الباب الأول
عمق التخصص في الرياضيات

الفصل الأول
السياحة في ميادين الرياضيات

الفصل الثانى
الرياضيون والماديون على مائدة المفاوضات

الفصل الأول

السياحة في ميادين الرياضيات

(1) خمسة عشر حلاً لتمرين هندسي واحد.

• التمرين :

Δcba فيه: $ba = ca$ ، $(\angle a) = 120°$ ، $d, e \in \overline{cb}$ بحيث $bd = ed = ce$.

اثبت أن : Δeda متساوي الأضلاع .

ويشترك في حل هذا التمرين:

(1) الأستاذ/ محمد رشاد عبد المجيد

مفتش الرياضيات بالتعليم الثانوي بمنطقة شبين الكوم عام 1956م .

(2) الأستاذ/ محمد لطفي مصطفى

مدرس بالمعهد العلمي لاظوغلي عام 1960م .

(3) الأستاذ/ حمدي عفت خليل مفتش الرياضيات ببنها عام 1961م .

(4) الأستاذ/ أحمد إبراهيم حجاج مدرس بالسويس الإعدادية عام 1961م .

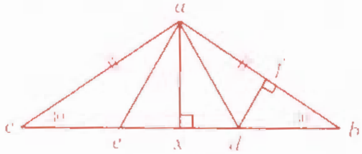
(5) الأستاذ/ زكى مكرم النجاح الإعدادية عام 1961م .

الحلول:

للأستاذ/ محمد رشاد عبد المجيد

مفتش الرياضيات بالتعليم الثانوي بمنطقة شبين الكوم عام 1956م .

أولا :



العمـل: نسقط العمود $\overrightarrow{ax}$ على $\overline{bc}$ ، $\overline{df} \perp \overline{ab}$

البرهان:

$\because (\angle bac) = 120°$, $ab = ac$ $\therefore (\angle b) = (\angle c) = 30°$

، ∵ $\overline{df}$ مقابل للزاوية التى قياسها $30°$ فى Δdfb القائم فى f .

$\therefore df = \frac{1}{2} bd$ ، ∵ $\overrightarrow{ax} \perp \overline{bc}$ $\therefore bx = xc$

وينصف زاوية $(\angle cab)$ ومنها $dx = xe$ ∴ x منتصف $\overline{de}$

$\therefore dx = \frac{1}{2} de$ ، $db = de$ $\therefore dx = \frac{1}{2} db$ $\therefore dx = df$

، $\Delta afd \equiv \Delta adx$ (بوتر وضلع وزاوية قائمة) وينتج أن:

$(\angle fad) = (\angle xad) = 30°$ وبالمثل $(\angle xae) = (\angle eac) = 30°$

$\therefore (\angle dae) = 60°$

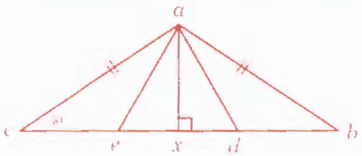
$\because (\angle ade) = 30° + 30° = 60°$ لأنها خارجة عن Δadb

∴ Δade متساوي الأضلاع (وهو المطلوب) .

حل آخر للتمرين السابق:

للأستاذ/ محمد لطفي مصطفى مدرس بالمعهد العلمي بلاظوغلي عام 1960م.

ثانيا:



العمل: نسقط العمود $\overrightarrow{ax} \perp \overline{bc}$

البرهان: واضح أن $\Delta adb \equiv \Delta aec$

∴ Δade متساوى الساقين .

$\because ab = ac$ $\therefore (\angle b) = (\angle c) = 30°$

∵ $\overline{ax}$ ينصف $\overline{de}$ ∴ Δaxc ثلاثينى ستينى $\therefore ax = \frac{1}{2} ac$

$\because xe = \frac{1}{2} de = \frac{1}{2} ec$ ∵ Δaxc فيه $\frac{ax}{ac} = \frac{xe}{ec}$

∴ $\overline{ae}$ ينصف $(\angle xac)$ (نظرية) ،

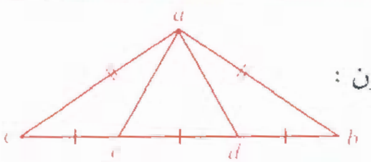
$\because (\angle xac) = 60°$ $\therefore (\angle xae) = 30°$ $\therefore (\angle dae) = 60°$

∴ Δdae متساوي الأضلاع (وهو المطلوب)

حل ثان لنفس التمرين السابق:

للأستاذ/ محمد لطفي مصطفى مدرس بالمعهد العلمي بلاظوغلي عام 1960م.

ثالثا:



البرهان: إذا لم يكن $de = ad = ae$ فإما أن يكون :

$de > ad$ أو $de < ad$

فإذا كان : $de > ad$ فإن : $(\angle dae) > (\angle ade) > (\angle aed)$

$\therefore (\angle dae) > 60°$ ...... (1)

ومن جهة أخرى: $\because bd = de$ ، أيضًا $\therefore bd > ad$

$\therefore (\angle bad) > 30°$ $\therefore (\angle bad) > (\angle b)$

$\therefore (\angle bad) + (\angle cae) > 60°$ وبالمثل : $(\angle cae) > 30°$

لكن: $(\angle bad) + (\angle cae) + (\angle dae) = 120°$

$\therefore (\angle dae) < 60°$ ...... (2)

يتضح وجود تناقض بين (1) ، (2) $\therefore$ لا يمكن أن يكون $de > ad$

ولو فرضنا أن : $de < ad$ فإن $(\angle dae) < 60°$ .... (3)

$\therefore bd < ad$ عندئذ يكون: $(\angle cae) < 30°$ ، $(\angle bad) < 30°$

.... (4) $\therefore (\angle dae) > 60°$ $\therefore (\angle bad) + (\angle cae) < 60°$

وينشأ من ذلك تناقض آخر بين (3) ، (4)

$\therefore$ $\overline{de}$ لا يمكن أن يكون أكبر من أو أصغر من كل من $\overline{ae}$ ، $\overline{da}$

$\therefore ed = ad = ae$

$\therefore \Delta dae$ متساوي الأضلاع (وهو المطلوب)

حلول التمرين السابق:

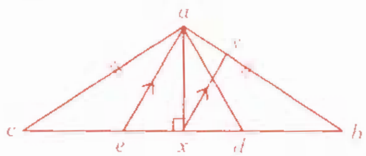
للأستاذ/ حمدي عفت خليل مفتش الرياضيات ببنها عام 1961م.

رابعا:

العمـل: نسقط العمود $\overrightarrow{ax} \perp \overline{bc}$

ونرسم من x الشعاع $\overrightarrow{xy} \parallel \overrightarrow{ea}$

ويقطع $\overline{ab}$ في y



البرهان: Δeab فيه $xy \parallel ea$ ،

$\because ex = \frac{1}{4} eb$ $\therefore ay = \frac{1}{4} ab$

في Δaxb :

$\because (\angle b) = 30°$ $\therefore ax = \frac{1}{2} ab$ $\therefore ax = 2ay$

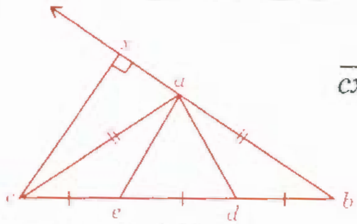
$\because (\angle yax) = 60°$ $\because (\angle yxa) = (\angle xae) = 30°$ بالتبادل

$\therefore \Delta xay$ ثلاثيني ستيني

$\therefore (\angle yxd) = 60°$, $(\angle aed) = 60°$

$\therefore \Delta ade$ متساوي الأضلاع (وهو المطلوب)

خامسا:



العمل: نرسم $\overrightarrow{ba}$ ونسقط من c الشعاع $\overrightarrow{cx} \perp \overrightarrow{ba}$ ويقطعه فى x

البرهان:

$\because (\angle bac) = 120°$ $\therefore (\angle cax) = 60°$

$\because (\angle acx) = 30°$ $\therefore (\angle ecx) = 60°$

فى Δacx:

$ca = 2ax$ $\therefore ba = 2ax$

$\because be = 2ec,$

$\therefore$ فى Δbxc : $\overline{ae} \parallel \overline{cx}$

$\therefore (\angle aed) = (\angle xce) = 60°$

$\therefore \Delta aed$ متساوي الأضلاع (وهو المطلوب)

سادسا: على نفس الشكل المرسوم في خامسًا.

البرهان: فى Δxcb: $(\angle b) = 30°$ ، $\because (\angle x) = 90°$

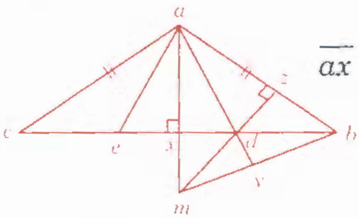
$eb = \frac{2}{3} cb$, $\because ab = \frac{2}{3} xb$, $\therefore xc = \frac{1}{2} bc$

$\therefore ae = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} cb = \frac{1}{3} cb$ $ae = \frac{2}{3} xc$, $\therefore ae \parallel xc$

$\because ed = \frac{1}{3} bc$ $\therefore ae = ed$

$\therefore \Delta ade$ متساوي الأضلاع (وهو المطلوب)

سابعا:



العمل: نسقط ارتفاعات Δabd ولتكن $\overline{ax}$ ، $\overline{by}$ ، $\overline{dz}$

حيث $\overrightarrow{ax} \cap \overrightarrow{by} \cap \overrightarrow{zd} = \{m\}$

البرهان:

$\because (\angle zdb) = 60°$ $\therefore (\angle bdm) = 120°$

$\because (\angle mdx) = 60°$ $\therefore \Delta xdm$ ثلاثيني ستيني

$\therefore dm = 2dx$ $\therefore md = db$

$\therefore$ Δmdb متساوى الساقين وزاوية رأسه قياسها = $120°$

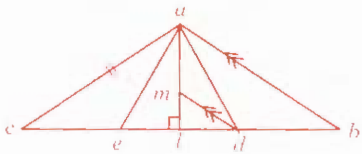
$\therefore (\angle\, dmy) = 30°$

$\therefore$ فى Δaym : $\quad (\angle\, amy) = 60°$ ، $(\angle\, y) = 90°$

$\therefore (\angle\, dae) = 60° \qquad \therefore (\angle\, yam) = 30°$

$\therefore$ Δade متساوي الأضلاع (وهو المطلوب)

ثامنا:



العمل: ننزل $\overline{al} \perp \overline{bc}$ يقطعه فى l

ثم نرسم $\overline{dm} \parallel \overline{ba}$ ويقطع $\overline{al}$ في m

البرهان: $\because$ Δlab ثلاثينى ستينى

$\therefore ab = 2la$

في $\Delta\, lab$: $\quad \because dl = \frac{1}{3} lb$

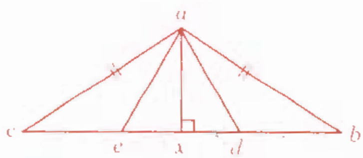
$\therefore ma = dm \qquad \therefore lm = \frac{1}{3} la \quad , \quad dm = \frac{1}{3} ba$

$\therefore (\angle\, dma) = 120° \qquad \therefore (\angle\, dml) = 60° \qquad \because \overline{dm} \parallel \overline{ba}$

$\therefore (\angle\, dae) = 60° \qquad \therefore (\angle\, dam) = 30°$

$\therefore$ Δade متساوي الأضلاع (وهو المطلوب)

تاسعا:



العمل: ننزل $\overrightarrow{ax} \perp \overline{bc}$

البرهان: $\Delta abd \equiv \Delta ace$ وينتج أن : $ad = ae$

$\therefore$ x منتصف $\overline{ed}$

$\because (\angle\, adc) < 90°$

$\therefore (\overline{ac})^2 = (\overline{ad})^2 + (\overline{dc})^2 - 2\,\overline{dc}\,.\,\overline{dx}$

$= (\overline{ad})^2 + 4(\overline{ad})^2 + 2(\overline{de})^2$ (لأن $cd = 2de,\ dx = \frac{1}{2} de$)

$= (\overline{ad})^2 + (\overline{de})^2 \qquad ...... (1)$

$\because$ $\overline{ac} = 2\,\overline{ax}$ لأن Δaxc ثلاثيني ستيني

$\therefore (\overline{ac})^2 = 4(\overline{ax})^2 =$

$\therefore (\overline{ac})^2 = 4[(\overline{ae})^2 - (\overline{ex})^2] = 4(\overline{ae})^2 - (\overline{de})^2 \qquad ...... (2)$

(لأن $ex = \frac{1}{2} de$)

من (1) ، (2) : $\therefore 4(\overline{ae})^2 - (\overline{ed})^2 = (\overline{ad})^2 + 2(\overline{de})^2$

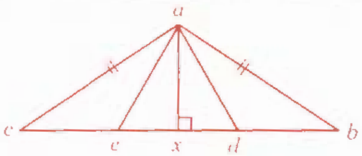
لأن $(\overline{ad})^2 = (\overline{ae})^2$ $\therefore 3(\overline{da})^2 = 3(\overline{ed})^2$

$\therefore ad = de$

$\because ad = ae$

$\therefore \Delta ade$ متساوي الأضلاع (وهو المطلوب)

عاشرا:



العمل: نسقط $\overrightarrow{ax} \perp \overline{bc}$ يقطعه فى x

البرهان:

$$\tan(\angle ade) = \frac{\overline{ax}}{\overline{xd}} = \frac{\overline{ax}}{\frac{1}{3}\overline{bx}} = \frac{3\,\overline{ax}}{\overline{bx}} \quad \text{...... (1)}$$

(لأن $bd = de$, $\overrightarrow{ax}$ ينصف $\overline{de}$)

$$\tan(\angle abc) = \frac{ax}{bx} \quad \text{...... (2)}$$

وبقسمة (1) إلى (2) $\tan(\angle ade) : \tan(\angle abc) = \frac{3ax}{bx} \times \frac{bx}{ax} = 3$

