الباب الخامس

ميكانيكا الأجرام السماوية

الحركة فى مجال الجاذبية وحركة الكواكب والأقمار الصناعية وسفن الفضاء

فى الجزء الأول من هذا الكتاب (أسس علم الديناميكا) درسنا ديناميكا المسارات المركزية وأوجدنا المعادلتين التفاضليتين للقوة المؤثرة على الجسيم المتحرك فى المسار المركزى (قانون القوة) وكذلك قانون السرعة الذى يحدد سرعة الجسيم عند أى نقطة فى المسار، وكمثال تطبيقى على الحركة فى مسار مركزى أخذنا الحركة الكوكبية بما فى ذلك إشارة إلى القوانين المنظمة لحركة الكواكب (قوانين كبلر) وإيجاد القوة المركزية المؤثرة على الكوكب أثناء حركته وكذلك إيجاد سرعة الكوكب عند أى نقطة فى مساره.

وفى هذا الجزء سوف نواصل الدراسة التفصيلية للحركة الكوكبية، ونتبع ذلك بأحد مواضيع الساعة، وهو دراسة حركة الأقمار الصناعية وسفن الفضاء.

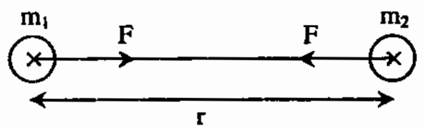
غير أننا نبدأ هنا بدراسة قانون الجذب العام وحركة الأجسام فى مجال الجاذبية الأرضية. ثم نتبعها بدراسة الموضوعات الاخرى.

أولا: حركة الأجسام فى مجال الجاذبية الأرضية:

(1) قانون الجذب العام:

ينص هذا القانون على أن: كل جسمين فى الكون يتجاذبان بقوة تتناسب طرديا مع حاصل ضرب كتلتيهما وعكسيا مع مربع البعد بينهما

رياضيا:



قوة الجذب المتبادل التى يؤثر بها كل جسيم على الآخر تتعين من المعادلة:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

حيث γ ثابت يعرف بثابت الجذب العام وقيمته:

$$\gamma = 6.66 \text{ x } 10^{-4} \text{ dyne.cm}^2/\text{gm}^2$$

حيث القوة مقاسة بالنيوتن والكتلة بالجرام والمسافة بالسنتيمتر، أما إذا كانت القوة بالنيوتن والكتلة بالكيلوجرام والمسافة بالمتر فإن:

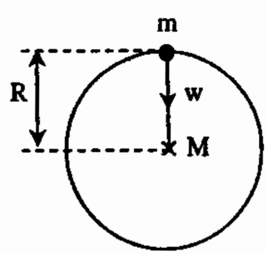
$$\gamma = 96.67 \text{ x } 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2$$

ويعرف هذا الثابت بأنه يساوى قوة الجذب بالداين (أو النيوتن) لجسمين كتلة كل منهما جرام (أو كيلو جرام) واحد والبعد بينهما سنتيمتر (أو متر) واحد.

في حالة جذب الأرض للأجسام:

بفرض أن M كتلة الأرض وm كتلة الجسيم وR نصف قطر الأرض فإن:

قوة جذب الأرض للجسيم عندما يكون على سطحها أو بالقرب منه تعرف بوزن الجسيم w حيث:



$$w = mg = \gamma \frac{Mm}{R^2}$$

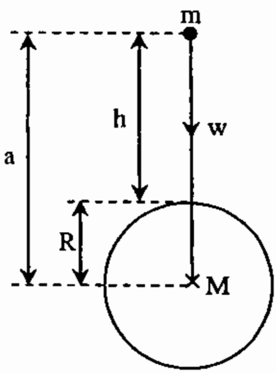
ومنها نجد أن عجلة الجاذبية الأرضية على سطح الأرض g تعطى بالعلاقة:

$$g=\gamma\frac{M}{R^2} \qquad (1)$$

ومنها أيضاً نجد أن ثابت الجذب العام يعطى بالعلاقة:

$$\gamma=\frac{gR^2}{M}$$

(2) تغير عجلة الجاذبية بتغير البعد عن الأرض:



حالة (1): إذا كان الجسيم خارج الكرة الأرضية:

إذا كان الجسيم ذو الكتلة m خارج الكرة الأرضية ويبعد عن مركزها مسافة a وكانت قيمة عجلة الجاذبية عند الجسيم هى `g فإن:

$$w`=mg`=\gamma\frac{Mm}{a^2}$$

ومنها نجد أن:

$$g`=\gamma\frac{M}{a^2} \qquad (2)$$

من (1) ,(2) نجد أن:

$$\frac{g`}{g}=\frac{R^2}{a^2} \qquad (3)$$

وحيث أن a>R فإن g`>g وهذا يعنى أن عجلة الجاذبية تقل عن مثيلتها عند سطح الأرض، وهى تتناقص كلما ابتعد الجسيم عن سطح الأرض، وتقترب من الصفر كلما ابتعد الجسم عن سطح الأرض بعدا لا نهائيا (كبير جدا).

وإذا كان h هو ارتفاع الجسيم عن سطح الأرض أى أن a=R+h فبالتعويض فى (3) نجد أن:

$$g` = g\frac{R^2}{a^2} = g\left(\frac{R}{R+h}\right)^2 = g\left(\frac{R+h}{R}\right)^{-2} = g\left(1+\frac{h}{R}\right)^{-2}$$

وبفرض أن $\frac{h}{R} < 1$ فباستخدام نظرية ذات الحدين نحصل على:

$$g` = g\left[1 - \frac{2h}{R} + 3\frac{h^2}{R^2} - ...\right] \qquad (4)$$

وإذا كانت $\frac{h}{R} << 1$ فإنه يمكن إهمال الحدود فى $\frac{h}{R}$ ومربعاتها والقوى الأعلى ونحصل على: $g` \simeq g$ كتقريب أول.

وهذا يعنى أن عجلة الجسيم على ارتفاع h من سطح الأرض بحيث أن $\frac{h}{R} << 1$ هى نفس عجلة الجاذبية على سطح الأرض.

وباعتبار أن نصف قطر الأرض لا نهائى بالنسبة لارتفاع الجسيم عن سطح الأرض فيمكن أخذ $\frac{h}{R} \to o$ وبالتالى فإن سطح الأرض (باعتبار الأرض كرة نصف قطرها لا نهائى) يمكن أخذه كمستوى بالنسبة للارتفاعات الصغيرة.

<u>حالة (2): إذا كان الجسيم داخل الكرة الأرضية (الحركة داخل الكرة الأرضية):</u>

نفرض أن الجسم ذو الكتلة m داخل الكرة الأرضية ويبعد عن مركز لأرض مسافة a وكانت `g فى هذه الحالة هى عجلة الجاذبية عند الجسيم، وكان عمق الجسيم عن سطح الأرض هو h.

$$\therefore \qquad R = h + a \longrightarrow a = R - h$$

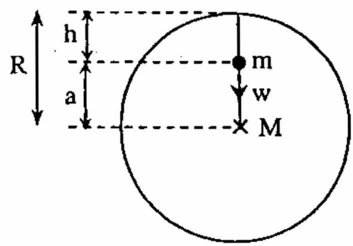
ويكون وزن الجسيم فى هذه الحالة:

$$w` = mg` \qquad (5)$$

ومن قانون الجذب العام فإن قوة التجاذب بين الجسمين M, m فى تلك الحالة هو:

$$w` = \gamma\frac{Mm}{R^2}\left(\frac{a}{R}\right) = \gamma\frac{Mm}{R^3}a \qquad (6)$$

من (6) ,(5) نحصل على:



$$g` = \gamma \frac{Mm}{R^3} a \qquad (7)$$

من (1) ,(7) نجد أن: $\frac{g`}{g} = \frac{a}{R}$

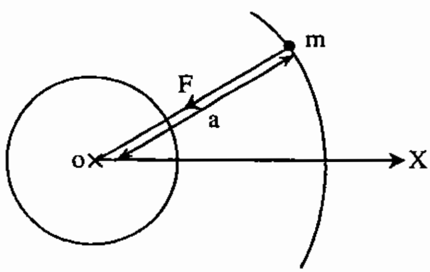
وحيث أن $a<R$ فإن $g`<g$

وباعتبار أن $a=R-h$ فإن:

$$g` = g\left(\frac{a}{R}\right) = g\left(\frac{R-h}{R}\right) = g\left(1-\frac{h}{R}\right) \qquad (8)$$

فى تلك الحالة أيضاً: إذا كانت $\frac{h}{R} << 1$ فإن $g` \simeq g$ كتقريب أول، أى أن عجلة الجسيم على عمق h من سطح الأرض بحيث أن $\frac{h}{R} << 1$ هى نفس عجلة الجاذبية على سطح الأرض.

(3) طاقة الجهد لجسيم فى مجال الجاذبية الأرضية بعيدا عن سطحها:



نفرض أن كتلة الجسيم m وعجلة الجاذبية عند سطح الأرض g، ونصف قطر الأرض R، فتكون: عجلة الجاذبية عند مسافة a من مركز الأرض هى:

$$g` = g\left(\frac{R^2}{a^2}\right) \qquad \text{[المعادلة (3)]}$$

وتكون القوى المؤثرة على الجسيم هى:

$$F = mg` = mg\frac{R^2}{a^2}$$

وباعتبار أن طاقة الجهد (u) هى الشغل المبذول بواسطة القوة F من البعد a إلــى ما لا نهاية (بإشارة سالبة) مع ملاحظة أن u=o عند a=∞.

$$\therefore \quad u = -\int_a^\infty F da = -\int_a^\infty mg\frac{R^2}{a^2} da$$

$$= -mgR^2\int_a^\infty \frac{da}{a^2} = -mgR^2\left[-\frac{1}{a}\right]_a^\infty$$

$$= mgR^2\left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{a}\right] = -mg\frac{R^2}{a}$$

وحيث أن $g = \gamma\frac{M}{R^2}$ فإن:

$$u = -m\left(\gamma\frac{M}{R^2}\right)\left(\frac{R^2}{a}\right) = -\gamma\frac{mM}{a}$$

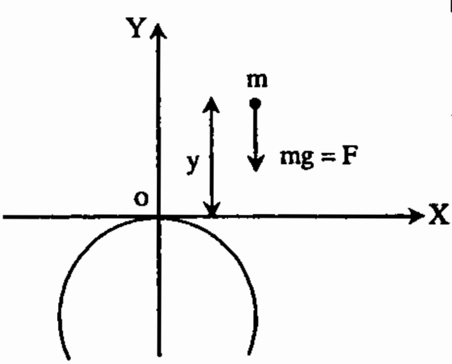
<u>حالة خاصة:</u>

<u>لإيجاد طاقة الجهد لجسيم فى مجال الجاذبية الأرضية بالقرب من سطح الأرض:</u>

نفرض أن الجسيم ذو الكتلة m يتحرك فى مستوى رأسى، وبأخــذ ســطح الأرض ox أساسا لقياس طاقة الجهد (حيث u=o عند y=o) فإن:

$$u = -\int_y^o mgdy = -mg\int_y^o dy = -mg[y]_y^o$$

$$= -mg[o - y] = mgy$$



أمثلة محلولة

مثال (1):

أوجد معادلة الطاقة فى حالة قذف جسيم كتلته m من سطح الأرض بسرعة ابتدائية v_o بالصورة: $E_o = \frac{\gamma M m}{R} = \frac{1}{2} m v_o^2$، حيث R نصف قطر الكرة الأرضية، γ ثابت الجذب العام، E_o الطاقة الكلية الابتدائية.

وإذا كان الجسيم على ارتفاع h من سطح الأرض فإن معادلة الطاقة فى هذه الحالة تؤول إلى:

$$v^2 = v_o^2 - 2gh\left(1 - \frac{h}{R}\right)$$

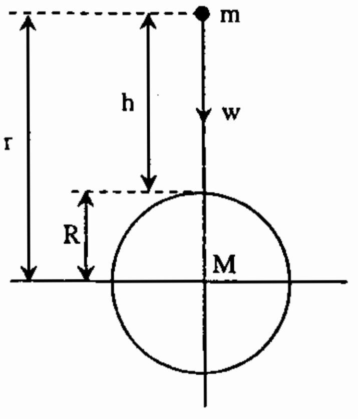
حيث g هى عجلة الجاذبية عند سطح الأرض $\left(g = \gamma \frac{M}{R^2}\right)$.

