ \overline{xf} = \frac{1}{2}\,\overline{ac}$ $\qquad$ $\therefore\ \overline{de} = \overline{xf}$

$\therefore$ $edfx$ شبه منحرف متساوي الساقين $\qquad$ $\therefore$ الشكل $edfx$ رباعي دائري

حل آخر:

$\because\ \overline{de} \parallel \overline{fc},\ \ \overline{df} \parallel \overline{ec}$

$\therefore$ الشكل $decf$ متوازي أضلاع

$\therefore\ (\angle 2) = (\angle 3)$ $\qquad$ ولكن $\qquad$ $fx = fc$

$\therefore\ (\angle 2) = (\angle 1)$ $\qquad$ $\therefore\ (\angle 1) = (\angle 3)$

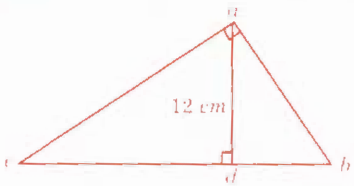
وهي خارجة عن الشكل الرباعي $edfx$ $\qquad$ $\therefore$ الشكل $edfx$ رباعي دائري

• تمرين (18):

Δabc قائم الزاوية في a ، $\overline{ad} \perp \overline{bc}$ ، $\overline{ad} = 12\text{ cm}$ ، محيط $\Delta abc = 60\text{ cm}$

أوجد أطوال أضلاعه.

الحل:



$\overline{ad} = \dfrac{\overline{ab} \times \overline{ac}}{bc}$

$(\overline{ab})^2 + (\overline{ac})^2 = (\overline{bc})^2$ ...... (1)

$\therefore \overline{ab} \times \overline{ac} = \overline{ad} \times \overline{bc}$ $\qquad \therefore \overline{ab} \times \overline{ac} = 12\overline{bc}$ ...... (2)

$\because \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ac} = 60$ $\qquad \therefore \overline{ab} + \overline{ac} = 60 - \overline{bc}$ (بتربيع الطرفين)

$\therefore (\overline{ab})^2 + (\overline{ac})^2 + 2(\overline{ab}).(\overline{ac}) = (60)^2 - 120\overline{bc} + (\overline{bc})^2$ ...... (3)

بالتعويض من (1) ، (2) في (3)

$\therefore (\overline{bc})^2 + 24\overline{bc} = (60)^2 - 120\overline{bc} + (\overline{bc})^2$

$\therefore 144\overline{bc} = 3600$ $\qquad \therefore \overline{bc} = 25\text{ cm}$

$\because (\overline{ad})^2 = \overline{bd} \times \overline{dc}$ $\qquad \therefore 144 = \overline{bd} \times (25 - \overline{bd}) = 25\overline{bd} - (\overline{bd})^2$

$\therefore (\overline{bd})^2 - 25\overline{bd} + 144 = 0$ $\qquad \therefore (\overline{bd} - 9)(\overline{bd} - 16) = 0$

$\therefore \overline{bd} = 16\text{ cm}$ أو $\therefore \overline{bd} = 9\text{ cm}$

أولاً: عندما $\overline{bd} = 9\text{ cm}$

$\therefore (\overline{ab})^2 = \overline{bd}\,.\,\overline{bc} = 9 \times 25$ $\qquad \therefore \overline{ab} = 15\text{ cm}$

$\therefore (\overline{ac})^2 = \overline{dc}\,.\,\overline{bc} = 16 \times 25$

$\therefore \overline{ac} = 20\text{ cm}$

ثانيًا: عندما $\overline{bd} = 16\text{ cm}$ يكون

$\overline{ab} = 20\text{ cm}, \quad \overline{ac} = 15\text{ cm}$

$\therefore$ أطوال أضلاع المثلث abc هي $25\text{ cm}, 20\text{ cm}, 15\text{ cm}$