$\therefore \tan(\angle ade) = 3\tan(\angle abc)$

$\because \tan(\angle abc) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ حيث Δabx ثلاثيني ستيني

$\therefore \tan(\angle ade) = 3 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

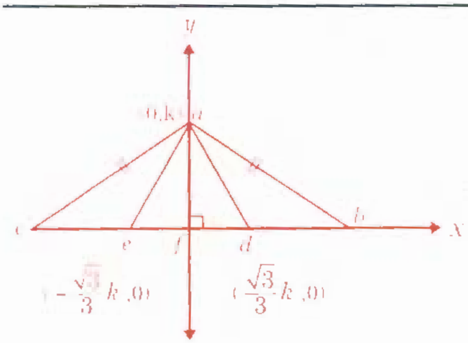
ولكن $\tan^{-1}\sqrt{3} = 60°$ حيث $0° < (\angle ade) < 90°$

$\therefore (\angle ade) = 60°$

$\because ad = ae$

$\therefore \Delta ade$ متساوي الأضلاع (وهو المطلوب)

حادي عشر:



البرهان: نعتبر f منتصف $\overline{cb}$ نقطة الأصل لمحورين متعامدين ونعتبر $\overleftrightarrow{cb}$ محور السينات ، واضح من هندسة الشكل أن : $ad = ae$

∴ نقطة a تقع على المحور الصادى. ونفرض أنه بالنسبة لمحورين متعامدين

النقطة $a(0, k)$ فتكون نقطة $b\left(\sqrt{3}k, 0\right)$ ∴ النقطة $d\left(\frac{\sqrt{3}}{3}k, 0\right)$

والنقطة $e\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}k, 0\right)$ [لأن $df = \frac{1}{3}bf$]

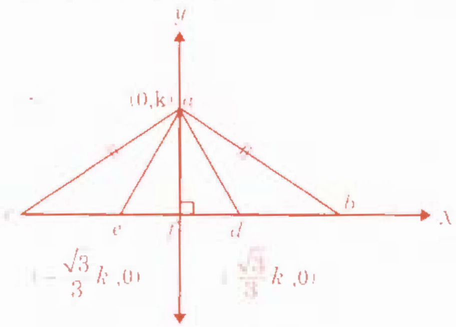
ميل $\overleftrightarrow{ae} = \dfrac{k-0}{0+\frac{\sqrt{3}}{3}k} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$\therefore \tan(\angle aed) = \sqrt{3}$ حيث $0° < (\angle aed) < 90°$ أي حادة

$\therefore (\angle aed) = 60°$ $\therefore ad = ae$

∴ $\Delta\, ade$ متساوي الأضلاع (وهو المطلوب)

ثاني عشر:



البرهان: ويمكن الوصول للمطلوب مباشرة

باستخدام البُعد بين نقطتين .

$(\overline{ad})^2 = \left(0-\frac{\sqrt{3}}{3}k\right)^2 + k^2 = \frac{3}{4}k^2$ .... (1)

$(\overline{de})^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}k+\frac{\sqrt{3}}{3}k\right)^2 = \frac{3}{4}k^2$ .. .. (2)

من (1) ، (2) : $\therefore ad = ae$

∴ Δade متساوي الأضلاع (وهو المطلوب)

ويمكن الوصول إلى نفس النتيجة بالطريقة الآتية :

ميل $\overleftrightarrow{ab} \leftarrow (m_1) = \dfrac{k}{\sqrt{3}k}$ ، ميل $\overleftrightarrow{ae} \leftarrow (m_2) = \dfrac{k}{\frac{\sqrt{3}}{3}k}$

$\because m_1\, m_2 = \dfrac{k}{-\sqrt{3}k} \times \dfrac{k}{\frac{\sqrt{3}}{3}k} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \times \dfrac{3}{\sqrt{3}} = -1$ $\therefore \overline{ba} \perp \overline{ea}$

$\because (\angle b) = 30°$ $\therefore (\angle aeb) = 60°$

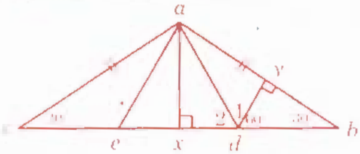
$\because ad = ae$

∴ $\Delta\, ade$ متساوي الأضلاع (وهو المطلوب)

حلان آخران لنفس التمرين السابق:

للأستاذ / ذكي مكرم   النجاح الإعدادية عام 1961م.

ثالث عشر:



العمل: نسقط $\overrightarrow{ax} \perp \overline{bc}$ ، $\overleftrightarrow{dy} \perp \overline{ab}$

البرهان: واضح أن $\Delta\Delta\ adb, aec$ ينطبقان

$\therefore$ $\Delta\ ade$ متساوي الساقين $\therefore$ $\overrightarrow{ax}$ ينصف $\overline{ed}$

$\therefore$ $\Delta\ byd$ ثلاثيني ستيني

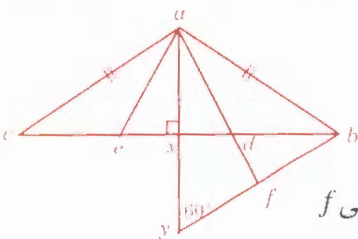
$\therefore dy = \frac{1}{2} bd = \frac{1}{2} de = dx$

نطبق $\Delta\Delta\ ayd, axd$ بضلعين والزاوية القائمة

$\therefore (\angle 2) = 60^\circ$ $\therefore (\angle 1) = (\angle 2)$

$\therefore$ $\Delta\ ade$ متساوي الأضلاع   (وهو المطلوب)

رابع عشر:



العمل: نسقط $\overrightarrow{ax} \perp \overline{bc}$ ، (فينصفه)

وينصف زاوية $(\angle\ bac)$ ونمده بقدر نفسه

إلى y . نصل $\overline{yb}$ ، ونمد $\overrightarrow{ad}$ ليلاقى $\overline{yb}$ فى f

البرهان: نطبق $\Delta\Delta\ abx, ybx$

$\therefore (\angle\ y) = 60^\circ$

$\therefore$ $\Delta\ aby$ متساوي الأضلاع

$\therefore dx = \frac{1}{2} db$ $\because dx = \frac{1}{2} de$

$\because$ $\overline{bx}$ متوسط فى $\Delta\ aby$ وقسم فى d بنسبة $2 : 1$ من جهة الرأس

$\therefore$ d ملتقى المتوسطات للمثلث aby

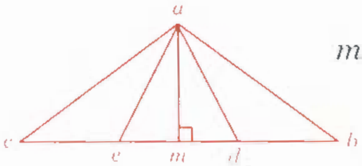
$\therefore$ $\overline{af}$ متوسط ينصف $\overline{by}$ وينصف زاوية $(\angle\ bay)$

$\therefore (\angle\ dae) = 60^\circ$ $\therefore (\angle\ day) = 30^\circ$

لأنها خارجة عن $\Delta\ adb$ $\therefore (\angle\ adx) = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$

$\therefore$ $\Delta\ ade$ متساوي الأضلاع   (وهو المطلوب)

خامس عشر:



العمـل: ننزل من a الشعاع $\overrightarrow{am} \perp \overline{bc}$ يقطعه في m

وينصف القاعدة وينصف زاوية الرأس .

البرهان: $\Delta\, amc$ مثلث ثلاثيني ستيني

$\therefore ac = 2\, am \qquad \therefore (\overline{ac}\,)^2 = 4(\overline{am}\,)^2$

$\because mc = 3\, em \qquad \therefore (\overline{mc}\,)^2 = 9(\overline{em}\,)^2$,

$\therefore (\overline{am}\,)^2 = (\overline{ac}\,)^2 - (\overline{mc}\,)^2 = 4(\overline{am}\,)^2 - 9(\overline{em}\,)^2$

$\because (\overline{ae}\,)^2 = (\overline{am}\,)^2 = + (\overline{me}\,)^2$,

$\therefore (\overline{ae}\,)^2 = 4(\overline{ma}\,) - 9(\overline{me}\,)^2 + (\overline{me}\,)^2 = 4(\overline{am}\,)^2 - 8(\overline{me}\,)^2$

$\therefore (\overline{ae}\,)^2 = 4[(\overline{ae}\,)^2 - (\overline{me}\,)^2] - 8(\overline{me}\,)^2$

$= 4(\overline{ae}\,)^2 - 4(\overline{me}\,)^2 - 8(\overline{me}\,)^2 = 4(\overline{ae}\,)^2 - 12(\overline{me}\,)^2$

$\therefore 3(\overline{ae}\,)^2 = 12(\overline{me}\,)^2 \qquad \therefore (\overline{ae}\,)^2 = 4(\overline{me}\,)^2$

$\therefore ae = 2me \qquad \therefore$

$\therefore ae = ed$ بالمثل : $ad = de$

$\therefore ad = de = ae$

$\therefore \Delta\, ade$ متساوي الأضلاع (وهو المطلوب)

(2) اثنا عشر حلاً لتمرين هندسي واحد.

• **التمرين** :

أصغر أضلاع المثلث يلاقيه أكبر المستقيمات المتوسطة
أو : أصغر متوسط في المثلث هو الذى ينصف أكبر أضلاعه .

ويشترك في حل هذا التمرين:

(1) الأستاذ/ هنري ميخائيل قلادة
مدرس بالشرقية الإعدادية بالزقازيق 1959م .

(2) الأستاذ/ زكي مينا مكرم
مدرس بمدرسة النجاح الإعدادية بالإسماعيلية 1959م (حلان) .

(3) الأستاذ/ ميلاد أبادير جورجي مدرس بقناطر أسيوط الإعدادية 1959م .

(4) الأستاذ/ ويصا إسكندر إبراهيم مدرس بمحرم بك الإعدادية 1959م .

(5) الأستاذ/ أحمد إبراهيم حسن حجاج
مدرس بالسويس الإعدادية عام 1960م (خمسة حلول) .

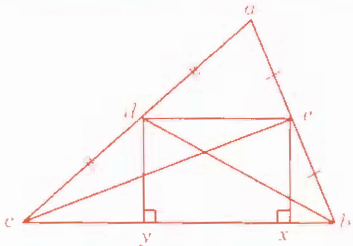
(6) الأستاذ/ صموئيل توما
مدرس أول الرياضيات بمدرسة الإيمان الإعدادية 1958م .

(7) الأستاذ/ نايف نايف مدرس بمدرسة المغازي للاجئين بغزة 1960م .

بعث بهذا التمرين الأستاذ/ محمود حسن أبو العطا المدرس بمدرسة دميرة الإعدادية إلى تفتيش الرياضيات بمجمع التحرير بالقاهرة عام 1958م ، وقد أصبح موجهًا عامًا للرياضيات بالدقهلية بعد ذلك ، واتسم بتفكيره المميز وبقوة شخصيته وقدرته على قيادة أوعر الأمور والمسئوليات .

الحلول:

للأستاذ/ هنري ميخائيل قلادة مدرس بالشرقية الإعدادية بالزقازيق 1959م.



أولا:

المعطيات: $ac > ab$

والمطلوب إثبات أن : $ce > bd$

العمل: نصل $\overline{ed}$ ونسقط $\overrightarrow{ex} \perp \overline{bc}$ ، $\overleftrightarrow{dy} \perp \overline{bc}$

البرهان: $\overline{ed} \,//\, \overline{bc}$ نظرية

من العمل: الشكل $exyd$ مستطيل

نقارن بين العمودين $\overline{dy}$ ، $\overline{xe}$ ومائليهما $\overline{dc}$ ، $\overline{eb}$

$\because ex = yd \,, \quad eb < dc$ من الفرض

$\therefore bx < yc$ وبإضافة $\overline{xy}$ لكل منهما

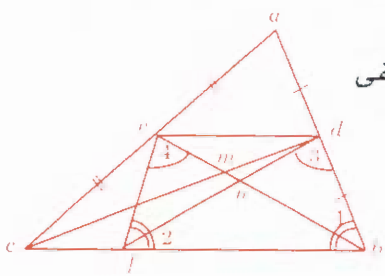
$\therefore by < cx$

نقارن بين العمودين $\overline{dy}$ ، $\overline{ex}$ والمائلين $\overline{db}$ ، $\overline{eb}$

$\because xc > by$ برهانًا $\therefore \; ec > bd$ (وهو المطلوب)

حلان آخران لنفس التمرين السابق:

للأستاذ/ زكي مينا مكرم النجاح الإعدادية بالإسماعيلية 1958م.



ثانيا:

المعطيات: $\Delta\, abc$ فيه: $ac > ab$ ، e ، d منتصفى $\overline{ac}$ ، $\overline{ab}$ على الترتيب

المطلوب: إثبات أن $\overline{be} > \overline{cd}$

العمل: نرسم $\overline{fe}$ تقطع $\overline{cb}$ فى f

بحيث $(\angle 1) = (\angle 2)$

البرهان: $\because de \,//\, bc$ $\therefore \; \overline{de} \,//\, \overline{bf}$

$\therefore$ الشكل $dbfe$ شبه منحرف فيه زاويتا القاعدة متساويتان فى القياس عملاً

$\therefore$ $dbfe$ شبه منحرف متساوي الساقين

$\Delta\Delta efb, dbf$ فيهما:

$(\angle 1) = (\angle 2)$، $db = ef$، $\overline{fb}$ مشترك

$\therefore \Delta dbf \equiv \Delta efb$ وينتج أن: $(\angle 3) = (\angle 4)$

لأنهما متممتان للزاويتين $(\angle 1) = (\angle 2)$

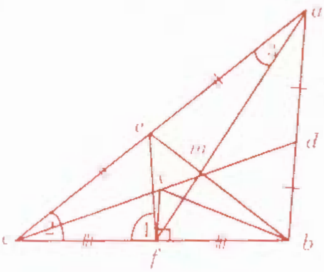
$\because (\angle bde) = (\angle fed)$

$\therefore (\angle mde) = (\angle med)$ $\therefore (\angle nde) = (\angle ned)$

$\therefore me < md$ فى Δmde نظرية.