أثبت كذلك أن وزن الجسيم على بعد h من سطح الأرض يعطى بالعلاقة:

$$w = mg\left(1 - \frac{h}{R}\right)$$

الحـل:

حيث أن قوة التجاذب بين الأرض M والجسيم m الموضوع على ارتفاع r من مركز الأرض هى:



$$F = -\gamma \frac{Mm}{r^2}$$

معادلة الحركة:

$$m\ddot{r} = -\gamma \frac{Mm}{r^2}$$

وبوضع نحصل على:

$$\therefore \ \ddot{r} = -\gamma \frac{M}{r^2}$$

وبوضع $\ddot{r} = \dot{r}\dfrac{d\dot{r}}{dr}$ $\left[a = v\dfrac{dv}{dr}\right]$ نحصل على:

$$\dot{r}\frac{d\dot{r}}{dr} = -\gamma\frac{M}{r^2} \to \dot{r}d\dot{r} = -\gamma M\frac{dr}{r^2}$$

وبتكامل الطرفين:

$$\therefore \int \dot{r}d\dot{r} = -\gamma M\int\frac{dr}{r^2}$$

$$\therefore \frac{1}{2}\dot{r}^2 = -\gamma M\left[-\frac{1}{r}\right] + C = \gamma\frac{M}{r} + C$$

حيث C ثابت.

وبضرب الطرفين فى m (ثابت) وكتابة $\dot{r} = v$:

$$\therefore \frac{1}{2}mv^2 = \gamma\frac{mM}{r} + C`$$

$$\therefore \frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{\gamma mM}{r}\right) = C`$$

ونأخذ طاقة الحركة $T = \dfrac{1}{2}mv^2$ وطاقة الجهد $u = -\gamma\dfrac{mM}{r}$ [سبق إيجادها]

$$\therefore \frac{1}{2}mv^2 + u = C`$$

الثابت $C`$ هنا يمثل الطاقة الكلية [مجموع طاقتى الحركة والجهد] أى أن $C` = E$.

$$\therefore \frac{1}{2}mv^2 + u = E$$

وهو قانون ثبوت الطاقة.

وفى حالة قذف جسيم من على سطح الأرض حيث $r = R$ بسرعة ابتدائية v_o

فإن المعادلة السابقة تصبح

$$\frac{1}{2}mv_o^2 + \left(-\frac{\gamma Mm}{R}\right) = E_o$$

$$\therefore \frac{1}{2}mv_o^2 - \frac{\gamma Mm}{R} = E_o$$

حيث E_o هى الطاقة الكلية الابتدائية.

حالة خاصة:

عندما يكون الجسيم على ارتفاع h من سطح الأرض حيث r=h+R فإن معادلة الطاقة تصبح بالصورة:

$$g=\gamma\frac{M}{R^2}$$

$$\therefore\ \gamma M=gR^2$$

$$\frac{1}{2}m\nu^2-\frac{\gamma Mm}{R+h}=\frac{1}{2}m\nu_o^2-\frac{\gamma Mm}{R}$$

$$\therefore\ \nu^2=\nu_o^2+2\gamma M\left[\frac{1}{R+h}-\frac{1}{R}\right]$$

$$=\nu_o^2+2gR^2\left[\frac{1}{R+h}-\frac{1}{R}\right]$$

$$=\nu_o^2+2g\left[\frac{R^2}{R+h}-R\right]$$

$$=\nu_o^2-2g\left[\frac{h}{1+\frac{h}{R}}\right]$$

$$=\nu_o^2-2gh\left[1+\frac{h}{R}\right]^{-1}$$

وإذا كانت R>>h فباستخدام نظرية ذات الحدين يكون:

$$\left(1+\frac{h}{R}\right)^{-1}\simeq 1-\frac{h}{r}$$

$$\therefore\ \nu^2=\nu_o^2-2gh\left(1-\frac{h}{R}\right)$$

وبكتابة $g(h)=g\left(1-\frac{h}{R}\right)$ تمثل عجلة الجاذبية عند الارتفاع h عن سطح الأرض فإن:

$$\nu^2=\nu_o^2-2hg(h)$$

ويكون وزن الجسم على بعد h من سطح الأرض هو:

$$w = mg(h) = mg\left(1 - \frac{h}{R}\right)$$

مثال (2):

بين أن تغير الجانبية مع الارتفاع يمكن حسابه مقربا من دالة الجهد التى صورتها $u = mgh\left(1 - \frac{h}{R}\right)$ حيث R نصف قطر الأرض، ثم أوجد قوة التجاذب بين الجسيم m والشمس M من تلك الدالة، وأوجد معادلات الحركة للجسيم تحت تأثير تلك القوة.

الحل:

حيث أن: $u = mgh\left(1 - \frac{h}{R}\right)$

فبوضع : $g(h) = g\left(1 - \frac{h}{R}\right)$، نحصل على $u = mg(h).h$.

وهى معادلة تغير الجانبية بتغير الارتفاع.

ولإيجاد القوة:

حيث أن $u=u(h)$ فإنه من العلاقة بين القوة والجهد: $\vec{F} = -\vec{\nabla}u$ نجد أن:

$$F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right)$$

حيث:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = o, \frac{\partial u}{\partial y} = o, \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial h} = mg\left[1 - \frac{2h}{R}\right]$$

$$\therefore\ F_x = o,\ F_y = o,\ F_z = F_h = -\frac{\partial u}{\partial h} = -mg\left[1 - \frac{2h}{R}\right]$$

وتصبح معادلات الحركة بالصورة:

$$m\ddot{x} = o, \quad m\ddot{y} = o, \quad m\ddot{z} = m\ddot{h} = -mg\left[1 - \frac{2h}{R}\right]$$

مثال (٣):

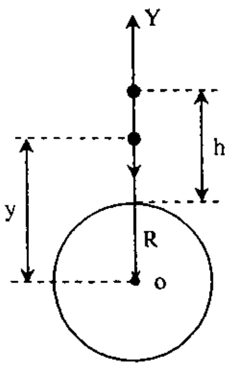
سقط جسيم من السكون من ارتفاع h فوق سطح الأرض، أثبت أن الـ زمن اللازم للوصول إلى الأرض هو:

$$t = \sqrt{\frac{R+h}{2g}}\left[\frac{R+h}{R}\sin^{-1}\sqrt{\frac{h}{R+h}} + \sqrt{\frac{h}{R}}\right]$$

حيث R نصف قطر الأرض، g عجلة الجاذبية الأرضية.

الحـل:

نفرض أن الجسيم أثناء سقوطه موجود عند نقطة تبعد مسافة y عن مركز الأرض فتكون معادلة حركة الجسيم:



$$m\ddot{y} = -\frac{mgR^2}{y^2}$$

$$\therefore \quad \ddot{y} = -g\frac{R^2}{y^2} \qquad (1)$$

$$\therefore \quad v\frac{dv}{dg} = -g\frac{R^2}{y^2}$$

بفصل المتغيرات والتكامل [باعتبار أن سرعة الجسيم عند ارتفاع y هى v]:

$$\therefore \quad \int_{o}^{v} v\,dv = -\int_{R+h}^{y}\frac{R^2}{y^2}\,dy$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}v^2=-gR^2\left[-\frac{1}{y}\right]_{R+h}^{y}$$

$$=gR^2\left[\frac{1}{y}-\frac{1}{R+h}\right]$$

$$=gR^2\left[\frac{R+h-y}{y(R+h)}\right]$$

$$\therefore\quad v=\pm\sqrt{2gR^2}\sqrt{\frac{R+h-y}{y(R+h)}}$$

$$=-\sqrt{2gR^2}\sqrt{\frac{R+h-y}{y(R+h)}} \qquad (2)$$

أخذنا الإشارة السالبة لأن المسافة تتناقص بمرور الزمن.

ولإيجاد الزمن (زمن الوصول إلى الأرض):

من (2):

$$v=\frac{dy}{dt}=-\sqrt{2gR^2}\sqrt{\frac{R+h-y}{y(R+h)}}$$

وبفصل المتغيرات والتكامل:

$$\therefore\quad \int_{R+h}^{R}\sqrt{\frac{y}{R+h-y}}\,dy=-\sqrt{\frac{2gR^2}{R+h}}\int_{o}^{t}dt$$

$$\therefore\quad t=-\sqrt{\frac{R+h}{2gR^2}}\int_{R+h}^{R}\sqrt{\frac{y}{R+h-y}}\,dy \qquad (3)$$

ولإيجاد التكامل فى (3) نستخدم التعويض:

$$y=(R+h)\sin^2\alpha \longrightarrow dy=2(R+h)\sin\alpha\cos\alpha d\alpha$$

وعندما $y=R+h$ فإن: $\alpha=\frac{\pi}{2}$ ، وعندما $y=R$ فإن: $\alpha=\sin^{-1}\sqrt{\frac{R}{R+h}}$

$$\therefore \int_{R+h}^{R}\sqrt{\frac{y}{R+h-y}}\,dy=\int_{\pi/2}^{\alpha}\sqrt{\frac{(R+h)\sin^2\alpha}{(R+h)\cos^2\alpha}}\,2(R+h)\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha$$

$$=(R+h)\int_{\pi/2}^{\alpha}2\sin^2\alpha\,d\alpha$$

$$=(R+h)\left[\alpha-\frac{\pi}{2}-\sin\alpha\cos\alpha\right]$$

$$=-(R+h)\left[\frac{\pi}{2}-\alpha+\sin\alpha\cos\alpha\right]$$

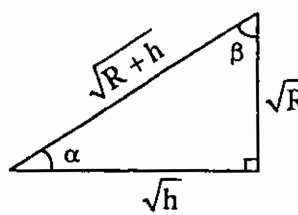
$$\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}=\pi$$

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2}-\alpha=\beta$$

$$=-(R+h)\left[\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\sqrt{\frac{R}{R+h}}+\sqrt{\frac{R}{R+h}}\sqrt{\frac{h}{R+h}}\right]$$

$$=-(R+h)\left[\sin^{-1}\sqrt{\frac{h}{R+h}}+\sqrt{\frac{Rh}{R+h}}\right]$$



وبالتعويض فى (3):

$$\therefore\ t=\sqrt{\frac{R+h}{2g}}\left[\sqrt{\frac{R+h}{R}}\sin^{-1}\sqrt{\frac{h}{R+h}}+\sqrt{\frac{h}{R}}\right]$$

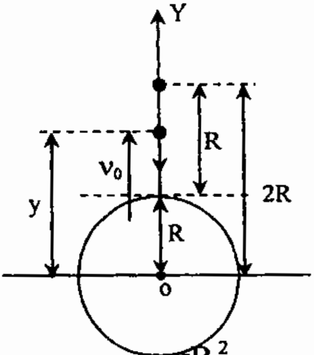
وهو المطلوب.