$\because me = \frac{1}{3} be$, $md = \frac{1}{3} cd$ $\therefore be < cd$ وهو المطلوب

ثالثا:



المعطيات: $\Delta\ abc$ ، $\overline{ab}$ أصغر أضلاعه ، $\overline{ac}$ أكبرها ، m نقطة تقاطع متوسطاته .

المطلوب: إثبات أن $\overline{be} < \overline{cd}$

العمل: نصل $\overline{ef}$

البرهان: $\because ef = \frac{1}{2} ab$ نظرية

$\because ac > ab$ $\therefore \frac{1}{2} ac > \frac{1}{2} ab$

$\therefore \overline{ec} > \overline{ef}$, $\overline{ae} > \overline{ef}$ ...... (1)

$\therefore (\angle 1) > (\angle 2)$, $(\angle afe) > (\angle 3)$ .... (2)

بجمع (1) ، (2) : $\therefore (\angle afc) > (\angle 2) + (\angle 3)$

$\therefore$ زاوية $(\angle afc)$ منفرجة .

$\therefore$ لو أقمنا عمودًا من f على $\overleftrightarrow{bc}$ فلابد وأن يقع داخل المثلث mfc منفرج الزاوية فى f ويلاقى $\overline{mc}$ فى نقطة x ، ونصل $\overline{xb}$

$\therefore \Delta\Delta\ fcx, xbf$ ينطبقان وينتج أن : $xb = xc$

$\therefore \Delta\ mxb$ فيه : $\overline{mb} < (\overline{mx} + \overline{xb})$ (متباينة المثلث)

أى أن: $mb < mc$ ،

$\because mb = \frac{2}{3} be$, $mc = \frac{2}{3} cd$

$\therefore \frac{2}{3} be < \frac{2}{3} cd$ $\therefore be < cd$ وهو المطلوب

تمهيد وحل آخر لنفس التمرين السابق:

للأستاذ/ ميلاد أبادير جورجي   مدرس بقناطر أسيوط الإعدادية 1959م.

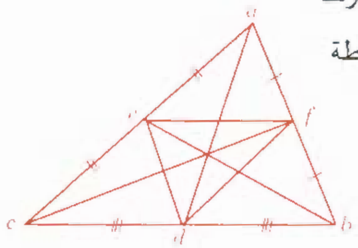
رابعا:

(أ) لو تساوت زاويتا قاعدة شبه المنحرف تساوى قطراه.

(ب) لو اختلفت زاويتا القاعدة الكبرى فى القياس فأكبر القطرين يقابل الزاوية الكبرى فى القياس منهما.

نرسم: $(\angle cbx) = (\angle c)$ ، $x \in \overline{ad}$

المعطيات: $\Delta\, abc$ فيه $\overline{bc}$ أكبر الأضلاع ، $\overline{ab}$ أصغرها



المطلوب: إثبات أن : $\overline{ad}$ أصغر المستقيمات المتوسطة

، $\overline{cf}$ أكبر المستقيمات المتوسطة.

البرهان: نصل $\overline{fd}$

$\therefore$ الشكل $fbce$ شبه منحرف

، $\overline{bc}$ قاعدته الكبرى

$\therefore (\angle\, b) > (\angle\, c)$ لأن $ac > ab$

$\therefore$ القطر $fc >$ القطر be (على حسب التمرين السابق)

وبنفس الطريقة لو وصلنا $\overline{de}$ ، $\overline{fd}$ يمكن إثبات أن:

، $be > ad$ ، $cf > ad$

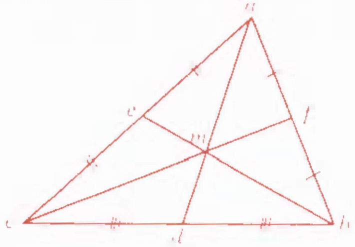
$\therefore$ $\overleftrightarrow{cf}$ أكبر المستقيمات المتوسطة ، $\overleftrightarrow{ad}$ اصغر المستقيمات المتوسطة

(وهو المطلوب)

حل آخر لنفس التمرين السابق:

للأستاذ/ ميلاد ويصا إسكندر إبراهيم   مدرس بمحرم بك الإعدادية 1959م.

خامسا:



المعطيات: $\Delta\, abc$ فيه : $\overline{be}$ ، $\overline{cf}$ ، $\overline{ad}$ متوسطات

حيث $\overline{ad} \cap \overline{cf} \cap \overline{be} = \{m\}$

المطلوب: إثبات أن: $\overline{bc}$ هو أكبر الأضلاع للمثلث abc

البرهان: m ملتقى المستقيمات المتوسطة للمثلث abc

$$\therefore am = \frac{2}{3}ad,\ bm = \frac{2}{3}be,\ cm = \frac{2}{3}cf$$

$\because ad < cf$ فرضًا $\quad \therefore \frac{2}{3}ad < \frac{2}{3}cf \quad \therefore am < cm$

$\therefore \Delta\Delta\ eam, ecm$ فيهما:
- $ea = ec$ فرضًا
- $\overline{em}$ مشترك
- $am < cm$ برهانًا

$\therefore (\angle aem) < (\angle cem)$

$\therefore \Delta\Delta\ eab, ecb$ فيهما:
- $ea = ec$ فرضًا
- $\overline{eb}$ مشترك
- $(\angle aeb) < (\angle ceb)$

$\therefore ab < bc$

$\because ad < be$ فرضًا

$\therefore am < bm \quad \therefore \frac{2}{3}ad < \frac{2}{3}be$

$\therefore \Delta\Delta\ maf, mbf$ فيهما:
- $af = bf$ فرضًا
- $\overline{mf}$ مشترك
- $ma < mb$ برهانًا

$\therefore (\angle mfa) < (\angle mfb)$

$\therefore \Delta\Delta\ cfa, cfb$ فيهما:
- $af = bf$ فرضًا
- $\overline{fc}$ مشترك
- $(\angle cfa) < (\angle cfb)$ برهانًا

$\therefore ca < cb$

$\therefore \overline{cb}$ أكبر من $\overline{ac}$ ، $\overline{ab}$

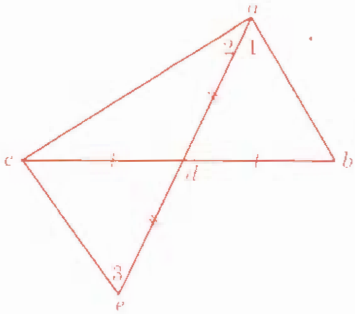
$\therefore \overline{cb}$ هو أكبر أضلاع المثلث

وبالعكس إذا كان $\overline{bc}$ هو أكبر أضلاع المثلث abc فإنه يمكن إثبات أن $\overline{ad}$ هو أقصر القطع المستقيمة المتوسطة فى هذا المثلث بنفس الطريقة .

(وهو المطلوب)

خمسة حلول لنفس التمرين السابق:

للأستاذ/ أحمد إبراهيم حسن حجاج مدرس بالسويس الإعدادية عام 1960م



تقديم لحل التمرين :

أعرض أولاً حلاً لإثبات أنه لو كان:

$\overline{ab} > \overline{ac}$ ، d تنصف $\overline{bc}$ فإن: $(\angle adc)$ منفرجة ،

وبطريقة تختلف عن الطرق التى وردت بالجملة

وذلك للحاجة له فى البراهين الآتية:

Δabc فيه: $ac > ab$ ، d منتصف $\overline{bc}$

والمطلوب إثبات أن: $(\angle adc)$ منفرجة

العمـل: نمد $\overline{ad}$ على استقامته بقدر نفسه إلى e ونصل ce

البرهان: واضح أن : $\Delta abd, \Delta ecd$ ينطبقان وينتج أن: $(\angle 1) = (\angle 3)$

وينتج أيضًا أن: $\overline{ab} = \overline{ce}$

$\because ac > ab, \qquad \therefore ac > ce \qquad \therefore (\angle 3) > (\angle 2)$

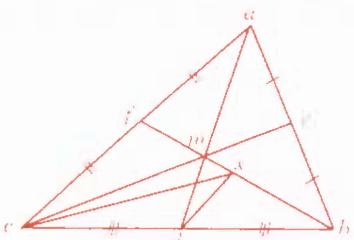
لكن $(\angle 1) = (\angle 3)$

$\therefore (\angle 1) > (\angle 2)$

$\because ac > ab \qquad \therefore (\angle b) > (\angle c) \qquad \therefore (\angle 1) + (\angle b) > (\angle 2) + (\angle c)$

$\therefore (\angle adc) > (\angle adb)$

$\therefore$ $(\angle adc)$ منفرجة



سادسا: (البرهان الأول) : (طريقة التفنيد)

Δabc فيه: $ac > ab$ ، m نقطة تقاطع متوسطاته .

المطلوب: إثبات أن: $ce > bf$

البرهان: إن لم يكن $ce > bf$ فإما يساويه

أو يكون أكبر منه

فإذا كان: $ce = bf$ فإن: $bm = cm$

$\therefore$ Δcmd ، Δbmd ينطبقان، وينتج أن:

$(\angle\, bdm) = (\angle\, cdm) = 90°$

ويكون $ad \perp bc$ من منتصفه $\therefore\ ab = ac$ وهذا خلاف الفرض

وإذا كان : $ce < bf$ فإن: $cm < bm$

وتكون: $(\angle\, mcd) > (\angle\, mbd)$ فيمكن رسم مستقيم أو شعاع من c

يصنع مع $\overline{bc}$ زاوية تساوى $(\angle\, mbc)$ ويقابل $\overleftrightarrow{bm}$ فى x

$\therefore\ xb = xc$

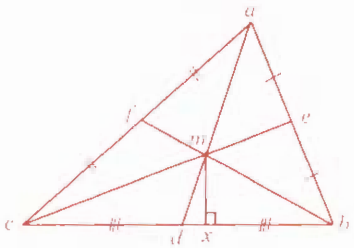
$\Delta\, xcd$ ، $\Delta\, xbd$ ينطبقان وينتج أن:

$(\angle\, xdb) = (\angle\, xdc) = 90°$

وهذا لا يمكن لأن $(\angle\, adc)$ منفرجة

$\therefore$ $\overline{ce}$ لا يساوي $\overline{fb}$ ولا أصغر منه

$\therefore$ $\overline{ce} > \overline{fb}$ (وهو المطلوب)



سابعا: (البرهان الثاني) :

Δabc فيه: $ac > ab$ ، m ملتقى المتوسطات.

المطلوب: إثبات أن: $ce > bf$

البرهان: $\because$ $ac > ab$ ، d منتصف $\overline{bc}$

$\therefore$ $(\angle\, adc)$ منفرجة، لو أسقطنا من m

عمودًا مثل $\overline{bc} \perp \overrightarrow{mx}$ فإنه:

فى: $\Delta\, mxc$ $\rightarrow$ $\because\ (\angle\, x) = 90°$

$\therefore\ (\overline{mc})^2 = (\overline{mx})^2 + (\overline{cx})^2$ ...... (1)

فى: $\Delta\, mxb$ $\rightarrow$ $\because\ (\angle\, x) = 90°$

$\therefore\ (\overline{mb})^2 = (\overline{mx})^2 + (\overline{bx})^2$ ...... (2)

لكن $(\overline{cx})^2 > (\overline{bx})^2$ لأن d منتصف $\overline{bc}$

فمن (1) ، (2)

$\therefore\ (\overline{mc})^2 > (\overline{mb})^2$ $\therefore\ mc > mb$

$mb = \frac{2}{3}bf$, $mc = \frac{2}{3}ce$ $\therefore\ ce > bf$ (وهو المطلوب)

ثامنا: (البرهان الثالث):

على نفس الرسم السابق والفرض المطلوب كما سبق.

البرهان:

$\because (\angle mxb) = 90^\circ$ $\therefore (\angle mbc)$ حادة

$\therefore (\overline{mc})^2 = (\overline{mb})^2 + (\overline{cb})^2 - 2\overline{bc}\,.\,\overline{bx}$

$\therefore (\overline{mc})^2 = (\overline{mb})^2 + 4(\overline{db})^2 - 4\overline{bd}\,.\,\overline{bx}$

لأن: $\overline{bc} = 2\overline{bd}\;.(\overline{bc})^2 = 4(\overline{bd})^2$

$\therefore (\overline{mc})^2 + 4\overline{bd}\,.\overline{bx} = (\overline{mb})^2 + 4(\overline{bd})^2$

لكن: $4(\overline{bd})^2 > 4\overline{bd}\,.\overline{bx}$

$\therefore (\overline{mc})^2 > (\overline{mb})^2$ $\therefore mc > mb$ $\therefore ce > bf$ وهو المطلوب

تاسعا: (البرهان الرابع):

على نفس الرسم السابق والفرض المطلوب كما سبق.

البرهان: $(\angle mdc)$ منفرجة

$\therefore (\overline{mc})^2 = (\overline{md})^2 + (\overline{dc})^2 - 2\overline{dc}\,.\,\overline{dx}$ ...... (1)

$\because (\angle mdb)$ حادة لأنها تكمل $(\angle mdc)$

$\therefore (\overline{mb})^2 = (\overline{md})^2 + (\overline{db})^2 - 2\overline{db}\,.\,\overline{dx}$ ...... (2)

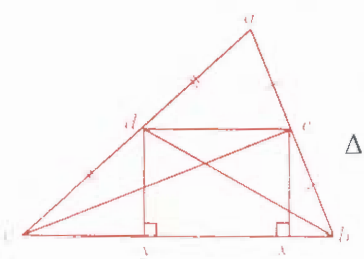
بطرح (2) من (1)

$\therefore (\overline{mc})^2 - (\overline{mb})^2 = 2\overline{dx}\,(\overline{dc} + \overline{db})$

$\therefore (\overline{mc})^2 = (\overline{mb})^2 +$ كمية موجبة

$\therefore (\overline{mc})^2 > (\overline{mb})^2$ $\therefore mc > mb$ $\therefore ce > bf$ وهو المطلوب

عاشرا: (البرهان الخامس):



العمل: نصل $\overline{ef}$ ونسقط $\overline{ex} \perp \overline{bc}$ ، $\overline{fy} \perp \overline{bc}$

البرهان: $\overline{ef}$ واصلة بين منتصفي $\overline{ac}$ ، $\overline{ab}$ في Δabc

$\therefore \overline{ef} \,//\, \overline{bc}$

$\therefore$ البعد $\overline{ex}$ = البعد $\overline{fy}$

$\because ac > ab \qquad \therefore fc > eb \qquad \therefore (fc)^2 > (eb)^2$

Δfyc فيه: $(\angle fyc) = 90°$

$\therefore (\overline{yc})^2 = (\overline{fc})^2 - (\overline{fy})^2$

Δexb فيه: $(\angle exb) = 90°$

$\therefore (\overline{bx})^2 = (\overline{eb})^2 - (\overline{ex})^2$

$\because (\overline{fc})^2 > (\overline{eb})^2 , \qquad (\overline{fy})^2 = (\overline{ex})^2$

$\therefore (\overline{yc})^2 > (\overline{bx})^2 \qquad \therefore yc > bx$

وبإضافة $\overline{xy}$ إلى كل منهما:

$\therefore cx > by \qquad \therefore (\overline{cx})^2 > (\overline{by})^2$

Δexc فيه: $(\angle exc) = 90°$

$\therefore (\overline{ec})^2 = (\overline{ex})^2 - (\overline{cx})^2$

Δfyb فيه: $(\angle fyb) = 90°$

$\therefore (\overline{fb})^2 = (\overline{fy})^2 + (\overline{by})^2$

$\because (\overline{ex})^2 = (\overline{fy})^2 , \quad (\overline{xc})^2 > (\overline{by})^2$

$\therefore (\overline{ex})^2 + (\overline{cx})^2 > (\overline{fy})^2 + (\overline{by})^2$

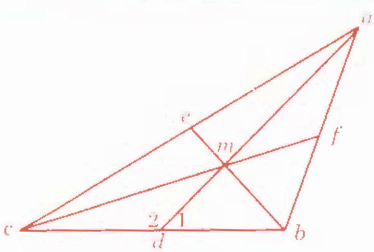
$\therefore (\overline{ec})^2 > (\overline{fb})^2 \qquad \therefore ec > bf$ (وهو المطلوب)

حل آخر لنفس التمرين السابق:

للأستاذ/ صموئيل توما

مدرس أول الرياضيات بمدرسة الإيمان الإعدادية 1958م.

حادى عشر:



المعطيات: Δabc فيه : $\overline{ab}$ أصغر أضلاعه ،

$\overline{ac}$ أكبر أضلاعه ،

m نقطة تقاطع متوسطاته

المطلوب: إثبات أن: $be < cf$

البرهان: $\Delta adb, \Delta adc$ فيهما: $db = dc$ ، $\overline{ad}$ مشترك ، $ab < ac$

$\therefore (\angle 1) < (\angle 2)$

$\Delta\Delta\, mdb, mdc$ فيهما ضلعان في الأول يساويان نظيريهما فى الثاني.

$\therefore\ (\angle 2) > (\angle 1)$ برهانًا

$\therefore\ \overline{cm} > \overline{bm}$ نظرية

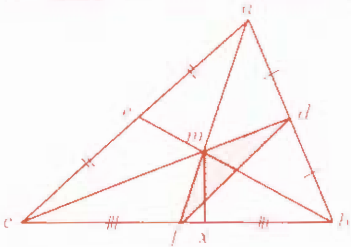
$\therefore\ \frac{2}{3}\overline{be} < \frac{2}{3}\overline{cf}$

$\therefore\ \overline{cf} > \overline{be}$ (وهو المطلوب)

حل آخر لنفس التمرين السابق:

للأستاذ/ نايف نايف مدرس بمدرسة المغازي للاجئين بغزة 1960م.

ثاني عشر:



المعطيات: $\Delta\, abc$ فيه: $ac > ab$ ، e منتصف $\overline{ac}$ ،

d منتصف $\overline{ab}$

المطلوب: إثبات أن: $be < cd$

العمل: نفرض أن $\overline{cd}$ ، $\overline{be}$ تقاطعا فى m ، نصل am يقطع $\overline{bc}$ فى f ثم نصل df

البرهان: $\because$ m نقطة تقاطع المتوسطات للمثلث abc

$\therefore\ \overline{af}$ متوسط

$\therefore\ \overline{df} \,//\, \overline{ac}\,,\quad \overline{df} = \frac{1}{2}\overline{ac}$ (نظرية)

$\because\ ac > ab,\quad df = \frac{1}{2}ac,\quad db = \frac{1}{2}ab \qquad \therefore\ df > db$

$\therefore\ (\angle\, dbf) > (\angle\, dfb)$

$\therefore\ (\angle\, dfc)$ خارجة عن Δdbf

$\therefore\ (\angle\, dfc) > (\angle\, dbf) \qquad \therefore\ (\angle\, dfc) > (\angle\, dfb)$

$\therefore\ (\angle\, dfc)$ منفرجة

فلو أنزلنا من m عمودًا على $\overline{bc}$ يجب أن تقع نقطة x بين f ، b

لأن $(\angle\, mfc)$ منفرجة

$\because\ bf = cf \qquad \therefore\ xc = xb \qquad \because\ xc > xb$

$\therefore\ \overline{mc}$ المائل $>$ $\overline{mb}$ المائل

$\because\ mb = \frac{2}{3}be\,,\qquad mc = \frac{2}{3}cd \qquad \therefore\ be > cd$ وهو المطلوب

(3) أربعة حلول مختلفة لتمرين هندسي واحد.

• **التمرين:**

أثبت أن: طول منصف الزاوية الصغرى فى أى مثلث أكبر من طول منصف الزاوية الكبرى فيه.

ويشترك في حل هذا التمرين:

(1) الأستاذ/ محمد رشاد عبد المجيد

مفتش الرياضيات بالتعليم الثانوي بشبين الكوم 1956م.

(2) الأستاذ/ فؤاد ميخائيل غبريال

مدرس بمدرسة زفتى الإعدادية عام 1959م.

(3) الأستاذ/ صليب إسكندر

مدرس بمدرسة النقراشى الثانوية عام 1961م. وقدّم (حلان)

الحلول:

اولا:

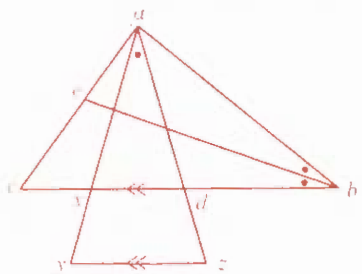
للأستاذ/ محمد رشاد عبد المجيد

مفتش الرياضيات بالتعليم الثانوي بشبين الكوم 1956م.

المعطيات: Δabc فيه: $(\angle a) > (\angle b)$

المطلوب: إثبات أن: $da < be$

العمـــل:



$\because (\angle a) > (\angle b)$ $\therefore \frac{1}{2}(\angle a) > \frac{1}{2}(\angle b)$

نرسم $\overrightarrow{ax}$ بحيث $(\angle dax) = \frac{1}{2}(\angle b)$ حيث $\overrightarrow{ax} \cap \overline{bc} = \{x\}$

فتكون: $(\angle bax) > (\angle abx)$

$\therefore bx > ax$

ونرسم $\overrightarrow{ax}$ ، ونأخذ عليه نقطة (y) حيث: $y \in \overrightarrow{ax}$ بحيث $ay = bx$

ونرسم من y المستقيم $\overline{yz} \parallel \overline{bc}$ حيث $\overrightarrow{ad} \cap \overline{yz} = \{ z \}$

البرهان: $\Delta\Delta\ bfx, azy$ فيهما: $bx = ay$ عملاً

$(\angle fbx) = (\angle zay)$ عملاً

$(\angle fxb) = (\angle zya)$ بالتناظر

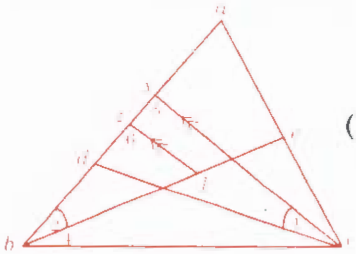
$\therefore \Delta\ bfx \equiv \Delta\ azy$ وينتج أن: $bf = az$ $\quad \therefore bf > ad$

وبالتالى فإن: $be > ad$ (وهو المطلوب)

ثانيا:

حل للأستاذ / فؤاد ميخائيل غبريال

مدرسة قناطر زفتى الإعدادية بنين عام 1959م .



المعطيات: Δabc فيه: $(\angle b) > (\angle c)$

المطلوب: إثبات أن: $bd < ce$

العمل: نرسم $(\angle dbx)$ حيث $(\angle dbx) = \frac{1}{2}(\angle c)$

لأن: $(\angle abd) > \frac{1}{2}\ (\angle c)$

، نرسم $\overline{bx} \parallel \overline{zl}$: $z \in \overline{cx}$

حيث $cz = bx$ ، $l \in \overline{ce}$

البرهان:

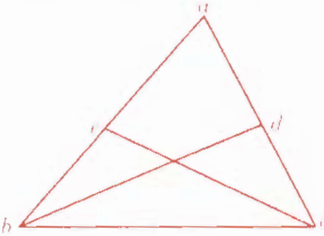
$\Delta\Delta\ bxd, czl$ فيهما: $\left\{ \begin{array}{l} bx = cz \text{ عملاً} \\ (\angle 1) = (\angle 2) \text{ عملاً} \\ (\angle 5) = (\angle 6) \text{ بالتناظر} \end{array} \right.$

$\therefore$ ينطبق المثلثان وينتج أن: $bd = cl$ لكن $\overline{cl} \subset \overline{ce}$

$\therefore ce > bd$ (وهو المطلوب)

ثالثا:

للأستاذ/ صليب إسكندر مدرسة النقراشى الثانوية عام 1960م.



هناك بعض التمارين خصوصًا في الهندسة كانت ولا تزال ألغازًا يصعب حلها، وهى تعتمد على فكرة واحدة هى مفتاح حلها.

فالتمرين المشهور: (منصف الزاوية الصغرى في أى مثلث أكبر من منصف الزاوية الكبرى فيه).

سوف نعرض له حلين أحدهما بحساب المثلثات.

المعطيات: Δabc فيه: $(\angle b) > (\angle c)$

المطلوب: إثبات أن: منتصف زاوية $(\angle c)$ > منصف $(\angle b)$ أى $\overline{cd} > \overline{be}$

البـرهـان:

$$\frac{\overline{cd}}{\sin b} = \frac{\overline{bc}}{\sin bdc} \quad ، \quad (\angle bdc) = (\angle a) + \tfrac{1}{2}(\angle c)$$

$$\therefore \frac{cd}{\sin b} = \frac{bc}{\sin\left(a + \frac{1}{2}c\right)} \quad \text{........ (1)}$$

$$\therefore \frac{be}{\sin c} = \frac{bc}{\sin\left(a + \frac{1}{2}b\right)} \quad \text{........ (1)}$$ وكذلك

من (1) ، (2):

$$\therefore \frac{cd}{\sin b} \times \frac{\sin c}{be} = \frac{\sin\left(a + \frac{1}{2}b\right)}{\sin\left(a + \frac{1}{2}c\right)}$$

$$\therefore \frac{\overline{cd}}{bc} = \frac{\sin\left(a + \frac{1}{2}b\right)\sin b}{\sin\left(a + \frac{1}{2}c\right)\sin c}$$

وحيث أن: $(\angle b) > (\angle c)$

$$\therefore \frac{\sin\left(a + \frac{1}{2}b\right)\sin b}{\sin\left(a + \frac{1}{2}c\right)\sin c} > 1$$ لأن البسط أكبر من المقام

$$\therefore \frac{cd}{be} > 1 \qquad \therefore cd > be$$ (وهو المطلوب)

رابعـا:

البـرهـان:

$\because (\angle b) > (\angle c)$ $\therefore \frac{1}{2}(\angle b) > \frac{1}{2}(\angle c)$

$\therefore (\angle abf) > (\angle ace)$

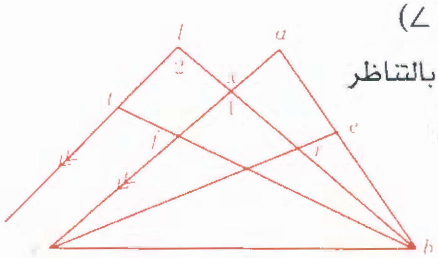
نرسم: $(\angle dbx) = (\angle ace)$

$\therefore (\angle xbc) < (\angle xcb)$ $\therefore xc > bx$

نمد $\overrightarrow{bx}$ إلى l بحيث $bl = cx$ ، ونرسم من l مستقيمًا يوازي $\overline{ac}$ ،

ونرسم $\overrightarrow{bf}$ يقابل الموازى فى t

$\Delta\Delta\, xcr, lbt$ فيهما: $\left\{ \begin{array}{l} lb = xc \\ (\angle lbt) = (\angle xcr) \\ (\angle 1) = (\angle 2) \end{array} \right.$ بالتناظر



$\therefore$ ينطبق المثلثان وينتج أن: $bt = cr$

$\therefore ce > bf$ (وهو المطلوب)

(4) أربعة حلول مختلفة لتمرين هندسي طريف.