<u>مثال (4):</u>

قذف جسيم من سطح الأرض بسرعة تكفى لإبعاده إلى ارتفاع لا نهائى، أثبت أن الجسيم يرتفع إلى مسافة تساوى نصف قطر الأرض (R) فى زمن قدره:

$$t=\frac{1}{3}\left(4-\sqrt{2}\right)\sqrt{\frac{R}{g}}$$

حيث g عجلة الجاذبية الأرضية



الحل:

نفرض أن الجسيم قذف بالسرعة v_0 الكافية لإبعاده إلى ارتفاع لا نهائى عن سطح الأرض (وتسمى بسرعة الهروب) فإذا كان الجسيم على بعد y من مركز الأرض فإن معادلة حركته تكون:

$$m\ddot{y} = -\frac{mgR^2}{y^2} \qquad (1)$$

$$\therefore \quad \ddot{y} = -\frac{gR^2}{y^2} \rightarrow v\frac{dv}{dy} = -\frac{gR^2}{y^2}$$

وبفصل المتغيرات والتكامل:

$$\therefore \quad \int_{v_0}^{v} v\,dv = -\int_{R}^{y} \frac{gR^2}{y^2}\,dy$$

$$\therefore \quad v^2 = v_0^2 + 2gR^2\left[\frac{1}{y} - \frac{1}{R}\right] \qquad (2)$$

وحيث أن $v=o$ عندما $y=\infty$ (الجسيم يسكن عند ارتفاع لا نهائى إذا كانت سرعته الابتدائية هى سرعة الهروب من سطح الأرض v_0) فإن:

$$O = v_0^2 + 2gR^2\left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{R}\right] \rightarrow v_0^2 = 2gR$$

بالتعويض فى (2):

$$\therefore \quad v^2 = 2gR + 2gR^2\left[\frac{1}{y} - \frac{1}{R}\right] = 2gR\left[1 + \frac{R}{y} - 1\right] = \frac{2gR^2}{y}$$

$$\therefore \quad v = \pm\sqrt{\frac{2gR^2}{y}} = +\sqrt{\frac{2gR^2}{y}} \qquad (3)$$

ولإيجاد الزمن (اللازم لوصول الجسيم إلى مسافة تساوى R)

من (3):
$$\frac{dy}{dt}=\sqrt{\frac{2gR^2}{y}}$$

وبفصل المتغيرات والتكامل نحصل على:

$$\int_R^y \sqrt{y}\,dy=\sqrt{2gR^2}\int_o^t \sqrt{dt}$$

$$\therefore \quad t=\frac{1}{2gR^2}\int_R^y y^{½}dy=\frac{1}{\sqrt{2gR^2}}\left[y^{3/2}\right]_R^y=\frac{1}{\sqrt{2gR^2}}.\frac{2}{3}\left(y^{3/2}-R^{3/2}\right)$$

وبوضع y=2R نحصل على الزمن المطلوب وهو:

$$t=\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{2gR^2}}\left[2\sqrt{2}-1\right]R^{3/2}$$

$$=\frac{2}{3}\left(4-\sqrt{2}\right)\sqrt{\frac{R}{g}}$$

وهو المطلوب.

مسائل

(1) أدرس حركة جسيم قذف إلى أعلى بسرعة u من سطح الأرض تحت تأثير عجلة الجاذبية وأوجد قيمة السرعة التى لو قذف بها الجسيم من سطح الأرض لا يعود إلى الأرض ثانية (وتعرف بسرعة الهروب).

(2) (أ) أدرس حركة جسيم يسقط من السكون من مسافة بعيدة (h) عن سطح الأرض وأحسب سرعة وصول الجسيم إلى سطح الأرض.

(ب) أدرس حركة جسيم داخل الكرة الأرضية عند مسافة x عن مركز الأرض وذلك باعتبار أن قوة جذب الأرض للأجسام داخلها تتناسب طرديا مع بعدها عن المركز.

(3) أحسب أقل سرعة لقذف صاروخ من على سطح الأرض حتى يصل إلى نقطة بين الأرض والقمر يتعادل فيها قوة تجاذبهما، علما بأن كتلة القمر تساوى $\frac{1}{75}$ من كتلة الأرض وأن المسافة بين مركزيهما تساوى 60 مرة قدر نصف قطر الأرض (R) حيث R=6387 km.

(4) إذا علمت أن النسبة بين نصف قطر القمر ونصف قطر الأرض هى كنسبة 1:0.273 وأن نسبة كتلة القمر إلى كتلة الأرض هى كنسبة 75:1 ، أوجد الآتى:

(i) عجلة الجاذبية على سطح القمر.

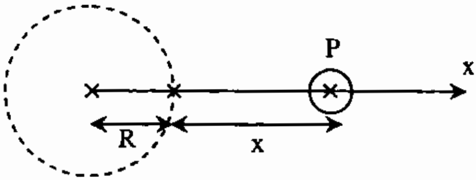
(ii) النقطة p التى تتعادل فيها جاذبية القمر مع جاذبية الأرض علما بأن المسافة بين الأرض والقمر =60 مرة قدر نصف قطر الأرض (R=6387 km).

(5) مركبة فضاء موجهة نحو مركز القمر بسرعة 3000 km/hr من نقطة على بعد من سطح القمر يساوى نصف قطر القمر R (حيث R=1738 km) فإذا كانت عجلة الجاذبية على سطح القمر تساوى تقريبا $1.75 m/sec^2$ فأوجد سرعة اصطدام المركبة الفضائية بسطح القمر.

حلول المسائل

حل المسألة (1):

نفرض أن الجسيم يبعد عن الأرض مسافة x فتكون القوة المؤثرة على الجسيم هى قوة جذب الأرض له وقيمتها: $F = mg\frac{R}{x^2}$ فى الاتجاه $\vec{PO}$ حيث R نصف قطر الأرض.



معادلة الحركة:

$$m\ddot{x} = -mg\frac{R^2}{x^2}$$

$$\therefore \quad \ddot{x} = -g\frac{R^2}{x^2} \to v\frac{dv}{dx} = -g\frac{R^2}{x^2}$$

بفصل المتغيرات والتكامل نحصل على:

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{gR^2}{x} + C_1 \qquad (1)$$

وإذا كان الجسيم قد قذف رأسيا إلى أعلى بسرعة u من سطح الأرض فإن:

(عند سطح الأرض) x=R, v=u

$$\therefore \quad \frac{1}{2}u^2 = \frac{gR^2}{x} + C_1 \to C_1 = \frac{1}{2}u^2 = -gR$$

وبالتعويض فى (1):

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}u^2 = gR^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R}\right)$$

$$\therefore \quad v^2 = u^2 + 2gR^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R}\right) \qquad (2)$$

وهى سرعة الجسيم عند مسافة x بعيدا عن سطح الأرض.

<u>ولإيجاد سرعة الهروب (u_e):</u>

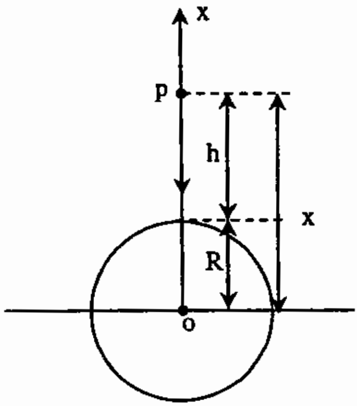
نعوض فى (2) بالقيم $v=o,\ x=\infty$ وذلك لأنه من تعريف سرعة الهروب بأنها السرعة التى لو قذف بها الجسيم من سطح الأرض لا يعود إلى الأرض ثانية أى أنه: عند $x=\infty$ ، فإن سرعته تتلاشى

$$\therefore \quad o=u_e^2+2gR^2\left(\frac{1}{\infty}-\frac{1}{R}\right)=u_e^2-2gR \longrightarrow \boxed{u_e=2gR}$$

وهو المطلوب.

<u>حل المسألة (2):</u>

<u>الجزء (أ):</u>



نفرض أن الجسيم على بعد x من مركز الأرض فتكون معادلة الحركة.

$$m\ddot{x}=-mg\frac{R^2}{x^2}$$

$$\therefore \quad \ddot{x}=-g\frac{R^2}{x^2}\rightarrow v\frac{dv}{dx}=-g\frac{R^2}{x^2}$$

وبفصل المتغيرات والتكامل نحصل على:

$$\frac{1}{2}v^2=\frac{gR^2}{x^2}+C_1 \qquad (1)$$

وإذا سقط الجسيم من السكون من ارتفاع h عن سطح الأرض فإن: $v=o,\ x=R+h$

$$\therefore \quad o=\frac{gR^2}{R+h}+C_1\rightarrow C_1=-\frac{gR^2}{R+h}$$

وبالتعويض فى (1) :

$$\therefore \quad v^2=2gR^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{R+h}\right) \qquad (2)$$

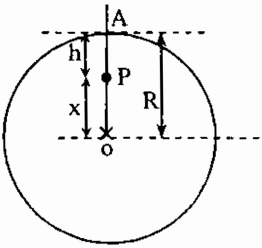
ولحساب سرعة وصول الجسيم إلى سطح الأرض نضع $x=R$ فى (2) فنحصل على:

$$v^2 = 2gR^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right) = 2gR^2\left(\frac{R+h+R}{R(R+h)}\right)$$

$$= 2gR\left[\frac{2R+h}{R+h}\right] \to \therefore v = \sqrt{2gR}\sqrt{\frac{2R+h}{R+h}} \qquad (3)$$

<u>الجزء (ب):</u> إذا كان بعد الجـ سيم عـ ن مركز الأرض يساوى x فإن قوة جـ ذب الأرض =λx (كما فى رأس المـ سألة) نحو o حيث λ ثابـ ت قيمتـ هـ تـ ساوى

$$\lambda = m\frac{g}{R}$$



<u>**معادلة الحركة:**</u>

$$m\ddot{x} = -\lambda x = -\frac{mg}{R^2}x$$

$$\therefore \quad \ddot{x} = \frac{-g}{R}x = v\frac{dv}{dx}$$

وبفصل المتغيرات و التكامل:

$$\therefore \qquad \frac{1}{2}v^2 = -\frac{g}{2R}x^2 + C_1$$

$$\therefore \qquad v^2 = -\frac{g}{R}x^2 + C \qquad (4) \qquad \Big| \; C = 2C_1$$

وعند سطح الأرض (A): فإن x=R

$$\therefore \qquad v_A^2 = -\frac{g}{R}R^2 + C = -gR + C \to C = v_A^2 + gR$$

بالتعويض فى (4)

$$\therefore \quad v^2 = -\frac{g}{R}x^2 + v_A^2 + gR$$

$$= \nu_A^2 + gR\left(1-\frac{x^2}{R^2}\right) = \nu_A^2 + gR\left(\frac{R^2-x^2}{R^2}\right) = \nu_A^2 + g\left(\frac{R^2-x^2}{R}\right)$$

$$\therefore\ \nu_A^2 = \nu^2 - g\left(\frac{R^2-x^2}{R}\right) \rightarrow \nu_A = \sqrt{\nu^2 - g\left(\frac{R^2-x^2}{R}\right)}$$

وهى السرعة عند سطح الأرض (A)، ويمكن كتابته بالصورة الآتية:

$$\nu_A = \sqrt{\nu^2 - \frac{gh}{R}(2R-h)} \qquad (6)$$

وذلك لأن:

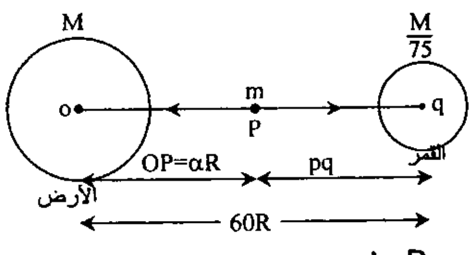
$$R^2 - x^2 = (R-x)\,(R+x) = (h)\,(R+x)$$
$$= (h)\,[R + (R-h)] = h(2R-h)$$

ولإيجاد السرعة عند مركز الأرض o: نضع x=o فى (5) فنحصل على

$$\therefore \qquad \nu_o = \sqrt{\nu^2 - g\left(\frac{R^2}{R}\right)} = \sqrt{\nu^2 - gR} \qquad (7)$$

وهو المطلوب

<u>حل المسألة (3):</u>



نفرض أن (αR) هو البعد الذى يصل إليه الصاروخ إلى نقطة P (بين الأرض والقمر) والتى يتعادل فيها جذب الأرض مع جذب القمر.