قدمه عبد الوهاب أبو ليلة مدرس رياضيات بمدرسة الملك الصالح الإعدادية بالمنصورة 1956م

Δabc قسمت زواياه إلى ثلاث زوايا متساوية في القياس كما بالشكل والمطلوب إثبات أن: Δdef متساوي الأضلاع.

اشترك في حل هذا التمرين:

(1) الأستاذ/ محمد محمد السيد

مفتش الرياضيات بالتعليم الثانوى 1956م.

(2) الأستاذ/ راغب إسكندر

رئيس قسم الرياضيات بكلية المعلمين 1956م

(3) الأستاذ/ جاد تاوضروس

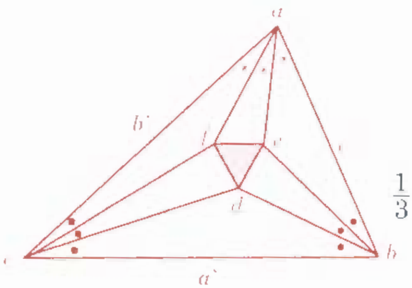
مفتش الرياضيات بالقاهرة الجنوبية 1958م

(4) الأستاذ/ شوقى محمد عبد الغنى

مدرس الأورمان الثانوية 1962م

أولا:

حلّ الأستاذ/ محمد محمد السيد مفتش الرياضة بالتعليم الثانوى 1956م.



حيث a, b, c زوايا المثلث الأصلى،

$\bar{a}$ ، $\bar{b}$ ، $\bar{c}$ أطوال أضلاعه المقابلة.

، حيث أن: $\frac{1}{3}(\angle a) + \frac{1}{3}(\angle b) + \frac{1}{3}(\angle c) = 60^\circ$

$$\therefore (\angle bdc) = 120^\circ + (\tfrac{1}{3}a)$$

$$\therefore db = \frac{\bar{a}\sin\frac{c}{3}}{\sin 120^\circ \cos\frac{a}{3} + \cos 120^\circ \sin\frac{a}{3}} \qquad \therefore \frac{db}{bc} = \frac{2\sin\frac{c}{3}}{\sin\left(120^\circ + \frac{a}{3}\right)}$$

$$\therefore\ db = \frac{2\,\bar{a}\sin\frac{c}{3}}{\sqrt{3}\cos\frac{a}{3} - \sin\frac{a}{3}}$$

وكذلك $\dfrac{eb}{ab} = \dfrac{\sin\frac{c}{3}}{\sin\left(120^\circ + \frac{a}{3}\right)}$

$\therefore$ بالمثل $\therefore\ eb = \dfrac{2c`\ \sin\frac{a}{3}}{\sqrt{3}\cos\frac{c}{3} - \sin\frac{c}{3}}$

$$\therefore\ \frac{db}{eb} = \frac{\bar{a}}{c} \times \frac{\sin\frac{c}{3}}{\sin\frac{a}{3}} \times \frac{\left(\sqrt{3}\cos\frac{c}{3} - \sin\frac{c}{3}\right)}{\left(\sqrt{3}\cos\frac{a}{3} - \sin\frac{a}{3}\right)}$$

$$= \frac{\sin a.\sin\left(\sqrt{3}\cos\frac{c}{3} - \sin\frac{c}{3}\right)}{\sin c.\sin\frac{a}{3}\left(\sqrt{3}\cos\frac{a}{3} - \sin\frac{a}{3}\right)}$$

لكن $\sin a = 3\sin\frac{a}{3} - 4\sin^3\frac{a}{3} = \sin\frac{a}{3}\left(3 - 4\sin^2\frac{a}{3}\right)$

$$= \sin\frac{a}{3}(3\cos^2\frac{a}{3} + 3\sin^2\frac{a}{3} - 4\sin^2\frac{a}{3})$$

$$= \sin\frac{a}{3}(3\cos^2\frac{a}{3} - \sin^2\frac{a}{3})$$

$$= \sin\frac{a}{3}(\sqrt{3}\cos\frac{a}{3} - \sin\frac{a}{3})(\sqrt{3}\cos\frac{a}{3} + \sin\frac{a}{3})$$

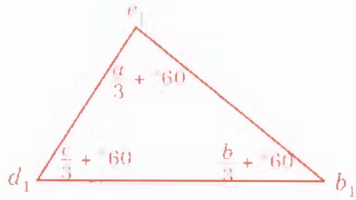
وبالمثل $\sin c = \sin\frac{c}{3}(\sqrt{3}\cos\frac{c}{3} - \sin\frac{c}{3})(\sqrt{3}\cos\frac{c}{3} + \sin\frac{c}{3})$

$$\therefore\ \frac{db}{eb} = \frac{\sqrt{3}\cos\frac{a}{3} + \sin\frac{a}{3}}{\sqrt{3}\cos\frac{c}{3} + \sin\frac{c}{3}} = \frac{\sin\left(60^\circ + \frac{a}{3}\right)}{\sin\left(60^\circ + \frac{c}{3}\right)}$$

أنشئ المثلث $e_1b_1d_1$ فيه: $(\angle\ b_1) = \frac{b}{3}$ ، $e_1 = 60^\circ + \frac{a}{3}$

$\therefore\ d_1 = 60^\circ + \frac{c}{3}$ (لأن $\frac{a}{3} + \frac{b}{3} + \frac{c}{3} = 60^\circ$)

يكون $\dfrac{d_1b_1}{e_1b_1} = \dfrac{\sin\left(60^\circ + \frac{a}{3}\right)}{\sin\left(60^\circ + \frac{a}{3}\right)}$



$\therefore \dfrac{d_1b_1}{e_1b_1} = \dfrac{db}{eb}$

$\therefore \Delta\, dbe \simeq \Delta\, d_1b_1e_1$,

$(\angle b) = (\angle c)$,

لأن $\dfrac{db}{eb} = \dfrac{d_1b_1}{e_1b_1}$

وبالمثل نثبت أن : $(\angle aef) = 60° + \dfrac{b}{3}$ $\quad \therefore (\angle bed) = 60° + \dfrac{a}{3}$

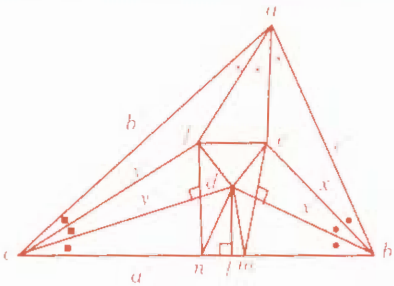
ولكن $(\angle aeb) = 120° + \dfrac{c}{2}$

$\therefore (\angle def) = 360° - (60° + \dfrac{a}{3} + 60° + \dfrac{b}{3} + 120° + \dfrac{c}{3}) = 60°$

وبالمثل نثبت أن : $(\angle edf) = 60°$ $\quad \therefore$ $\Delta\, def$ متساوي الأضلاع

ثانيا :

حلّ الأستاذ / راغب إسكندر رئيس قسم الرياضيات بكلية المعلمين 1956م .



ارسم $\overrightarrow{fn} \perp \overline{cd}$ ، $\overrightarrow{me} \perp \overline{bd}$ كما بالشكل

واضح أن : $de = dm$ ، $df = dn$ ،

ولإثبات أن Δdef متساوى الأضلاع يكفى أن

نثبت تساوى أى ضلعين فيه .

(إذ ليس هناك تمايز بين أضلاعه)

وبذلك يكفى إثبات أن : $dm = dn$

فإذا اسقطنا $\overrightarrow{dl} \perp \overline{bc}$ فيكفى أن نثبت أن : $ml = ln$

أعتبر : $eb = x$ ، $fc = y$ ، $db = x`$ ، $dc = y`$ على الترتيب .

من $\Delta\, aeb$:

$$\frac{x}{\sin\frac{1}{3}a} = \frac{x`}{\sin\frac{1}{3}(a+b)} \qquad \therefore bm = x = \frac{c`\ \sin\frac{1}{3}a}{\sin\frac{1}{3}(a+b)}$$

وبالمثل :

$$cn = y = \frac{b`\ \sin\frac{1}{3}a}{\sin\frac{1}{3}(a+c)}$$

لاحظ أن :

$$(\angle\, aeb) = 180° - \frac{1}{3}(a+b)$$

$$\therefore \sin c` = \sin(\angle\, aeb) = \sin\left[180° - \frac{1}{3}(a+b)\right] = \sin\frac{1}{3}(a+b)$$

من Δdbc :

$$\frac{x`}{\sin\frac{1}{3}c} = \frac{a`}{\sin\frac{1}{3}(b+c)} \qquad \therefore\ x` = \frac{a`\ \sin\frac{1}{3}c}{\sin\frac{1}{3}(b+c)},$$

ولكن : $bl = x`\ \mathrm{cosin}\frac{1}{3}b$

$$\therefore\ bl = \frac{a`\ \sin\frac{1}{3}c\ \mathrm{cosin}\frac{1}{3}b}{\sin\frac{1}{3}(b+c)}$$

وبالمثل

$$cl = \frac{a`\ \sin\frac{1}{3}b\ \mathrm{cosin}\frac{1}{3}c}{\sin\frac{1}{3}(b+c)}$$

ويصبح المطلوب إثبات أن : $bl - bm = cl - cn$

أى مطلوب إثبات أن :

$$\frac{a` \sin\frac{1}{3}c \ \cos\frac{1}{3}c}{\sin\frac{1}{3}(b+c)} - \frac{c` \sin\frac{1}{3}a}{\sin\frac{1}{3}(a+b)} =$$

$$\frac{a` \sin\frac{1}{3}b \ \cos\frac{1}{3}c}{\sin\frac{1}{3}(b+c)} - \frac{b` \sin\frac{1}{3}a}{\sin\frac{1}{3}(c+a)}$$

أى مطلوب :

$$\frac{a` \ \sin\frac{1}{3}(c-b)}{\sin\frac{1}{3}(b+c)} = \frac{c` \ \sin\frac{1}{3}a}{\sin\frac{1}{3}(a+b)} - \frac{b` \ \sin\frac{1}{3}a}{\sin\frac{1}{3}(c+a)}$$

$$\frac{\sin a \ \sin\frac{1}{3}(c-b)}{\sin\frac{1}{3}(b+c)} = \frac{\sin c \ \sin\frac{1}{3}a}{\sin\frac{1}{3}(a+b)} - \frac{\sin b \ \sin\frac{1}{3}a}{\sin\frac{1}{3}(c+a)}$$

لأن : $a` : b` : c` = \sin a : \sin b : \sin c$

$$\sin\frac{1}{3}a[3 - 4\sin^2\frac{1}{3}(b+c) - 3 + 4\sin^2\frac{1}{3}(c+a)]$$

$$2\sin\frac{1}{3}a[1 - \cos\frac{2}{3}(a+c) - 1 + \cos\frac{2}{3}(a+b)]$$

$$2\sin\frac{1}{3}a \times 2\sin\frac{2a+b+c}{3}\sin\frac{c-b}{3}$$

أى إثبات أن :

$$3 - 2[1 - \cos\frac{2}{3}(b+c)] = 4\sin\frac{1}{3}a\sin\frac{2a+b+c}{3}$$

أى $1 + 2\cos\frac{2}{3}(b+c) = 4\sin\frac{1}{3}a\sin\frac{2a+b+c}{3}$

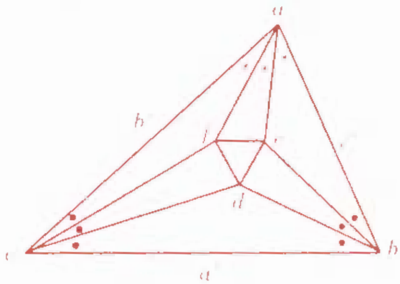
الطرف الأيسر = $2\cos\frac{2}{3}(b+c) - 2\cos\frac{2}{3}(a+b+c)$

أى أن : $4\sin\frac{a+2b+2c}{3}\sin\frac{a}{3} = 4\sin\frac{a}{3}\sin\frac{2a+b+c}{3}$

أى أن : $\sin\frac{2a+b+c}{3} = \sin\frac{a+2b+2c}{3}$ وهذا صحيح

ثالثاً :

حلّ الأستاذ/ جاد تاوضروس مفتش الرياضة بمنطقة القاهرة الجنوبية 1958م



$$be = \frac{\bar{c}\sin\frac{a}{3}}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{b}{3}\right)} = \frac{2r\sin c\sin\frac{a}{3}}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{c}{3}\right)}$$

حيث r نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث abc

$$\because \ \sin c = 4\sin\frac{c}{3}\ \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{c}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{c}{3}\right)$$

$$\therefore \ \overline{be} = 2r\sin\frac{c}{3}\ \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{c}{3}\right)\sin\frac{a}{3}$$

وبالمثل:

$$bd = 2r\sin\frac{a}{3}\ \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{a}{3}\right)\sin\frac{c}{3}$$

$$\therefore \ \frac{be}{bd} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{c}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{a}{3}\right)} \qquad \therefore \ \frac{b}{3}+\left(\frac{\pi}{3}+\frac{c}{3}\right)+\left(\frac{\pi}{3}+\frac{a}{3}\right) = \pi$$

وهذه الزوايا الثلاث هى زوايا المثلث bde على الترتيب.

$$\therefore (\angle b) = \frac{\pi}{3}+\frac{c}{3} \quad , \qquad (\angle cdf) = \frac{\pi}{3}+\frac{b}{3}$$ وبالمثل

$$(\angle bdc) = \frac{2\pi}{3}+\frac{a}{3}$$ وبالمثل

$$\therefore (\angle edf) = 2\pi - \left(\frac{\pi}{3}+\frac{c}{3}+\frac{\pi}{3}+\frac{b}{3}+\frac{2\pi}{3}+\frac{a}{3}\right) = 2\pi - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

وبالمثل: $(\angle edf) = (\angle dfe) = 60^\circ$

$\therefore \Delta\, def$ متساوي الأضلاع

رابعـا :

حلّ الأستاذ / شوقي محمد عبد الغني مدرس بمدرسة الأورمان الثانوية 1962م .