قوة جذب الأرض للصاروخ ذو الكتلة m عند P على:

$$F_1 = \gamma\frac{Mm}{(op)^2} = \gamma\frac{Mm}{(\alpha R)^2}$$

قوة جذب القمر للصاروخ عند P هى:

$$F_2 = \frac{\gamma\left(\frac{M}{75}\right)m}{(pq)^2} = \frac{\gamma\left(\frac{M}{75}\right)m}{(60R - \alpha R)^2}$$

وحيث أن $F_1=F_2$ فإن:

$$\gamma\frac{Mm}{(\alpha R)^2} = \frac{\gamma\left(\frac{M}{75}\right)m}{[R(60R - \alpha)]^2}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{75(60-\alpha)^2}$$

ومنها نجد أن: $\boxed{\alpha = 53.79}$

أى أن بعد الصاروخ عن الأرض عند وصوله إلى نقطة P = 53.79 R

<u>ولإيجاد سرعة الصاروخ:</u> نكتب معادلة حركة الصاروخ بالصورة:

$$\gamma = \frac{gR^2}{M}$$

$$m\ddot{x} = -\gamma\frac{Mm}{x^2}$$

$$\therefore \quad \ddot{x} = -\frac{\gamma M}{x^2} = -g\frac{R^2}{x^2} \quad \therefore \quad v\frac{dv}{dx} = -\frac{gR^2}{x^2}$$

بفصل المتغيرات والتكامل:

$$\int_{v_o}^{o} v\,dv = -gR^2\int_{R}^{\alpha R}\frac{dx}{x^2}$$

ومنها نجد أن:

$$v_o = \sqrt{2gR\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)}$$

وحيث أن : $g = 9.8$ ،$R = 6337$ km, $= 6397000$ m

$$\therefore \quad v_o = \sqrt{2(9.8)(6387000)\left(1 - \frac{1}{53.79}\right)}$$

$$= 11.189 \text{ km/sec.}$$

وهى أقل سرعة لازمة لقذف الصاروخ من الأرض حتى يصل إلى النقطة P بين الأرض والقمر والتى عندها يتعادل جذب الأرض مع جذب القمر.

حل المسألة (4):

قوة الجاذبية على سطح الأرض:

$$mg = \gamma \frac{Mm}{R^2} \qquad (1)$$

حيث M كتلة الأرض، R نصف قطرها، g عجلة الجاذبية الأرضية

قوة الجاذبية على سطح القمر:

$$mg' = \gamma \frac{M'm}{R'^2} \qquad (2)$$

حيث M' كتلة القمر، R' نصف قطره، g' عجلة الجاذبية للقمر.

من (1), (2) بالقسمة:

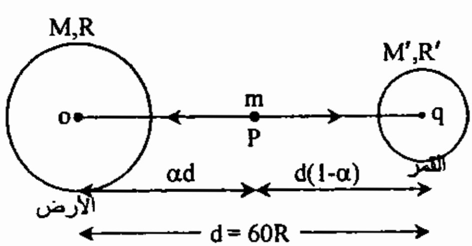
$$\frac{g'}{g} = \frac{M'}{M}\left(\frac{R}{R'}\right)^2$$

$$\therefore \quad g' = g\left(\frac{M'}{M}\right)\left(\frac{R}{R'}\right)^2 = (9.8)\left(\frac{1}{75}\right)\left(\frac{1}{0.273}\right)^2$$
$$= (0.1306)(13.417)$$
$$= 1.75 \text{ m/sec}^2$$

وهو المطلوب أولاً

المطلوب الثانى:

نفرض أن المسافة بين الأرض والقمر هى d ونفرض أن نقطة P بين الأرض والقمر (والتى تتعادل عندها جاذبية الأرض والقمر) تبعد مسافة λd عن الأرض.



$$F_1 = F_2 \to \gamma \frac{\gamma M m}{(\alpha d)^2} = \frac{\gamma\left(\frac{M}{81}\right)m}{[d(1-\alpha)]^2}$$

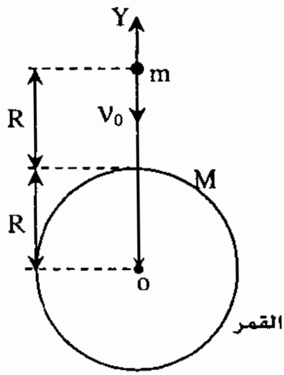
$$\therefore \quad \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{d(1-\alpha)} \to \alpha = \frac{9}{10} = 0.9$$

∴ النقطة P (وتعرف بنقطة التعادل) تبعد عن الأرض مسافة:

$$\alpha d = 0.9(60R) = 54R$$

أى مسافة تساوى 54 مرة قدر نصف قطر الأرض.

وهو المطلوب ثانياً.



__حل المسألة (5):__

معادلة الحركة للمركبة الفضائية:

$$m\ddot{y} = -\frac{\gamma M m}{y^2}$$

حيث R نصف قطر القمر، g عجلة الجاذبية على سطحه

$$\gamma = \frac{gR^2}{M}$$

$$\therefore \quad \ddot{y} = -\frac{\gamma M}{y^2} = -\frac{gR^2}{y^2} \qquad (1)$$

$$\therefore \quad v\frac{dv}{dy} = -\frac{gR^2}{y^2}$$

ويفصل المتغيرات والتكامل:

$$\therefore \quad \int_{v_o}^{v} v\,dv = \int_{2R}^{R} \frac{gR^2}{y^2}dy$$

$$\therefore \quad \left[\frac{1}{2}v^2\right]_{v_o}^{v} = -gR^2\int_{2R}^{R}\frac{dy}{y^2} = -gR^2\left[\frac{-1}{y}\right]_{2R}^{R}$$

$$\therefore \quad v^2 = v_o^2 + 2gR^2\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{2R}\right]$$

$$\therefore \quad v^2 - v_o^2 = 2gR^2\left[\frac{1}{2R}\right] = v_o^2 + gR$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{v_o^2 + gR}$$

وهى السرعة التى تصطدم بها المركبة بسطح القمر

وبالتعويض بالقيم العددية حيث:

$$v_o = 3000\text{km}/\text{hr.} = \frac{3000 \text{ x } 1000}{60 \text{ x } 60}\text{m}/\text{sec}$$

$$g = 1.75, \quad R = 1738 \text{ km} = 1738000 \text{ m}$$

نحصل على:

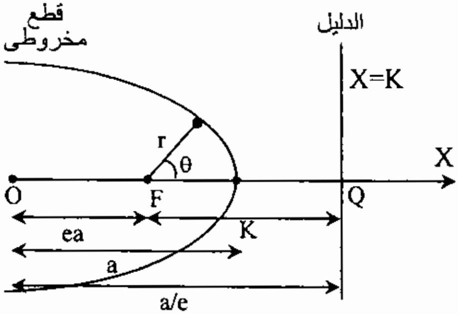
$$v = 1873.5 \text{ m/sec}$$
$$= 6744.6 \text{ km/hr}$$

وهو المطلوب

<u>ملحوظة:</u> للتحويل من m/sec إلى km/hr. نضرب فى 3.6

ثانياً: الدراسة التفصيلية لحركة الكواكب وتوابعها:

تمهيد (1): عن المعادلة القطبية للقطوع المخروطية:



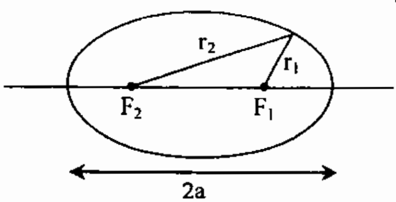
نعتبر قطع مخرطى مركزه O وبؤرته F لتكن F هى نقطة الأصل، أى نقطة على القطع تبعد مسافة r عن F وتصنع زاوية θ مع محور x (محور القطع).

ويكون لدينا العلاقات الآتية:

(1) الدليل (دليل القطع) هو الخط العمودى على المحور، ومعادلته $x=k$ أى أنه يبعد مسافة K عن البؤرة F (نقطة الأصل).

(2) البعد بين البؤرة F والمركز O هى $(e\,a)$ حيث e هى الاختلاف المركزى للقطع.

(3) البعد بين الدليل ومركز القطع O هى $\left(\frac{a}{e}\right)$.



(4) مجموع نصفى القطر الواصلين بين بؤرتى القطع وأى نقطه على القطع يسارى طول المحور الأكبر، أى أن:

$$r_1 + r_2 = 2a$$

(5) المعادلة القطبية للقطع هى: $r = \dfrac{e\,k}{1+e\cos\theta}$ [بدلالة e,k]

فإذا كانت $e=1$ فالقطع هو قطع مكافئ ومعادلته: $r = \dfrac{k}{1+\cos\theta}$

وإذا كانت $e>1$ فالقطع هو قطع زائد، فمثلا $e = 2 \leftarrow r = \dfrac{2k}{1+2\cos\theta}$

وإذا كانت $e<1$ فالقطع هو قطع ناقص، فمثلا $e = \dfrac{1}{2} \leftarrow r = \dfrac{k}{2+\cos\theta}$

(6) هناك صورة أخرى لمعادلة القطع [بدلالة e, a] هى:

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

وتستخدم هذه الصورة لدراسة حركة الكواكب فى المجموعة الشمسية.

<u>مثال:</u> أثبت العلاقة $r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$

<u>الحـل:</u>

من الشكل السابق والعلاقات المعطاة فإن:

$$oQ = oF + FQ \qquad \therefore \quad \frac{a}{e}=ea+k$$

$$\therefore \quad k=\frac{a}{e}-ea=\frac{a}{e}(1-e^2) \qquad \therefore \quad \boxed{ek=a(1-e^2)}$$

وبالتعويض فى المعادلة القطبية للقطع:

$$r=\frac{e\,k}{1+e\cos\theta} \qquad \therefore \quad r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

<u>تمهيد (2): عن الكواكب فى المجموعة الشمسية:</u>

(1) تتكون المجموعة الشمسية من (9) كواكب يتحرك كل منها فى مدار على شكل قطع ناقص حول الشمس بحيث تكون الشمس فى إحدى بؤرتى القطع.

ويتميز مدار كل كوكب باختلاف مركزى e تم تعيينه بدقة، فمثلا:

لكوكب الأرض: e=0.02

لكوكب الزهرة: e=0.01

لكوكب المريخ: e=0.09

وكلما كانت e صغيرة (e→o) كان المدار يميل إلى أن يكون أقرب للدائرة (حالة خاصة من القطع الناقص) بينما كلما كانت e كبيرة، (ولكنها e<1) كان المدار يميل إلى أن يكون أقرب إلى القطع الناقص.

<u>أكبر قيمة لـ e في الكواكب:</u>

(1) لأقرب كوكب إلى الشمس : كوكب عطارد $e=0.21$

(2) لأبعد كوكب من الشمس : كوكب بلوتو $e=0.25$

<u>(2) المذنبات (Comets):</u>

هى أجرام سماوية تتحرك حول الشمس (مثل الكواكب) فى مسارات على شكل قطوع مخروطية (ناقص أو مكافئ أو زائد)، مع ملاحظة أن الكواكب تتحرك فى قطوع ناقصة فقط. ويوجد حوالى 610 مذنب تدور حول الشمس، منها 245 مذنب تدور فى مسارات على شكل قطع ناقص. وأشهر هذه المذنبات هو: مذنب هالى (Halley's comet).

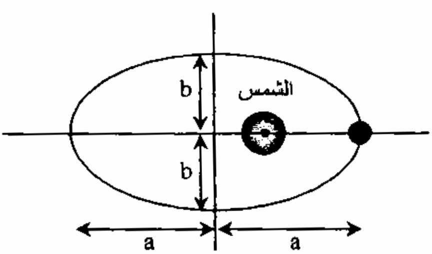
<u>(3) الوحدة الفلكية (Astronomical unit) (واختصارا Au):</u>

هى وحدة مسافات تستخدم فى القياسات الفلكية وتساوى نصف طول المحور الأكبر لمدار الأرض حول الشمس (a) الذى يساوى تقريبا 150 مليون كيلو متر.

$$Au=149.6 \times 10^6 \text{ km} = 93 \times 10^6 \text{ miles}$$

<u>مثال:</u> يدور مذنب هالى فى مدار حول الشمس على شكل قطع ناقص الشمس فى إحدى بؤرتيه بطول Au 36.18 وعرض Au 9.12، أوجد معادلة مسار المذنب وكذلك الاختلاف المركزى له.