نفرض أن: $\overline{fe} > \overline{ed} > \overline{df}$

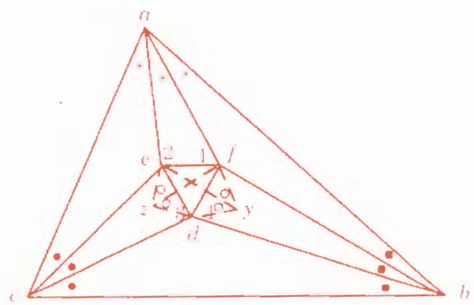
$(\angle afe) = (\angle 1), (\angle aef) = (\angle 2)$

$(\angle edc) = (\angle 3), (\angle fdb) = (\angle 4)$

أعط للسهولة القيم $3a, 3b, 3c$ لزوايا المثلث abc الثلاثة على الترتيب.

فى $\Delta\, yfe$:

$\dfrac{fe}{ye} = \dfrac{\sin \bar{y}}{\sin a}$ .... (1) (e ملتقى منصفات زوايا $\Delta\, ayc$)



فى $\Delta\, yde$:

$\dfrac{ye}{de} = \dfrac{\sin 3}{\sin y}$ .... (2)

$\therefore \dfrac{fe}{de} = \dfrac{\sin 3}{\sin 1}$

بضرب (1) فى (2) :

$\because fe > de \qquad \therefore (\angle 3) > (\angle 1)$

كذلك فى $\Delta\, zfe$:

$\dfrac{fe}{fz} = \dfrac{\sin \bar{z}}{\sin 2}$ .... (3)

فى $\Delta\, zfd$:

$\dfrac{fz}{fd} = \dfrac{\sin 4}{\sin z}$ .... (4)

بضرب (3) فى (4)

$\therefore \dfrac{fe}{fd} = \dfrac{\sin 4}{\sin 2}$

$\because fe > fd \qquad \therefore (\angle 4) > (\angle 2)$

$\therefore (\angle 3) + (\angle 4) > (\angle 1) + (\angle 2)$

ولكن: $(\angle 2) + (\angle 1) + (\angle a) + 180° = (\angle 4) + (\angle 3) + (\angle fde) + (\angle bdc)$

(كل طرف = $360°$)

ولكن $(\angle bdc) = 180° - (b + c)$

$\therefore 180° - (b + c) + (\angle fde) + (\angle 3) + (\angle 4) = 180° + (\angle a) + (\angle 1) + (\angle 2)$

ولكن: $(\angle 3) + (\angle 4) > (\angle 1) + (\angle 2)$,

$\therefore (\angle fde) - (\angle b) - (\angle c) < (\angle a)$

ولكن: $(\angle fde) > 60°$ $\qquad \therefore (\angle fde) < (\angle a) + (\angle b) + (\angle c),$

$\therefore 60° < (\angle fde) < (\angle a) + (\angle b) + (\angle c)$

$\therefore (\angle a) + (\angle b) + (\angle c) > 60°$

$\therefore$ مجموع زوايا المثلث > $180°$ وهذا محال

$\therefore$ لابد من تساوى أضلاع المثلث def (وهو المطلوب) .

ملاحظة: فى هذا الحل فرضنا أن: $(\angle \bar{y}) = \frac{1}{2}(\angle y)$ ، $(\angle \bar{z}) = \frac{1}{2}(\angle z)$

ويلاحظ أن: $\overrightarrow{ey}$ ينصف $(\angle ayc)$ ، $\overrightarrow{zf}$ ينصف $(\angle azb)$

لتتلاقى منصفات زوايا أى مثلث فى نقطة واحدة.

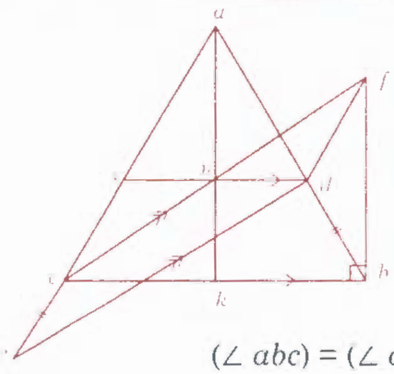
(5) ثلاث حلول مختلفة لتمرين التسلية:

• **التمرين :**

Δabc فيه: $\overline{ab} = \overline{ac}$ ، $e \in \overline{ac}$ ، $d \in \overline{ab}$ بحيث كان $\overline{bd} = \overline{ce}$.
رسم $\overline{bf} \perp \overline{bc}$ ، $\overline{cf} \parallel \overline{ed}$ حيث $\overline{cf} \cap \overline{bf} = \{f\}$ ،
أثبت أن: الشكل $fdec$ متوازى أضلاع

اولا :

حلّ الأستاذ/ محمد أحمد إبراهيم
مدرس بالتحرير الثانوية للقوات البحرية بالإسكندرية عام 1958م .



العمـــل:

نرسم $\overline{dx} \parallel \overline{bc}$ ويقطع $\overline{fc}$ فى n ،
$\overline{ac}$ فى x ، نصل $\overline{an}$ يقطع $\overline{bc}$ فى k

البـرهـان:

$ad = ax$ لأن: $(\angle adx) = (\angle abc)$
$(\angle axd) = (\angle acb)$ بالتناظر ، $(\angle abc) = (\angle acb)$
لأن: $ab = ac$

$\therefore bd = xc = ce$

$\therefore \Delta xde$ فيه: $\overline{cn} \parallel \overline{ed}$ ، c فى منتصف القاعدة $\overline{xe}$

$\therefore n$ فى منتصف $\overline{dx}$ ، في $\Delta\, adx$: $ax = ad$

، $\overline{an}$ ينصف القاعدة $\overline{dx}$ $\therefore an$ ينصف $(\angle a)$

$\therefore \overline{ak} \perp \overline{bc}$ وينصفه لأن: $ab = ac$ ، $\overline{ak}$ ينصف زاوية $(\angle a)$

$\because fb \perp bc,\ nk \perp bc,\quad \therefore \overline{nk} \parallel \overline{fb},$

$\Delta\, fbc$ فيه: $\overline{fb} \parallel \overline{nk}$ و k منتصف $\overline{bc}$ $\therefore n$ منتصف $\overline{fc}$

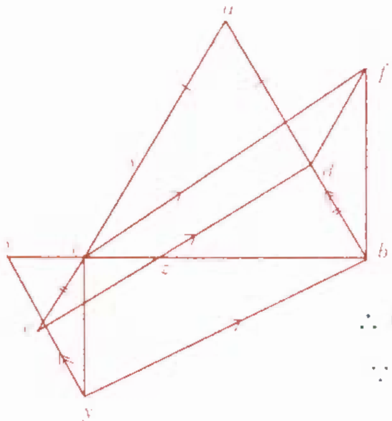
$\because$ $\overline{dx}$ ، $\overline{fc}$ ينصف كل منهما الآخر

$\therefore$ الشكل $fdcx$ متوازي أضلاع

$\therefore \overline{fd} \parallel \overline{ce}$ $\therefore$ الشكل $fdec$ متوازي أضلاع

ثانيا :

حلّ الأستاذ/ هنري ميخائيل قلادة مدرس بالشرقية الإعدادية 1957م .



العمــل:

نرسم $\overleftrightarrow{ex}$ // $\overline{ba}$ ويقطع $\overleftrightarrow{bc}$ فى x ، ونرسم $\overline{fc}$ // $\overline{de}$ // $\overline{by}$ ويقطع $\overleftrightarrow{ex}$ فى y ، ونصل $\overline{cy}$

البــرهـان:

$\because ab = ac$

$\therefore (\angle abc) = (\angle acb)$

$\because (\angle acb) = (\angle xce)$ بالتقابل بالرأس

، $(\angle abc) = (\angle x)$ بالتبادل

$\therefore (\angle xce) = (\angle x)$

$\therefore$ $\Delta\, acx$ متساوي الساقين

$\therefore xe = ce = bd$

$\therefore$ $\Delta\Delta\, dbz, exz$ فيهما: $\left\{ \begin{array}{l} db = xe \text{ برهانًا} \\ (\angle dzb) = (\angle xze) \\ (\angle dbz) = (\angle exz) \end{array} \right.$

$\therefore$ $\Delta\, dbz \equiv \Delta\, exz$ وينتج أن: $bz = zx$

فى $\Delta\, bxy$: $\overline{ze}$ ينصف bx برهانًا ، $\overline{ze}$ // $\overline{by}$ عملاً

$\therefore xe = ey \qquad \therefore ec = ex = ey$

$\therefore (\angle xcy) = 90^\circ \qquad \therefore \overline{yc} \,//\, \overline{bf}$

$\therefore$ الشكل $fbyc$ متوازي أضلاع

$\therefore by = fc$

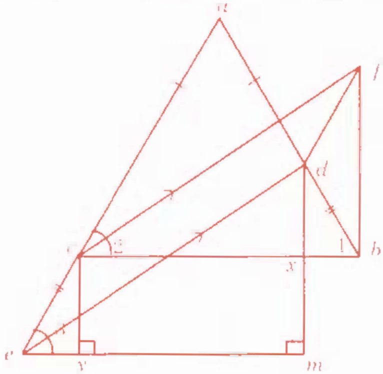
، ولكن $de = by$ لأن الشكل $dbye$ متوازي أضلاع

$\therefore \overline{de} \,//\, \overline{cf}$

$\therefore$ الشكل $fdec$ متوازي أضلاع (وهو المطلوب) .

ثالثا :

حلَ الأستاذ/ عطية كامل مدرس الرياضة بمنفلوط الثانوية 1960م .



العمـــل:

نرسم $\overline{em} \parallel \overline{bc}$ ونرسم $\overline{cy} \perp \overline{em}$ ، $\overline{dm} \perp \overline{em}$

البــرهـان:

$\because ab = ac \quad \therefore (\angle 1) = (\angle 2)$

$\because \overline{bc} \parallel \overline{me},$

$\therefore (\angle 2) = (\angle 3)$ بالتناظر

$\therefore (\angle 1) = (\angle 2) = (\angle 3)$

$\Delta\Delta\, dbx, cey$ فيهما :
$(\angle 1) = (\angle 2)$ برهانًا
$\overline{bd} \parallel \overline{ec}$ فرضًا
$(\angle bxd) = (\angle eyx)$

$\therefore \Delta\, dbx \equiv \Delta\, cey$

وينتج أن: $bx = ey$ .... (1)

$\because xc = my$ .... (2) لأن $xmyc$ مستطيل

بجمع (1) ، (2) ينتج أن: $bc = me$

$\Delta\Delta\, dme, fbc$ فيهما :
$\overline{me} = \overline{bc}$ برهانًا
$(\angle dme) = (\angle fbc) = 90°$
$(\angle med) = (\angle bcf)$

$\therefore \Delta\, dme \equiv \Delta\, fbc$ وينتج أن: $fc = de$

$\because \overline{fc} \parallel \overline{de}$ $\therefore$ الشكل $fdec$ متوازي أضلاع

(6) ثلاثة حلول مختلفة لتمرين هندسي:

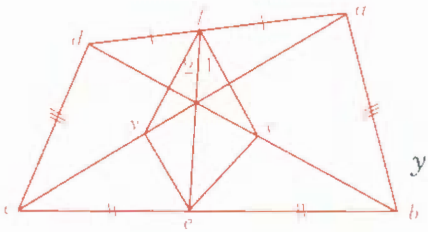
• التمرين :

شكل رباعى فيه ضلعان متقابلان متساويان. أثبت أن المستقيم الواصل بين منتصفى الضلعين الآخرين متساوى الميل على الضلعين المتساويين .

قام بحل هذا التمرين:

للأستاذان/ بلاطس دميان (قنا) . محمد أحمد إبراهيم (الإسكندرية) م ث 1962م .