<u>الحل:</u>



$$2a = 36.18$$
$$2b = 9.12$$
$$\therefore \quad a = \frac{36.18}{2} = 18.09$$
$$b = \frac{9.12}{2} = 4.56$$

نستخدم معادلة المسار للقطع الناقص فى الاحداثيات الكريتزية

$$\therefore \quad \frac{x^2}{(18.09)^2}+\frac{y^2}{(4.56)^2}=1 \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

وهى المعادلة المطلوبة لمسار المذنب

$$\therefore \quad \frac{x^2}{327.25}+\frac{y^2}{20.8}=1$$

ولإيجاد الاختلاف المركزى:

نستخدم العلاقة الآتية بين e, a, b (من الهندسة التحليلية)

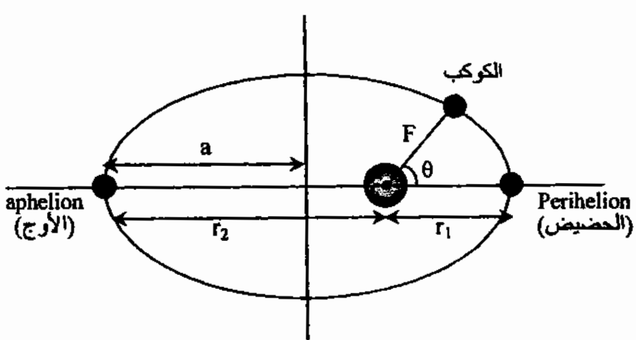
$$e=\frac{1}{a}\sqrt{a^2-b^2} \rightarrow ea=\sqrt{a^2-b^2}$$

$$\therefore \quad e=\frac{1}{18.09}\sqrt{(18.09)^2-(4.56)^2}=\frac{1}{18.09}(17.55)=0.97$$

وهو المطلوب ثانيا.

(4) نقطتى الأوج (Aphelion) والحضيض (Perihelion) للكواكب:

تسمى أقرب نقطة للكوكب (فى مساره حول الشمس) من الشمس بنقطة الحضيض (Perihelion)، وتبعد عن الشمس مسافة r_1 ، بينما تسمى أبعد نقطة للكوكب عن الشمس بنقطة الأوج (Aphelion) وتبعد عن الشمس مسافة r_2.



أمثلة محلولة

مثال (1):

أثبت أنه:

عند نقطة الحضيض: $r_1 = a(1-e)$ وعند نقطة الأوج: $r_2 = a(1+e)$

الحل:

عند نقطة الحضيض (Perihelion):

فإن $\cos\theta = 1 \leftarrow \theta = o$

ومن معادلة القطع $r = \dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$ فإن:

$$\therefore \quad r_1 = \frac{a(1-e^2)}{1+e(1)} = \frac{a(1-e)(1+e)}{1+e} = a(1-e) \qquad (1)$$

عند نقطة الأوج (Aphelion):

فإن $\cos\theta = -1 \leftarrow \theta = \pi$

$$\therefore \quad r_2 = \frac{a(1-e^2)}{1+e(-1)} = \frac{a(1-e)(1+e)}{1-e} = a(1+e) \qquad (2)$$

وهو المطلوب.

مثال (2):

أوجد نقطتي الحضيض (أقرب بعد عن الشمس) والأوج (أبعد مسافة عن الشمس) لكوكب الأرض حيث: $a= 149.59 \times 10^6$ km , $e= 0.0167$

الحل:

(1) نقطة الحضيض:

$$r_1 = a(1-e) = 149.59 \times 10^6 [1 - 0.0167]$$
$$= 147 \times 10^6 \text{ km}$$

أى أن الأرض تكون أقرب ما يمكن من الشمس على بعد 147 مليون كيلو متر تقريبا.

(2) نقطة الأوج:

$$r_1 = a(1+e) = 149.59 \times 10^6\,[1+0.0167]$$
$$\simeq 152 \times 10^6\ km$$

أى أن الأرض تكون أبعد ما يمكن عن الشمس على مسافة 152 مليون كيلو متر تقريبا.

مثال (3):

أوجد نقطتى الأوج والحضيض لكوكب بلوتو (أبعد كوكب عن الأرض فى المجموعة الشمسية) علما بأن قيمتى a, e لمسار بلوتو هما:

$a = 39.44$ Au (وحدة فلكية) , $e = 0.25$

$[Au = 149.6 \times 10^6\ km]$

الحل:

(1) لإيجاد نقطة الحضيض (أقرب بعد عن الشمس)

$$r_1 = a\,(1-e) = 39.44\,(1-0.25) = 29.58\ Au$$
$$= 29.58 \times 149.59 \times 10^6 = 4425 \times 10^6\ km$$

أى أن كوكب بلوتو يكون أقرب ما يمكن من الشمس عند مسافة 4425 مليون كيلو متر.

(2) لإيجاد نقطة الأرج (أبعد مسافة عن الشمس)

$$r_2 = a(1+e) = 39.44\,(1+0.25) = 49.3\ Au$$
$$= 49.3 \times 149.5 \times 10^6 = 7373 \times 10^6$$

أى أن كوكب بلوتو يكون أبعد ما يمكن من الشمس عند مسافة 7373 مليون كيلو متر.

ملحوظة:

كوكب بلوتو يبعد عن الشمس فى المتوسط مسافة 5865 مليون كيلو متر.
بينما كوكب الأرض يبعد عن الشمس فى المتوسط مسافة 150 مليون كيلو متر.

مسألة:

أوجد نقطتى الأوج والحضيض لمذنب هالى الذى يتحرك فى مسار على شكل قطع ناقص حول الشمس وأبعاده هى:

$$a = 36.18\ Au,\ e = 0.97$$

$$(Au = 149.59 \times 10^6\ km)$$

الحل:

لإيجاد نقطة الحضيض (أقرب بعد عن الشمس):

$$r_1 = a\,(1 - e) = 36.18\,(1 - 0.97) = 1.085\ Au$$

$$= 1.085 \times 149.59 \times 10^6 = 162.37 \times 10^6\ km$$

أى أن مذنب هالى يكون أقرب ما يمكن عن الشمس عند مسافة 162 مليون كيلو متر

لإيجاد نقطة الأوج (أكبر بعد عن الشمس):

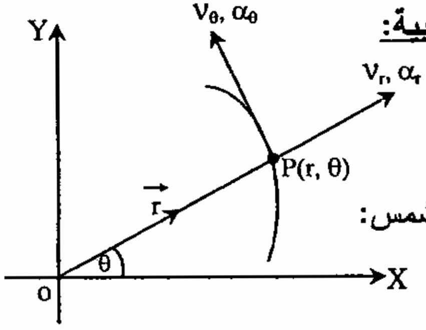
$$r_2 = a\,(1 + e) = 36.18\,(1 + 0.97) = 71.275\ Au$$

$$= 71.275 \times 149.59 \times 10^6 = 10660 \times 10^6\ km$$

أى أن مذنب هالى يكون أبعد ما يمكن عن الشمس عند مسافة 10660 مليون كيلو متر.

وهو المطلوب

(5) القوانين المنظمة لحركة الكواكب:



(i) مركبتا السرعة والعجلة فى الاحداثيات القطبية:

السرعة: $v_r = \dot{r}, v_\theta = r\dot{\theta}$

العجلة: $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2,\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$

(ii) تتحرك الكواكب بعجلة $\ddot{\vec{r}}$ تتجه دائما نحو الشمس:

(كتلة الشمس M) ، $\ddot{r} = -\gamma \dfrac{M}{r^2}$

إذا كانت m كتلة الكوكب فمن قانون الجاذبية لنيوتن:

$$m\ddot{r} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \rightarrow \ddot{r} = -\gamma \frac{M}{r^2} \qquad (1)$$

وبصورة اتجاهية فإن:

$$\ddot{\vec{r}} = -\gamma \frac{M}{r^2} \vec{e}_r$$

حيث $\vec{e}_r$ متجه وحدة فى اتجاه $\vec{r} \leftarrow$

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\therefore \quad \ddot{\vec{r}} = -\gamma \frac{M}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = -\gamma \frac{M}{r^3}\vec{r} \qquad (2)$$

من (2) نجد أن: $\ddot{\vec{r}} = k\vec{r}$ ، حيث K ثابت

بالضرب اتجاهيا فى $\vec{r}$

$$\vec{r} \wedge \ddot{\vec{r}} = k(\vec{r} \wedge \vec{r}) = o \qquad (3)$$

ولكن:

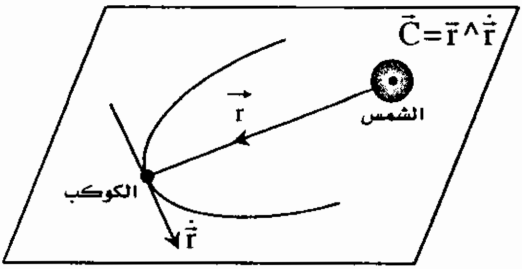
$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}) = \vec{r} \wedge \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \wedge \dot{\vec{r}} = \vec{r} \wedge \ddot{\vec{r}} \quad , \quad \dot{\vec{r}} \wedge \dot{\vec{r}} = o \qquad (4)$$

من (3),(4) فإن:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}) = o$$

$$\therefore \quad \boxed{\vec{r} \wedge \dot{\vec{r}} = \vec{C}} \qquad (5)$$

أى أن المتجهين $\vec{r},\dot{\vec{r}}$ يقعان في مستوى عمودى على المستوى الثابت $\vec{C}$ مما يعني أن حركة الكوكب بسرعة $\dot{\vec{r}}$ عمودية على $\vec{r}$ تتم في المستوى الثابت $\boxed{\vec{C}=\vec{r}\wedge\dot{\vec{r}}}$ المار بمركز الشمس.



(iii) إذا تحرك الكوكب في مجال مركزى فإن قانون حفظ كمية الحركة الزاوية ينص على أن: كمية الحركة الزاوية فى المجال المركزى تظل ثابتة دائما أثناء الحركة.

رياضيا:

$$L=|\vec{r}\wedge\vec{p}|=|\vec{r}\wedge m\vec{v}|$$
$$=m|\vec{r}\wedge\vec{v}|=m|\vec{r}\wedge\dot{\vec{r}}|=m|\vec{C}|=mC=\text{ثابت}$$

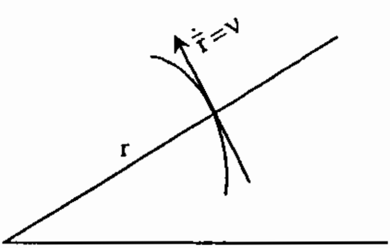
واتجاه كمية الحركة الزاوية يكون فى اتجاه عمودى على مستوى الحركة أى في اتجاه v_θ حيث $v_\theta=r\dot{\theta}=rw$ وبذلك وبصورة قياسية فإن:

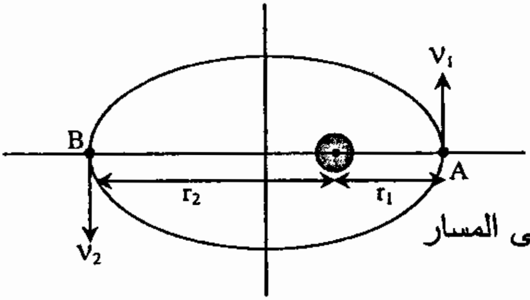
$$L=r\text{ x }p=r\text{ x }mv_\theta=mr\text{ x }r\dot{\theta}=mr^2\dot{\theta}=mr^2w$$

نلاحظ أن الأرض تتحرك فى مجال جاذبية الشمس بحيث أن مقدار كمية الحركة الزاوية للأرض وكذلك اتجاهها يظل ثابتا أثناء الحركة.