أولا :



المعطيات: $abcd$ شكل رباعى فيه:

$ab = cd$ ، $af = fd$ ، $be = ec$

العمـــل: نصل $\overline{bd}$ ، $\overline{ac}$ وننصفهما فى x ، y

ثم نصل $\overline{fx}$ ، $\overline{fy}$ ، $\overline{ex}$ ، $\overline{ey}$

البـرهان: $\Delta\ abd$ فيه:

$$\overline{fx} \parallel \overline{ab}, \quad fx = \tfrac{1}{2} ab$$

$\Delta\ abc$ فيه:

$$\overline{ey} \parallel \overline{ab}, \quad ey = \tfrac{1}{2} ab$$

$\Delta\ adc$ فيه:

$$\overline{fy} \parallel \overline{dc}, \quad fy = \tfrac{1}{2} dc$$

$\Delta\ bdc$ فيه:

$$\overline{xe} \parallel \overline{dc}, \quad xe = \tfrac{1}{2} dc$$

ولكن: $ab = dc$ $\therefore$ الشكل $fxey$ معين

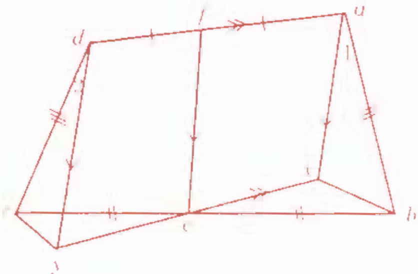
$$\therefore (\angle 1) = (\angle 2)$$

$\therefore$ $\overline{fe}$ متساوي الميل على $\overline{fy}$ ، $\overline{fx}$

$\because$ $\overline{fy} \parallel \overline{dc}$ ، $\overline{fx} \parallel \overline{ab}$

$\therefore$ $\overline{fe}$ متساوي الميل على $\overline{dc}$ ، $\overline{ab}$ (وهو المطلوب)

ثانيا:



المعطيات: نرسم من e: $\overline{xy} \parallel \overline{ad}$

، $\overline{dy}$ ، $\overline{ax}$ موازيان لـ $\overline{fe}$

ثم نصل $\overline{cy}$ ، $\overline{bx}$

البرهان: $\because$ $axef$ متوازي أضلاع

$\therefore af = xe$

$\because$ $feyd$ متوازي أضلاع

$\therefore df = ye$

ولكن: $af = df$

$\therefore xe = ye$

$\Delta\, bxe, \Delta\, cye$ يتطابقان (ضلعان وزاوية محصورة)

وينتج من التطابق: $bx = cy$

$\Delta\, abx, \Delta\, dcy$ يتطابقان (بثلاثة أضلاع) وينتج أن:

$(\angle\, 1) = (\angle\, 2)$

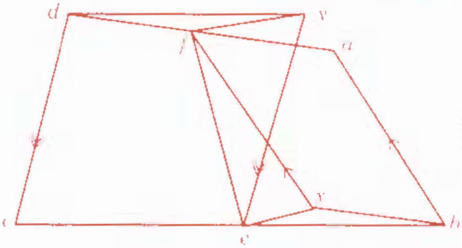
$\therefore$ ميل $\overline{ax}$ على $\overline{ab}$ = ميل $\overline{dy}$ على $\overline{dc}$

ولكن $\overline{dy}$ ، $\overline{ax}$ يوازيان $\overline{fe}$

$\therefore$ $\overline{fe}$ متساوي الميل على كل من $\overline{dc}$ ، $\overline{ab}$ (وهو المطلوب)

ثالثـا:

حلَ الأستاذ / محمد أحمد إبراهيم
مدرس بالتحرير الثانوية للقوات البحرية بالإسكندرية.



العمـل: نرسم $fx = ab$ ، $\overline{fx} \parallel \overline{ab}$

، $ey = cd$ ، $\overline{ey} \parallel \overline{cd}$

ثم نصل $\overline{xe}$ ، $\overline{yf}$ ، $\overline{bx}$ ، $\overline{dy}$

البرهان: $\because$ $\overline{cd} \parallel \overline{ey}$ ويساويه (عملاً)

$\therefore$ $\overline{be} \parallel \overline{ec} \parallel \overline{yd}$ ويساوي كلاً منهما

وبالمثل: $\overline{fd} \parallel \overline{af} \parallel \overline{bx}$ ويساوي كلاً منهما

$\because$ $\overline{yd} \parallel \overline{be}$ ، $\overline{fd} \parallel \overline{bx}$ (برهانًا)

$\therefore$ يسهل إثبات أن

$(\angle\, ydf) = (\angle\, xbe)$

$\therefore$ $\Delta\, fdy$ ينطبق على $\Delta\, xbe$ (ضلعان وزاوية محصورة)

$\therefore\ fy = xe$

، $\Delta\, eyf \equiv \Delta\, fxe$ (ثلاثة أضلاع)

$\therefore\ (\angle\, xfe) = (\angle\, yef)$

أى أن: $\overline{fe}$ متساوي الميل على $\overline{ey}$ ، $\overline{fx}$

$\because$ $\overline{ey} \parallel \overline{cd}$ ، $\overline{fx} \parallel \overline{ab}$ (عملاً)

$\therefore$ $\overline{fe}$ متساوي الميل على $\overline{cd}$ ، $\overline{ab}$ (وهو المطلوب)

(7) حل مسائل هندسية بالبحتة والتحليلية:

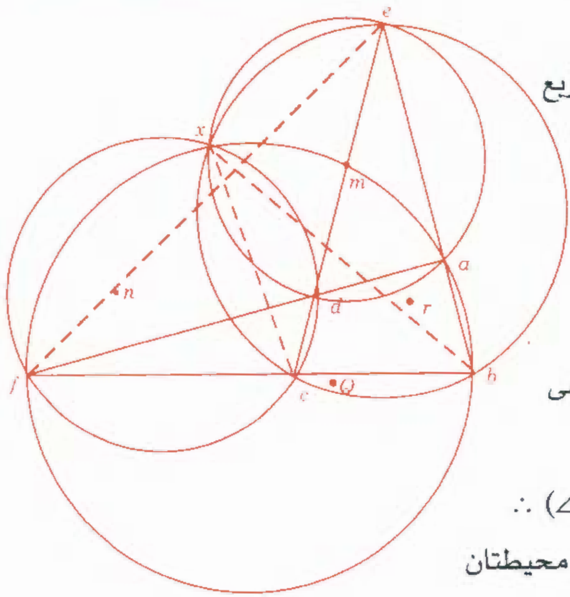
• التمرين الأول :

$abcd$ شكل رباعى تام، تقاطع $\overrightarrow{cd}$ ، $\overrightarrow{ba}$ فى e ، $\overrightarrow{ad}$ ، $\overrightarrow{bc}$ فى f ، المطلوب إثبات أن الدوائر الأربع المرسومة خارج المثلثات ebc ، dcf ، ade ، abf تمر بنقطة ثابتة.

قام بحل هذا التمرين:

الأستاذ/ محمود شنبكي   م.أ بالعباسية الإعدادية 1961م

أولاً: الحل بالهندسة البحتة:



العمــــل: نفرض أن دائرتين من الأربع ولتكن n ، m تقاطعتا فى x ، نصل $\overline{xf}$ ، $\overline{xe}$ ، $\overline{xd}$ ، $\overline{xc}$ ، $\overline{xb}$ ، $\overline{xa}$

البــرهــان: $(\angle\, edx)$ خارجة بالنسبة للشكل الرباعى الدائري $dxfc$

$\therefore\ (\angle\, edx) = (\angle\, xfc)$

$\because\ (\angle\, eax) = (\angle\, edx)$ محيطتان مشتركتان فى القوس ex

$\therefore\ (\angle\, eax) = (\angle\, xfc)$

$\therefore\ (\angle\, bax)$ تكمل $(\angle\, xfc)$ $\qquad$ $\therefore$ الشكل $abfx$ رباعي دائري

$\therefore$ الدائرة المارة بالنقط a, m, b, f تمر بنقطة x أيضًا.

$\therefore\ (\angle\, xaf) = (\angle\, xbf)$ محيطتان مشتركتان فى القوس fx

$\because\ (\angle\, xad) = (\angle\, xed)$ محيطتان مشتركتان فى القوس dx

$\therefore\ (\angle\, xbc) = (\angle\, xec)$ $\qquad$ $\therefore$ الشكل $ebcx$ رباعي دائري

$\therefore$ الدائرة المارة بالنقط e, b, c تمر بالنقطة x

$\therefore$ الدوائر الأربع l, m, n, r تمر جميعها بنقطة x

ثانيا: الحل بالهندسة التحليلية:

تأخذ $\overleftrightarrow{fc}$ المحور السينى ، f نقطة الأصل لمحورين متعامدين.

معادلة $\overleftrightarrow{ce}$ هى: $x \cos f_1 + y \sin f_1 - z_1 = 0$ ⟵ نفرض أن: $h_1 = 0$

معادلة $\overleftrightarrow{eb}$ هى: $x \cos f_2 + y \sin f_2 - z_2 = 0$ ⟵ نفرض أن: $h_2 = 0$

معادلة $\overleftrightarrow{fd}$ هى: $x \cos f + y \sin f = 0$ ⟵ نفرض أن: $h_3 = 0$

معادلة $\overleftrightarrow{fc}$ هى: $y = 0$ ⟵ نفرض أن: $h_4 = 0$

معادلة المنحنى المار برؤوس المثلث ade هى:

$$\begin{aligned} &a_1(x \cos f_1 + y \sin f_1 - z_1)(x \cos f_2 + y \sin f_2 - z_2) \\ &\quad + a_2(x \cos f_2 + y \sin f_2 - z_2)(x \cos f + y \sin f) \\ &\quad + a_3(x \cos f + y \sin f)(x \sin f)(x \cos f_1 + y \sin f_1 - z_1) = 0 \end{aligned}$$

هذه المعادلة تدل على دائرة

$\therefore$ معامل $xy = 0$ ، معامل x^2 = معامل y^2

بتطبيق ذلك على المعادلة السابقة يمكننا أن نصل إلى قيم كل من a_1, a_2, a_3

وتصبح معادلة الدائرة المرسومة حول $\Delta\, ade$ هى:

$$\frac{\sin(f_1 - f_2)}{x\cos f + y\sin f} + \frac{\sin(f_2 - f)}{x\cos f_1 + y\sin f_1 - z_1} + \frac{\sin(f - f_1)}{x\cos f_2 + y\sin f_2 - z_2} = 0$$

وبالمثل معادلة الدائرة المارة برؤوس $\Delta\, ecb$:

$$\frac{\sin(f_2 - f_1)}{y} + \frac{\sin(f_1 - 90)}{x\cos f_2 + y\cos f_2 - z_2} + \frac{\sin(90 - f_2)}{x\cos f_1 + y\sin f_1 - z_1} = 0$$

وبالمثل معادلة الدائرة المارة برؤوس $\Delta\, dcf$:

$$\frac{\sin(90 - f_1)}{x\cos f + y\sin f} + \frac{\sin(f_1 - f)}{y} + \frac{\sin(f - 90)}{x\cos f_1 + y\sin f_1 - z_1} = 0$$

وبالمثل معادلة الدائرة المارة برؤوس $\Delta\, abf$:

$$\frac{\sin(90 - f)}{x\cos f_2 + y\cos f_2 - z_2} + \frac{\sin(f - f_2)}{y} + \frac{\sin(f_2 - 90)}{x\sin f + y\sin f} = 0$$

∴ تؤول الدوائر الأربع إلى:

$$\frac{\sin(f_1-f_2)}{h_3}+\frac{\sin(f_2-f)}{h_1}+\frac{\sin(f-f_1)}{h_2}=0$$

$$\frac{\sin(f_2-f_1)}{h_4}+\frac{\sin(f_1-90)}{h_2}+\frac{\sin(90-f_2)}{h_1}=0$$

$$\frac{\sin(90-f_1)}{h_3}+\frac{\sin(f_1-f)}{h_1}+\frac{\sin(f-90)}{h_1}=0$$

$$\frac{\sin(90-f)}{h_2}+\frac{\sin(f-f_2)}{h_4}+\frac{\sin(f_2-90)}{h_3}=0$$

$\therefore \sin(f_1-f_2)\,h_1 h_2 + \sin(f_2-f)\,h_2 h_3 + \sin(f-f_1)\,h_3 h_1 = 0$

$,\ \sin(f_2-f_1)\,h_1 h_2 + \sin(f_2-90)\,h_1 h_4 + \sin(90-f_2)\,h_4 h_2 = 0$

$,\ \sin(90-f_1)\,h_4 h_1 + \sin(f_1-f)\,h_1 h_2 + \sin(f-90)\,h_3 h_4 = 0$

$,\ \sin(90-f_2)\,h_4 h_3 + \sin(f-f_2)\,h_3 h_2 + \sin(f_2-90)\,h_2 h_4 = 0$

$\because \sin(-c) = -\sin c$

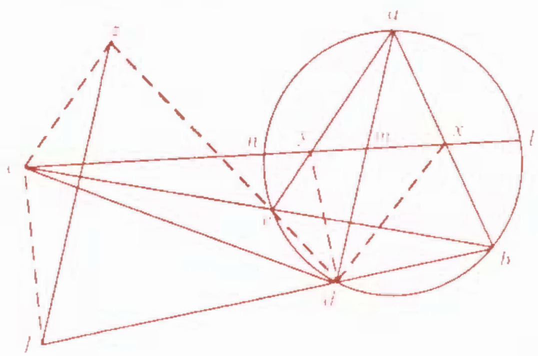
∴ بجمع هذه المعادلات نجد أن الطرف الأيمن = صفر

ومعنى هذا أن الدوائر الأربع تمر بنقطة ثابتة   (وهو المطلوب)

• التمرين الثاني :

$\overline{ln}$ قطر فى الدائرة m . أخذ عليه البعد $\overline{mx} = \overline{my}$ ثم رسم $\overline{ay}$ ، $\overline{ax}$ فتقطعا الدائرة فى b, c على الترتيب. ورسم $\overrightarrow{am}$ فتقطع الدائرة فى d ، فإذا كان $\{e\} = \overline{bc} \cap \overleftrightarrow{mn}$ ، e خارج الدائرة.