(iv) قانون ثبوت عزم السرعة:

ينص هذا القانون على أن عزم سرعة الكوكب حول الشمس هو مقدار ثابت





<u>رياضيا:</u> $r \times u = const.$

إذا كانت v_1 سرعة الكوكب

عند نقطة A فى المسار

وكانت v_2 سرعة الكوكب عند نقطة B فى المسار

فإن: $r_1 \times v_1 = r_2 \times v_2$

(v) من معادلة القطع (بدلالة e, a) أى:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \qquad (1)$$

وعند موضع أقرب نقطة من الشمس (نقطة الحضيض Perihelion) فإن:

$$r_1 = a(1-e) = r_o \qquad (2)$$

باعتبار أن r_o هى موضع البداية (عند t=o) أى بداية حركة الكوكب

فمن (2) ,(1) نحصل على:

$$r = \frac{a(1-e)(1+e)}{1+e\cos\theta} = \frac{r_o(1+e)}{1+e\cos\theta} \qquad (3)$$

تعرف الصورة (3) بالصورة القياسية لمسار الكواكب فى قطوع ناقصة

أيضا من (3) ,(1) نجد أن:

$$a(1-e^2) = r_o(1+e) \qquad (4)$$

(vi) <u>إيجاد الاختلاف المركزى لمسار الكوكب:</u>

يعرف ثابت المسارات المركزية h بأنه:

$$(1)\, h = r^2\dot{\theta} \qquad (2)\, h = vr \text{ [عزم السرعة]}$$

وعند دراستنا للحركة فى مسار مركزى على شكل قطع ناقص فإن القوة: $F = \frac{\mu}{r^2}$

حيث $\mu = \gamma M$ ، وأيضاً فإن: $\mu = \frac{h^2}{\ell}$ حيث ℓ هو نصف الوتر البؤرى العمودى للقطع:

$$\ell = a(1-e^2)$$

من تلك العلاقات نجد أن: $h^2 = \mu\ell = \gamma M\, a(1-e^2)$

وباستخدام العلاقة (4) نحصل على:

$$\therefore \quad h^2 = \gamma M\, r_o\,(1+e)$$

$$\therefore \quad 1+e = \frac{h^2}{\gamma M r_o} \longrightarrow \qquad e = \frac{h^2}{\gamma M r_o} - 1$$

وبالتعويض عن $h = v_o r_o$ (حيث v_o سرعة الكوكب فى البداية) فإن:

وهى العلاقة المطلوبة للاختلاف المركزى لمسار الكواكب $\therefore\ e = \dfrac{v_o^2 r_o}{\gamma M} - 1$

__ملحوظة:__

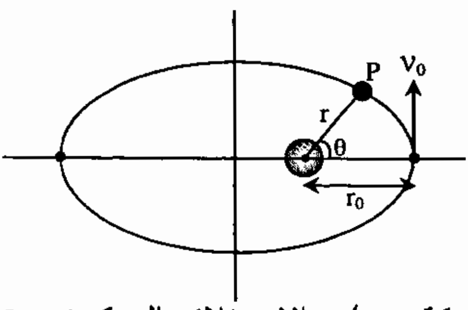
لإثبات أن $h = v_o r_o$ عند $t = o$ (فى البداية) نتبع الأتى:

حيث أن: $h = r^2\dot{\theta} = r(r\dot{\theta})$ فعند $t=o$ فإن: $h = r(r\dot{\theta})\big|_{t=o} = r_o v_o$

__قوانين كبلر لحركة الكواكب:__

وضع كبلر ثلاثة قوانين تنظم حركة الكواكب فى المجموعة الشمسية، وهذه القوانين الثلاثة هى:

__(1) قانون القطع المخروطى (Conic section law)__



"يتحرك الكوكب فى مسار على شكل قطع ناقص تقع الشمس فى إحدى بؤرتيه"

معادلة القطع هى: $r = \dfrac{r_o(1+e)}{1+e\cos\theta}$

حيث r_o هى نقطة الحضيض (عند بداية الحركة $t=o$)، والاختلاف المركزى e يعطى بالعلاقة: $e = \dfrac{r_o v_o^2}{\gamma M} - 1$ حيث v_o قيمة السرعة للكوكب عند $t=o$، M كتلة الشمس، γ ثابت الجذب العام.

(2) <u>قانون المساحات المتساوية (Equal area law)</u>

"المستقيم الواصل من الكوكب P إلى الشمس $(\bar{r})$ يمسح مساحات متساوية فى أزمنة متساوية"

<u>رياضيا:</u> معدل تغير المساحة بالنسبة للزمن يكون ثابتا أى أن: $\frac{dA}{dt} = const$

(3) <u>قانون الزمن – المسافة (Time-distance law)</u>

يرتبط الزمن الدورى لكوكب T (وهو الزمن الذى يأخذه الكوكب فى دورة كاملة حول الشمس) مع نصف المحور الأكبر لمسار الكوكب (a) بالعلاقة:

$$T^2 = \lambda\, a^3 \qquad ، \qquad \lambda = \frac{4\pi^2}{\gamma M}$$ حيث

ومنها نرى أن النسبة $\lambda = \frac{T^2}{a^3}$ أى أنها نسبة ثابتة لكل الكواكب المعروفة.

كما أن: $T^2 \propto a^3$ أى أن مربع الزمن الدورى يتناسب مع مكعب نصف المحور الأكبر (a).

<u>أرقام هامة:</u> كتلة الأرض $m = 5.975 \times 10^{24}$ kg

كتلة الشمس $M = 1.99 \times 10^{30}$ kg

<u>الكواكب (Planets):</u>

نذكر فى الجدول الآتى (للمعرفة العامة) الكواكب التسعة المعروفة والبارامترات الخاصة بكل منهما.

الكوكب	الاختلاف المركزى لمساره (e)	a (بالمليون كم)	T (الزمن الدورى)
1. الأرض Earth	0.0167	149.57	365.256 يوم
2. الزهرة Venus	0.0068	108.11	224.701 يوم
3. عطارد Mercury	0.2058	57.95	87.967 يوم
4. المريخ Mars	0.0934	227.84	1.881 سنة
5. المشترى Jupiter	0.0484	778.14	11.861 سنة
6. زحل Saturn	0.0543	1427.00	29.457 سنة
7. يورانوس Uranus	0.0460	2870.30	84.008 سنة
8. نبتون Neptune	0.0082	4499.90	164.784 سنة
9. بلوتو Pluto	0.2481	5909.00	248.350 سنة

أمثلة محلولة

مثال (1): إثبات قانون كبلر الأول:

إذا تحرك كوكب فى مسار مركزى حول الشمس تحت تأثير قوة جذب مركزى تتناسب عكسيا مع مربع بعد الكوكب عن الشمس، أثبت أن مسار الكوكب هو قطع مخروطى معادلته $r=\dfrac{\ell}{1+e\cos\theta}$ حيث $\ell=(1+e)r_o$ هى نصف الوتر البؤرى العمودى للقطع، وأن الاختلاف المركزى هو $e=\dfrac{r_o v_o^2}{\gamma M}-1$ ، حيث r_o هى نقطة الحضيض (عند t=o)، v_o قيمة سرعة الكوكب عند t=o، M كتلة الشمس، γ ثابت الجذب العام.

الحل:

المعادلة التفاضلية للمسارات المركزية هى [أنظر الجزء الأول من هذا الكتاب]:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{f}{h^2u^2} \qquad (1)$$

حيث $u=\dfrac{1}{r}$ ، f هى القوة لوحدة الكتلة، h ثابت المسارات المركزية.

قوة الجذب المركزى لكتلة قدرها m هى $F=-\dfrac{\mu m}{r^2}$ حيث $\mu=\gamma M$

ومنها نجد أن: $f=-\dfrac{\mu}{r^2}=-\mu u^2$ فبالتعويض فى (1):

$$\therefore \quad \frac{d^2u}{d\theta^2}+u=-\frac{\mu u^2}{h^2u^2}=-\frac{\mu}{h^2}\rightarrow\frac{d^2u}{d\theta^2}=-u+\frac{\mu}{h^2} \qquad (2)$$

الحل العام لهذه المعادلة التفاضلية هو مجموع حلين ويعطى بالصورة:

$$u=A\cos(\theta+\varepsilon)+\frac{\mu}{h^2} \qquad (3)$$

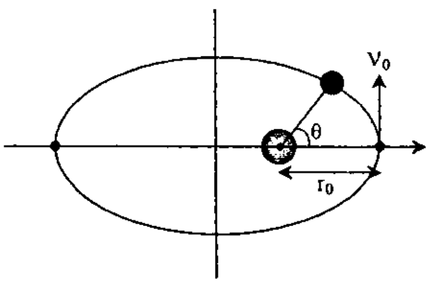
ومنها نحصل على:

$$r = \frac{1}{u} = \frac{1}{A\cos(\theta+\in) + \dfrac{\mu}{h^2}}$$

$$= \frac{\dfrac{h^2}{\mu}}{1 + A\dfrac{h^2}{\mu}\cos(\theta+\in)} = \frac{\ell}{1 + e\cos(\theta+\in)} \qquad (4)$$

وهى معادلة قطع مخروطى: نصف وتره البؤرى العمودى $\ell = \dfrac{h^2}{\mu}$ واختلافه

المركزى $e = A\dfrac{h^2}{\mu}$



ولإيجاد الثابتين المجهولين $A, \in$

فى البداية: تحرك الكوكب بسرعة ν_0 من الموضع (r_0 , o) حيث $\theta = o$، $\dfrac{du}{d\theta} = \theta$ ، وحيث أن:

$$u = A\cos(\theta + \in) + \frac{\mu}{h^2} \qquad (5)$$

$$\therefore \quad \frac{du}{d\theta} = -A\sin(\theta + \in) \qquad (6)$$

بالتعويض من الشروط الابتدائية فى (6) ,(5) نحصل على:

$$\frac{1}{r_o} = A\cos\in + \frac{\mu}{h^2} \qquad (7)$$

$$o = -A\sin\in \qquad (8)$$

بحل (8) ,(7) نحصل على الآتى:

من (8): $\sin\in = o \longleftarrow \therefore \boxed{\in = o}$

وبالتعويض فى (7):

$$\frac{1}{r_o}=A+\frac{\mu}{h^2} \qquad \therefore \quad A=\frac{1}{r_o}-\frac{\mu}{h^2}$$

وبذلك تصبح معادلة القطع (4) بالصورة:

$$\ell=\frac{h^2}{\mu} \quad \text{حيث} \quad , \quad r=\frac{\ell}{1+e\cos\theta}$$

ولما كان $\ell = a(1-e^2)$ ، وعند نقطة الحضيض فإن:

$$r = r_o = a(1-e)$$

$$\therefore \quad \ell = a(1-e)(1+e) = r_o(1+e)$$

فبالتعويض فى معادلة القطع نحصل على:

$$\boxed{r=\frac{r_o(1+e)}{1+e\cos\theta}}$$

<u>ولإيجاد الاختلاف المركزى:</u>

حيث أن:

$$\mu = \gamma M,\ \ \ell = r_2(1+e),\ \therefore\ h^2 = \mu\ell = \gamma M a(1-e^2)$$

$$\therefore\ h^2 = \gamma M\, r_o(1+e) \qquad \therefore\ 1+e=\frac{h^2}{\gamma M r_o} \qquad \therefore\ e=\frac{h^2}{\gamma M r_o}-1$$

وبالتعويض عن $h = v_o r_o$ (عزم السرعة فى البداية)

$$\therefore \quad \boxed{e=\frac{r_o v_o^2}{\gamma M}-1}$$

وهو المطلوب

<u>مثال (2): إثبات قانون كبلر الثانى:</u>

أثبت أن: معدل التغير فى المساحة بالنسبة للزمن يساوى مقدار ثابتا بمعنى أن $\frac{dA}{dt}=\text{const}$ (وهذا يعنى أن المستقيم الواصل من الشمس إلى الكوكب يمسح مساحات متساوية فى أزمنة متساوية).

<u>الحل:</u>

حيث أن ثابت المسارات المركزية $h = r^2\dot{\theta}$ فيمكن إثبات أنه فى البداية $(t = o)$ فإن:

$$h = r^2\dot{\theta}\Big|_{t=o} = r(r\dot{\theta})\Big|_{t_o} = r_o v_o$$

ولما كان عنصر المساحة فى الإحداثيات القطبية: $dA = \frac{1}{2}r^2\, d\dot{\theta}$

فإن معدل تغير المساحة:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}h = \frac{1}{2}r_o v_o = \text{const.}$$

وهو المطلوب.

<u>مثال (3): إثبات قانون كبلر الثالث:</u>

أثبت أن العلاقة بين الزمن الدورى لحركة الكوكب (T) ونصف المحور الأكبر لمسار الكوكب (a) هى: $T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma M}a^3$ أى أن: $T^2 \propto a^3$

<u>الحل:</u>

عنصر المساحة فى الإحداثيات القطبية هو: $dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$

$$\therefore \quad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}r_o v_o$$

$$\therefore \quad dA = \frac{1}{2}r_o v_o dt$$

وتكون المساحة التى يمسحها الكوكب خلال حركته على القطع الناقص فى الزمن من O إلى T هى:

$$A = \int dA = \frac{1}{2}r_o v_o \int_0^T dt = \frac{1}{2}r_o v_o T$$

وهذه المساحة هى مساحة القطع الناقص والتى تساوى $A = \pi ab$ [من الهندسة]

$$\therefore \qquad \pi ab = \frac{1}{2} r_o v_o T \rightarrow T = \frac{2\pi ab}{r_o v_o} = \frac{2\pi ab}{h} \qquad (1)$$

حيث $h = r_o v_o$ وأيضاً فإن $h^2 = \mu \ell$ حيث $\mu = \gamma M$، ℓ هو نصف الوتر البؤرى العمودى ويرتبط بنصفى المحور الأكبر (a) والأصغر (b) بالعلاقة:

$$\ell = \frac{b^2}{a}$$

$$\therefore \qquad h^2 = \gamma M \frac{b}{a} \rightarrow h = b\sqrt{\frac{\gamma M}{a}}$$

بالتعويض فى (1):

$$\therefore \qquad T = \frac{2\pi ab}{b\sqrt{\frac{\gamma M}{a}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma M}} a^{3/2}$$

وبالتربيع فإن:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma M} a^3$$

أى أن $T^2 \propto a^3$ أى أن مربع الزمن الدورى يتناسب مع مكعب نصف المحور الأكبر لمسار الكوكب (القطع الناقص). وهو المطلوب

مثال (4):

أوجد سرعة الأرض v_o فى مدارها عند نقطة الحضيض (أقرب نقطة من الشمس)، علما بأن: بعد الأرض عن الشمس عند تلك النقطة يساوى 149.577 مليون كم وأن الاختلاف المركزى لمدار الأرض هو $e = 0.0167$

(عجلة الجانبية $\gamma = 6.6726 \times 10^{-11}$، كتلة الشمس $M = 1.99 \times 10^{30}$ kg)

<u>الحل:</u>

من العلاقة $e = \frac{r_o v_o^2}{\gamma M} - 1$ فإن:

$$v_o^2 = \frac{\gamma M}{r_o}[e+1]$$

$$= \frac{(6.6726 \times 10^{-11})(1.99 \times 10^{30})}{149.577 \times 10^6}[0.0167+1] = \frac{13.278 \times 10^{19}}{149.577 \times 10^6}[0.0167]$$

$$= 0.8817 \times 10^{13}\,[1.0167] = 0.09025 \times 10^{13}$$

$$= 9.03 \times 10^8 \longrightarrow v_o \simeq \sqrt{9.03 \times 10^8} \simeq 3 \times 10^4 \text{ m/sec.}$$

<u>مثال (5):</u>

إذا كان الزمن الدورى لدوران القمر حول الأرض هو $T=2.36055 \times 10^6$ sec ، أوجد بعد القمر عن مركز الأرض.

<u>الحل:</u>

باعتبار القمر تابع للأرض فهو يدور حول الأرض فى مسار على شكل قطع ناقص مثل الأرض التى تدور حول الشمس كتابع لها، والمطلوب هنا بعد القمر عن مركز الأرض أى نصف المحور الأكبر لمسار القمر (a). فمن قانون كبلر الثالث:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma M}a^3 \longrightarrow a^3 = \frac{\gamma M}{4\pi^2}T^2$$

وهنا الكمية M هى كتلة الأرض (باعتبار القمر تابع للأرض)

$$\therefore \quad a^3 = \frac{(6.6726 \times 10^{-11})(5.475 \times 10^{24})}{4 \times (3.14)^2}(2.36055 \times 10^6)^2$$

$$\simeq 5.627 \times 10^{25}$$

$\therefore \quad a \simeq \sqrt[3]{5.627 \times 10^{25}} \simeq 3.832 \times 10^{8}\ m \simeq 383200\ km$

مثال (6):

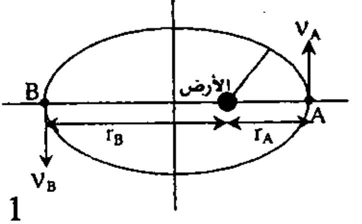
إذا كانت أكبر وأصغر سرعة لقمر يدور حول الأرض هما على الترتيب 29.2km/se, 30km/se فأوجد الاختلاف المركزى لمدار هذا القمر.

الحل:

أكبر سرعة تكون عند نقطة الحضيض A التى تبعد مسافة r_A عن الأرض (الموجودة عند بؤرة القطع) حيث $r_A = a(1-e)$

وأقل سرعة تكون عند نقطة الأوج B التى تبعد مسافة r_B عن الأرض حيث $r_B = a(1+e)$

فمن قانون ثبوت عزم السرعة حول بؤرة القطع نجد أن:



$$v_o r_A = v_B r_B = h$$

$$\therefore \quad 30\alpha(1-e) = 29.2\,\alpha(1+e)$$

$$\therefore \quad 30 - 30\,e = 29.2 + 29.2\,e$$

$$\therefore \quad 0.8 = 59.2\,e \longrightarrow e = 0.0135 < 1$$

فالمسار يكون على شكل قطع ناقص.

مثال (7):

إذا كان الزمن الدورى لدوران كوكب المريخ حول الشمس يساوى 687 يوما وبعده المتوسط عن الشمس يساوى 141.5 مليون ميل، وكان بعد أحد أقماره (ديموس) عنه 14600 ميل والزمن الدورى له 30 ساعة، 18 دقيقة ، فاثبت أن كتلة الشمس أكبر بقليل من 3 مليون مرة كتلة المريخ.

الحل:

الزمن الدورى للمريخ (من قانون كبلر الثالث):

$$T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma M}} a_1^{3/2} \qquad (1)$$

حيث M هى كتلة الشمس (المريخ تابع للشمس)

الزمن الدورى للقمر ديموس:

$$T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma m}} a_2^{3/2} \qquad (2)$$

حيث m كتلة المريخ (القمر تابع للمريخ)

من (1)، (2) بالقسمة:

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{m}{M}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{3/2}} \rightarrow \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \frac{m}{M}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$$

$$\therefore \quad \frac{M}{m} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^3$$

$$= \left(\frac{30 \text{ x } 60 \text{ x } 60 + 18 \text{ x } 60}{678 \text{ x } 24 \text{ x } 60 \text{ x } 60}\right)^2 \text{x} \left(\frac{14600}{141500000}\right)^3$$

$$= 3.074 \text{ x } 10^6$$

أى أن كتلة الشمس (M)=3.074 مليون مرة قدره كتلة المريخ (m) أى أكبر بقليل من 3 مليون مرة قدر تلك الكتلة.

وهو المطلوب.

مسائل على حركة الكواكب وتوابعها

1. إذا تحرك كوكب فى مسار دائرى فأوجد قيمة السرعة الابتدائية له v_o من العلاقة

$$. \; e=\frac{r_o v_o^2}{\gamma M}-1$$

2. إذا كانت أكبر وأصغر سرعة لكوكب يدور حول الشمس هما على الترتيب 90 ft/sec, 110 ft/sec والزمن الدورى للكوكب يساوى 20 دقيقة، فأوجد الاختلاف المركزى e لمسار الكوكب وطول محوره الأكبر (2a).

3. باعتبار أن الزمن الدورى للأرض حول الشمس هو 365.25 يوم وبعدها عن الشمس هو 93 مليون ميل والزمن الدورى للقمر حول الأرض هو 27.32 يوم ومتوسط بعده عن الأرض هو 240 ألف ميل فاثبت أن كتلة الشمس أكبر بقليل من 325 ألف مرة قدر كتلة الأرض بالتقريب.

4. إذا كان زمن الدورة الكاملة لدوران الأرض حول الشمس 365 يوم وكانت أبعد مسافة للأرض عن مركز الشمس هى 152×10^9m وأقرب مسافة هى 147×10^9m، أوجد ما يلى علما بأن ثابت الجاذبية $\gamma=6.673 \times 10^{-11}$:

(i) كتلة الشمس.

(ii) الاختلاف المركزى لمدار الأرض حول الشمس.

(iii) سرعة دوران الأرض حول الشمس.

(iv) المعادلة القطبية لمسار الأرض حول الشمس.

5. إذا بدأ تابع صاروخى دورانه حول الأرض فى مسار دائرى نصف قطره r_o وذلك بسرعة v_o، ثم حدث انفجار فجائى فى محرك الصاروخ مما تسبب فى زيادة سرعته بنسبة 10% وبالتالى تغير شكل المدار والمطلوب إيجاد معادلة المدار الجديد للتابع وكذلك أبعد مسافة يصل إليها التابع (مسافة الأوج) عن مركز الأرض.

6. يتحرك تابع صاروخى من الأرض مبتدئا بمدار دائرى فإذا كان المطلوب وضع هذا التابع فى مدار جديد له مسافة أوج تساوى 240 ألف ميل فأحسب نسبة السرعة الجديدة إلى سرعته فى المدار الدائرى علما بأن نصف قطر المدار الدائرى تساوى 4 آلاف ميل، وإذا كانت نسبة السرعة إلى السرعة المحسوبة أعلاه هى 0.99 فأوجد بعد نقطة الأوج فى هذه الحالة.

حلول المسائل على حركة الكواكب وتوابعها

حل المسألة (١):

فى حالة الدائرة فإن الاختلاف المركزى e=o ومن العلاقة المعطاة:

$$o = \frac{r_o v_o^2}{\gamma M} - 1 \qquad \therefore \quad \frac{r_o v_o^2}{\gamma M} = 1 \rightarrow v_o^2 = \frac{\gamma M}{r_o}$$

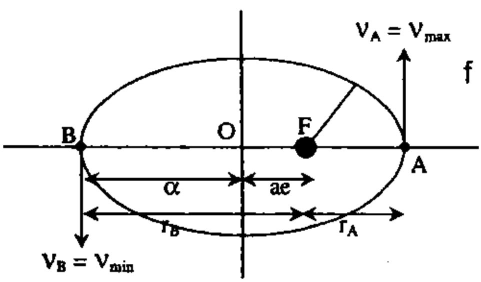
$$\therefore \qquad v_o = \sqrt{\frac{\gamma M}{r_o}}$$

وإذا كانت $\mu = \gamma M$ فإن:

$$v_o = \sqrt{\frac{\mu}{r_o}}$$

وحيث أن r_o ,μ ثابتان فإن الكوكب المتحرك فى المسار الدائرى يتحرك بـ سرعة ثابتة v_o تساوى سرعته الابتدائية، هذا إذا لم يحدث أى خلل فى شكل المسار أثنـاء الحركة تسبب الزيادة فى سرعة الكوكب وبالتالى يتغير شكل المدار.

حل المسألة (٢):



من قانون ثبوت عزم السرعة حول البؤرة f

فإن: $v_A r_A = v_B r_B$

$$\therefore\ 110 \text{ x } a(1-e)$$
$$= 90 \text{ x } a(1+a)$$

ومنها: $\boxed{e = 0.1}$

الزمن الدورى (من قانون كبلر الثالث):

$$T^2 = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2} = 20 \text{ x } 60$$

وبالتربيع نحصل على:

$$\frac{4\pi^2}{\mu} a^3 = 400 \text{ x } 60 \text{ x } 60 = 1440000 \qquad (1)$$

وإذا كانت السرعة عند نهايتى قطر ثابت فى القطع هما v_2، v_1 فمن خواص القطع الناقص فإن حاصل ضربهما: $v_1 v_2 = \frac{\mu}{a}$

(أخذ كمثال فى الجزء الأول من هذا الكتاب)

$$\therefore \quad \frac{\mu}{a} = (90)(110) = 9900$$

$$\therefore \quad \mu = 9900a \qquad (2)$$

من (2) ,(1) نحصل على:

$$4\pi^2 \frac{a^3}{9900a} = 1440000$$

$$\therefore \quad a^2 = \frac{9900 \text{ x } 1440000}{4(3.14)^2} = 3564 \text{ x } 10^5$$

$$\therefore \quad a = \sqrt{3564 \text{ x } 10^5} = 187 \text{ x } 10^2$$

ويكون طول المحور الأكبر هو:

$$2a = 374 \text{ x } 10^2 \text{ ft} \quad \text{(قدم)}$$

<u>حل المسألة (3):</u>

الزمن الدورى للقمر:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma m}} a_1^{3/2} \qquad (2)$$

حيث m كتلة الأرض (القمر تابع للأرض)

الزمن الدورى للأرض:

$$T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma M}} a_2^{3/2} \qquad (1)$$

حيث M كتلة الشمس (الأرض تابع للشمس)

من (1) ,(2) بالقسمة:

$$\frac{T_1}{T_2}=\sqrt{\frac{M}{m}}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{3/2}\rightarrow\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2=\frac{M}{m}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$$

$$\therefore \qquad \therefore \qquad \frac{M}{m}=\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^3$$

$$=\left(\frac{27.32 \text{ x } 24 \text{ x } 60+60}{365.25 \text{ x } 24 \text{ x } 60 \text{ x } 60}\right)^2 \text{x}\left(\frac{93000000}{240000}\right)^3$$

$$=(0.0559) \text{ x } (387.5)^3=325.257$$

أى أن كتلة الشمس أكبر بقليل من 325 ألف مرة قدر كتلة الأرض.