أولا: الحل بالهندسة البحتة:



العمـــل: $\overline{ez} \perp \overline{dc}$ ، $\overline{ef} \perp \overline{bd}$ ،

نصل :

$\overline{dx}$ ، $\overline{dy}$ ، $\overline{db}$ ، $\overline{dc}$

البـــرهان: $\overleftrightarrow{xe}$ قاطع لأضلاع $\Delta\, abc$

$$\therefore\ \frac{\overline{ax}}{\overline{xb}} \times \frac{\overline{be}}{\overline{ec}} \times \frac{\overline{cy}}{\overline{ya}} = 1 \qquad \text{..... (1)}$$

$\because$ الشكل $axdy$ تقاطع قطراه $\overline{ad}$ ، $\overline{xy}$ ، وينصفان بعضهما فرضًا

$\therefore$ $axdy$ متوازي أضلاع

$$\therefore\ ax = dy,\ \ ay = dx$$

بالتعويض فى (1) عن $\overline{ay}$ ، $\overline{ax}$

$$\therefore\ \frac{dy}{bx} \times \frac{be}{ec} \times \frac{cy}{dx} = 1 \qquad ..... (2)$$

$\because$ $\Delta\, xbd, \Delta\, ycd$ متشابهان

لأن: $(\angle\, xbd) = (\angle\, ycd) = 90°$ (كل منهما مرسومة فى نصف دائرة)

، $(\angle\, bxd) = (\angle\, cyd)$ (كل منهما تساوى $(\angle\, xay)$ بالتناظر)

بالتعويض فى (2)

$$\therefore\ \frac{\overline{dy}}{\overline{dx}} = \frac{\overline{dc}}{\overline{db}} = \frac{\overline{cy}}{\overline{bx}} \qquad \therefore\ \frac{(\overline{dc})^2}{(\overline{db})^2} \times \frac{\overline{eb}}{ec} = 1$$

$$\therefore\ \frac{(\overline{dc})^2}{(\overline{db})^2} = \frac{ec}{eb} \qquad \therefore\ \frac{(\overline{dc})^2}{(\overline{db})^2} = \frac{\Delta\ dce}{\Delta\ dbe} = \frac{ez \times dc}{ef \times db}$$

$$\therefore\ \frac{dc}{db} = \frac{ez}{ef} \qquad ..... (3)$$

الشكل: $dzef$ رباعي دائري كل من: $(\angle\, dfe) = 90°$ ،$(\angle\, dze)$

$$\therefore\ (\angle\, bdc) = (\angle\, zef) \qquad ..... (4)$$

من (3) ، (4) المثلثان zef ، bdc متشابهان

$$\therefore\ (\angle\, efz) = (\angle\, dbc)$$

$\because$ $(\angle\, efz) = (\angle\, edz)$ محيطيتان مشتركتان فى القوس ez

$$\therefore\ (\angle\, zde) = (\angle\, dbc)$$

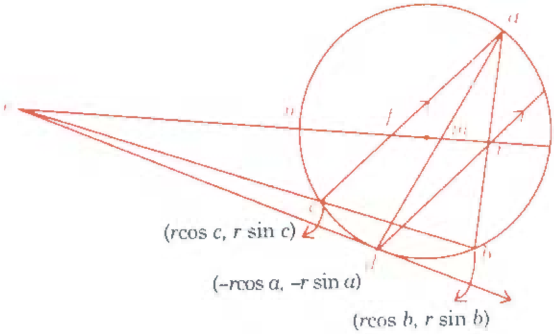
$\therefore$ $\overleftrightarrow{dc}$ مماس الدائرة في d نظرية

ثانيا: الحل بالهندسة التحليلية:

نفرض أن معادلة الدائرة:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

نأخذ إحداثيات النقط كالتالي:



$a(r\cos a, r\sin a)$, $b(r\cos b, r\sin b)$, $c(r\cos c, r\sin c)$, $d(-r\cos a, -r\sin a)$

معادلة الوتر $\overline{ab}$ هي: $x\cos\frac{a+b}{2} + y\sin\frac{a+b}{2} = r\cos\frac{a-b}{2}$ ...... (1)

معادلة الوتر $\overline{ac}$ هي: $x\cos\frac{a+c}{2} + y\sin\frac{a+c}{2} = r\cos\frac{a-c}{2}$ ...... (2)

معادلة الوتر $\overline{bc}$ هي: $x\cos\frac{b+c}{2} + y\sin\frac{b+c}{2} = r\cos\frac{b-c}{2}$ ...... (3)

معادلة المستقيم الذى يوازي $\overleftrightarrow{ac}$ هي:

$$x\cos\frac{a+c}{2} + y\sin\frac{a+c}{2} + k = 0$$

$\because$ هذا المستقيم يمر بالنقطة $d(-r\cos a, -r\sin a)$

$$\therefore -r\cos a\cos\frac{a+c}{2} - r\sin a\sin\frac{a+c}{2} + k = 0$$

$$\therefore k = r\cos\frac{a-c}{2}$$

$\therefore$ المعادلة تؤول إلى:

$$x\cos\frac{a+c}{2} + y\sin\frac{a+c}{2} + r\cos\frac{a-c}{2} = 0 \quad \text{.....} (4)^{(1)}$$

معادلة المستقيم الذى يمر بتقاطع المستقيمين (1)، (4) هي:

$$x\cos\frac{a+b}{2} + y\sin\frac{a+b}{2} - r\cos\frac{a-b}{2} +$$

$$k(x\cos\frac{a+c}{2} + y\sin\frac{a+c}{2} + r\cos\frac{a-c}{2}) = 0$$

هذا المستقيم يمر بنقطة الأصل (0، 0)

---

(1) ارجع إلى المعادلة العامة المارة بنقطة تقاطع مستقيمين:

$$ax + by + c + k(a_1x + b_1y + c_1) = 0$$

$$\therefore k \times r\cos\frac{a-c}{2} = r\cos\frac{a-b}{2} \qquad \therefore k = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a-c}{2}}$$

∴ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{rm}$ هى:

$$x\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-c}{2} + y\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-c}{2} - r\cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{a-c}{2} +$$
$$x\cos\frac{a+c}{2}\cos\frac{a-b}{2} + y\sin\frac{a+c}{2}\cos\frac{a-b}{2} + r\cos\frac{a-c}{2}\cos\frac{a-b}{2} = 0$$
$$\therefore x(\cos a\cos\frac{b-c}{2} + \cos\frac{b+c}{2}) + y(\sin a\cos\frac{b-c}{2} + \sin\frac{b+c}{2}) = 0 \quad \text{..... (5)}$$

∴ معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة تقاطع المستقيمين $\overleftrightarrow{rm}$ ، $\overleftrightarrow{bc}$ هى:

$$x(\cos a\cos\frac{b-c}{2} + \cos\frac{b+c}{2}) + y(\sin a\cos\frac{b-a}{2} + \sin\frac{b+c}{2}) +$$
$$k(x\cos\frac{b+c}{2} + y\sin\frac{b+c}{2} - r\cos\frac{b-c}{2}) = 0 \quad \text{...... (6)}$$

هذا المستقيم يمر بالنقطة $(-r\cos a, -r\sin a)$ وبالتعويض فى (6)

$\therefore k = -1$

$\therefore x\cos a + y\sin a + r = 0$ بالضرب فى $-r$

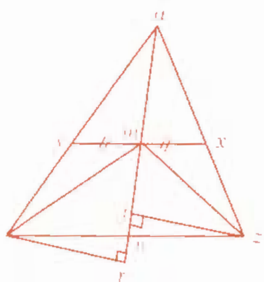
$\therefore -r\cos a.x - r\sin a.y = r^2$

وهذه معادلة المماس للدائرة: $x^2 + y^2 = r^2$

عند النقطة $d(-r\cos a, -r\sin a)$

∴ $\overleftrightarrow{ed}$ مماس للدائرة (وهو المطلوب)

• ملاحظة: يمكن حل هذا التمرين بواسطة نظريات المرحلة الإعدادية



تمهيد لإثبات أن: n منتصف $\overline{zc}$

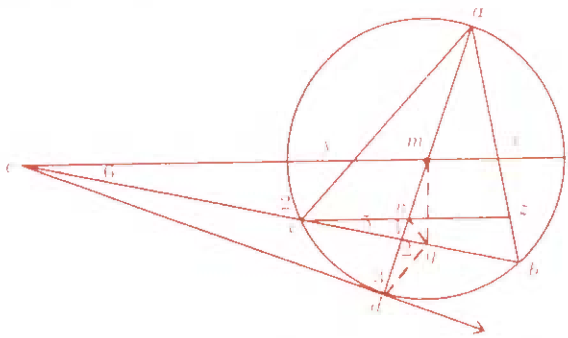
المعطيات: موجودة فى الرسم

مساحة $(\Delta\, amz)$ = مساحة $(\Delta\, amc)$

وهما مشتركان فى القاعدة $\overline{am}$

والارتفاع = $\overline{zj}$ الارتفاع $\overline{cr}$

ومن تطابق $\Delta\Delta\, zjn, crn$ ينتج أن: $zn = cn$



العمـــل: نرسم $\overline{xy} \parallel \overline{cz}$ ،

q منتصف $\overline{bc}$

البـرهـان: n منتصف $\overline{cz}$ (برهانًا) ، q منتصف $\overline{bc}$ (عملاً)

$\therefore \overline{nq} \parallel \overline{zb}$

$\therefore (\angle 1) = (\angle 2)$ لكن $(\angle 3) = (\angle 2)$ محيطيتين

$\therefore (\angle 1) = (\angle 3)$ $\therefore$ الشكل $nqdc$ دائري

$\therefore (\angle 4) = (\angle 5)$ لكن $(\angle 6) = (\angle 5)$ لأن $\overline{le} \parallel \overline{zn}$

$\therefore (\angle 4) = (\angle 6)$ $\therefore$ الشكل $mqde$ دائري

$\therefore (\angle mqe) = (\angle mde)$ لكن $(\angle mqe) = 90°$ ، $(\angle mde) = 90°$

$\therefore \overrightarrow{de}$ مماس للدائرة m عند d (وهو المطلوب)

• **ملحوظة:** $(\angle 1) = (\angle nqc)$ ، $(\angle 2) = (\angle zbc)$ ، $(\angle 3) = (\angle adc)$ ،

$(\angle 4) = (\angle qdn)$ ، $(\angle 5) = (\angle qcn)$ ، $(\angle 6) = (\angle meb)$ ،

وذلك إذا كان الرسم غير واضح حسب مقياس الرسم.

(8) هندسة وميكانيكا:

للأستاذ/ كمال الدين عبد الحليم قورة وزميله
مدرس أول بأحمد عرابي الثانوية 1962م.

• **التمرين**:

مجموع أطوال الأعمدة الساقطة من رؤوس مثلث على مستقيم قاطع لامتدادات أضلاعه = 3 أمثال طول العمود النازل من نقطة ملتقى المستقيمات المتوسطة على هذا المستقيم.

اولا: البرهان بالميكانيكا:

إذا أثرت في رؤوس مثلث a, b, c أوزان مقاديرها f, f, f فإن محصلتها تؤثر في نقطة ملتقى المستقيمات المتوسطة (g) ومقدارها $3f$

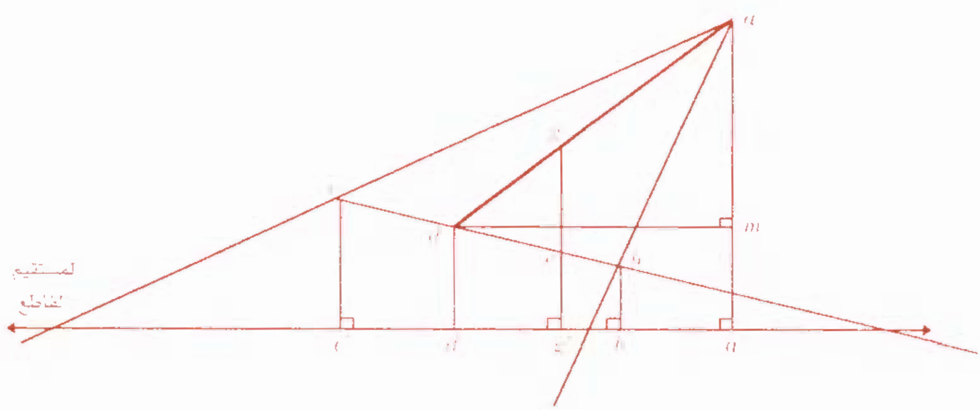
$\because$ عزم المحصلة $3f$ حول المحور $\overleftrightarrow{def}$ = مجموع عزوم (f) المؤثرة فى a ، (f) المؤثرة فى b ، (f) المؤثرة فى c حول نفس المحور.

$\therefore 3f \times m = f \times l_1 + f \times l_3 + f \times l_3$ بالقسمة على f

$\therefore 3m = l_1 + l_2 + l_3$ وهو المطلوب

ثانيا: برهان بالهندسة البحتة:

للأستاذ/ عبد العزيز إسماعيل المدرس بالزقازيق الثانوية.



نسقط من d العمود $\overleftrightarrow{d\bar{d}}$ على $\overleftrightarrow{\bar{a}\bar{c}}$ ، نسقط من d أيضًا

العمود $\overline{dm}$ على $\overleftrightarrow{a\bar{a}}$

$$\overline{g\bar{g}} = \overline{e\bar{g}} + \overline{eg}$$

لكن: $e\bar{g} = d\bar{d}$

$$\because \frac{dg}{da} = \frac{ge}{am} = \frac{1}{3}$$

(لأن g هى نقطة تلاقى المستقيمات المتوسطة)

$$\therefore ge = \frac{1}{3}am \qquad \therefore g\bar{g} = d\bar{d} + \frac{1}{3}am \qquad \therefore g\bar{g} = d\bar{d} + \frac{1}{3}(a\bar{a} - m\bar{a})$$

لكن: $m\bar{a} = d\bar{d}$

$$\therefore \overline{g\bar{g}} = d\bar{d} + \frac{1}{3}(\overline{a\bar{a}} - \overline{d\bar{d}}) = \overline{d\bar{d}} + \frac{1}{3}\overline{a\bar{a}} - \frac{1}{3}\overline{d\bar{d}} = \frac{2}{3}\overline{d\bar{d}} + \frac{1}{3}\overline{a\bar{a}}$$

لكن: $\overline{d\bar{d}} = \frac{1}{2}(\overline{c\bar{c}} + \overline{b\bar{b}})$

لأن $\overline{d\bar{d}}$ هي القاعدة المتوسطة في شبه المنحرف $cb\bar{b}\bar{c}$ حيث d منتصف $\overline{bc}$

$$\therefore g\bar{g} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}[c\bar{c} + b\bar{b}] + \frac{1}{3}a\bar{a} = \frac{1}{3}[c\bar{c} + b\bar{b}] + \frac{1}{3}a\bar{a}$$

$\therefore 3g\bar{g} = a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c}$ وهو المطلوب