وهو المطلوب

<u>حل المسألة (4):</u>

حيث أن: $r_A+r_B=2a$

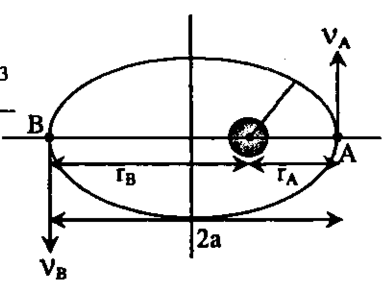
$$(147+152) \text{ x } 10^9=2a \;\therefore$$

$$\therefore\; a=149.5 \text{ x } 10^9 \text{ m}$$

<u>ولإيجاد كتلة الشمس (M)</u>

من قانون كبلر الثالث نجد أن:

$$\frac{a^2}{T^2}=\frac{\mu}{4\pi^2} \quad , \qquad \mu=\gamma M$$



$$\therefore \qquad \mu=\frac{4\pi^2a^3}{T^2}=\frac{4(3.14)^2(149.5 \text{ x } 10^9)^3}{(365 \text{ x } 24\ 60 \text{ x } 60)^2}$$

$$=1.326 \text{ x } 10^{20}=\gamma M$$

$$\therefore \qquad M=\frac{\mu}{\gamma}=\frac{1.326 \text{ x } 10^{20}}{6.673 \text{ x} 10^{-11}}=1.987 \text{ x } 10^{30} \text{ kgm}$$

<u>ولإيجاد e (الاختلاف المركزى لمدار الأرض حول الشمس)</u>

عند A (نقطة الحضيض) فإن:

$$r_A = a(1-e) \qquad \therefore\ 147 \times 10^9 = 149.5 \times 10^9\,[1-e]$$

ومنها $\boxed{e = 0.017}$

<u>ولإيجاد سرعة دوران الأرض حول الشمس:</u>

هناك سرعتان: أكبر سرعة $v_{max} = v_A$ وأقل سرعة $v_{min} = v_B$ ومن قانون ثبات عزم السرعة حول البؤرة فإن:

$$r_A v_A = r_B v_B = h$$

ومن معادلة الاختلاف المركزى:

$$e = \frac{r_o v_o^2}{\mu} - 1$$

$$= \frac{r_A v_A^2}{\mu} - 1 \rightarrow v_A^2 = \frac{\mu}{r_A}(e+1)$$

وبالتعويض عن قيم μ, r_A, e نحصل على:

$$v_A^2 = \frac{1.326 \times 10^{20}}{147 \times 10^9}(0.017+1)$$

ومنها $v_A = 30.288 \times 10^3$ m/sec.

ولما كان $v_A r_A = v_B r_B$ فإن:

$$\therefore \quad v_B = v_A \frac{r_A}{r_B} = 30.288 \times 10^3 \times \frac{147 \times 10^9}{152 \times 10^9}$$

$$= 29.275 \times 10^3 \text{ m/sec.}$$

<u>ولإيجاد المعادلة القطبية لمسار الأرض حول الشمس:</u>

$$r = \frac{\ell}{1 + e\cos\theta}$$

حيث

$$\ell = \frac{h^2}{\mu} = \frac{(\nu_A r_A)^2}{\mu}$$

$$= \frac{(30.228 \text{ x } 10^3 \text{ x } 147 \text{ x } 10^9)^2}{1.326 \text{ x } 10^{20}} = 149.499 \text{ x } 10^9 \text{m}$$

وتكون المعادلة القطبية للمسار:

$$r = \frac{149.499 \text{ x } 10^9}{1 + 0.017 \cos\theta}$$

وهو المطلوب.

<u>حل المسألة (5):</u>

حيث أن: $e = \frac{r_o \nu_o^2}{\mu} - 1 = \frac{r_o \nu_o^2}{\gamma M} - 1$ وللمسار الدائرى فإن e=o ومنهما:

$$\therefore \quad \frac{r_o \nu_o^2}{\mu} = 1 \rightarrow \nu_o^2 = \frac{\mu}{r_o}$$

وباعتبار أن الحركة فى المسار بدأت بالسرعة ν_c وهى ثابتة فإن:

$$\nu_c^2 = \frac{\mu}{r_o}$$

ويأخذ هذه السرعة هى سرعة التابع الصاروخى فى مداره الدائرى قبل تعرضه للانفجار، وبعد الانفجار زادت سرعته بنسبة 10% فبفرض أن التابع بعد الانفجار تحرك بسرعة ابتدائية ν_o فى مساره الجديد فإن:

$$\nu_o = 100\% \ \nu_c + 10\% \ \nu_c = 110\% \ \nu_c = 1.1 \ \nu_c$$

ولإيجاد المعادلة القياسية للمدار بدلالة ν_c, ν_o:

حيث أن: $e = \frac{r_o \nu_o^2}{\mu} - 1$ وأن: $\nu_c^2 = \frac{\mu}{r_o}$ فمن تلك المعادلات نجد أن:

$$\therefore \quad e = \frac{\nu_o^2}{\nu_c^2} - 1 \qquad \qquad \therefore \quad e + 1 = \left(\frac{\nu_o}{\nu_c}\right)^2$$

$$\therefore \quad \ell = a(1 - e^2) = r_o(1 + e)$$
$$= r_o\left(\frac{v_o}{v_c}\right)^2$$

وتصبح معادلة المدار القياسية بالصورة:

$$r = \frac{\ell}{1 + e\cos\theta} = \frac{r_o\left(\frac{v_o}{v_c}\right)^2}{1 + \left[\left(\frac{v_o}{c_v}\right)^2 - 1\right]\cos\theta} \qquad (1)$$

وعند أقصى نقطة (نقطة الأوج) فإن: $\theta = 180^\circ$، $r = r_1$

$$\therefore \quad r_1 = \frac{r_o\left(\frac{v_o}{v_c}\right)^2}{1 + \left[\left(\frac{v_o}{v_c}\right)^2 - 1\right](-1)} = \frac{r_o\left(\frac{v_o}{v_c}\right)^2}{2 - \left(\frac{v_o}{v_c}\right)^2} \qquad (2)$$

<u>فى المسألة:</u>

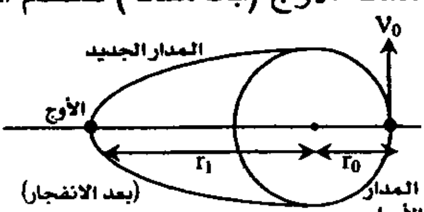
المطلوب المعادلة القطبية للمدار الجديد بعد الانفجار حيث $\frac{v_o}{v_c} = 1.1$

فبالتعويض فى (1) نحصل على:

$$\therefore \quad r = r_o\frac{(1.1)^2}{1 + [(1.1)^2 - 1]\cos\theta} = \frac{1.21\, r_o}{1 + 0.21\cos\theta}$$

ولإيجاد مسافة الأوج (أبعد مسافة) نستخدم العلاقة (2):

$$\therefore \quad r_1 = \frac{r_0(1.1)^2}{2 - (1.1)^2} = 1.53\, r_o$$



حل المسألة (6):

إذا كانت r_1 هى مسافة الأوج فى المدار الجديد وكانت r_o هى نصف قطر المدار الدائرى فإن:

$$\frac{r_1}{r_o}=\frac{240000}{4000}=60 \qquad (1)$$

ومن العلاقة:

$$r_1=\frac{r_o\left(\frac{v_o}{v_c}\right)^2}{2-\left(\frac{v_o}{v_c}\right)^2}$$

$$\therefore \quad \frac{r_1}{r_o}=\frac{\left(\frac{v_o}{v_c}\right)^2}{2-\left(\frac{v_o}{v_c}\right)^2}=\frac{x^2}{2-x^2} \qquad (2), \quad x=\frac{v_o}{v_c}$$ حيث

من (1), (2):

$$\therefore \; 60=\frac{x^2}{2-x^2} \qquad \therefore \; x^2=120-60\,x^2 \qquad \therefore \; 61\,x^2=120$$

$$\therefore \; x^2=\frac{120}{61}=\left(\frac{v_o}{v_c}\right)^2 \qquad \therefore \; \frac{v_o}{v_c}=\sqrt{\frac{120}{61}}=1.4026 \qquad (3)$$

وهى نسبة السرعة الجديدة v_o إلى السرعة فى المدار الدائرى v_c.

<u>الجزء الثاني:</u>

إذا كانت نسبة السرعة = 0.99 من نسبة السرعة المحسوبة في العلاقة (3)، فإن $\left(\frac{v_o}{v_c}\right)$ في هذه الحالة تكون:

$$\left(\frac{v_o}{v_c}\right) = 0.99 \text{ x } 1.4026 = 1.389$$

وبالتعويض في معادلة نقطة الأوج نحصل على:

$$r_1 = r_o \frac{\left(\frac{v_o}{v_c}\right)^2}{2-\left(\frac{v_o}{v_c}\right)^2} = (4000)\frac{(1398)^2}{2-(1.389)^2} = 1.09188 \text{ x } 10^5 \text{ miles}$$

وهو بعد نقطة الأوج في هذه الحالة.

وهو المطلوب.

ثالثا: حركة الأقمار الصناعية وسفن الفضاء

مقدمة عن الأقمار الصناعية وسفن الفضاء:

عندما اكتشف كبلر قوانينه الثلاثة (حوالى عام 1600م) طبقها على الكواكب التى كانت معروفة فى وقته (6 كواكب فقط)، غير أن التطور الحديث فى الميكانيكا السماوية بين أن تلك القوانين تصلح للتطبيق على أى جسيم يتحرك فى مجال جسيم آخر تحت تأثير قوة تخضع لقانون التربيع العكسى $\left(F \alpha \frac{1}{r^2}\right)$، وبذلك تم تطبيقهما على المذنبات التى هى أجرام سماوية تتحرك فى مدارات حول الشمس، وعلى مدار الأقمار حول الكواكب ومنها القمر الذى يدور حول أرضنا، وكذلك على مدار بعض سفن الفضاء مثل سفينة الفضاء أبوللو 8 التى تدور حول القمر.

وفى عام 1957 تم إرسال أول قمر صناعى (Satellite) يدور حول الأرض فى مدار محدد وهو القمر سبوتنيك I وفى العام التالى (1958) تم إطلاق قمر صناعى آخر للدوران حول الأرض هو فانجارد I (Vanguard I)، ويهتم هذا القمر بالعديد من الدراسات والتحقيقات العلمية مثل تأثير جاذبية الشمس والقمر على مدارات تلك الأقمار التى تدور حول الأرض ومثل دراسة تأثير ضغط الإشعاع الشمسى على مدار القمر الصناعى مما يسبب تشويه المدار.

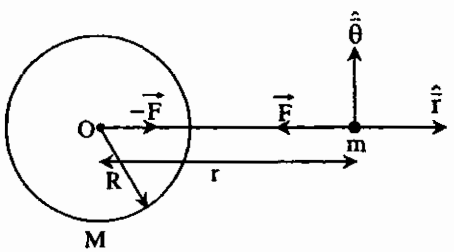
كما تم إرسال أقمار صناعية حول بعض الكواكب مثل القمر الصناعى فايكنج I (Viking I) الذى أرسل لكى يدور حول المريخ بهدف دراسة سطح هذا الكوكب وتقدير بعض القياسات الخاصة به.

وتدور الأقمار الصناعية فى مدارات على شكل قطوع ناقصة (عادة) ويطبق عليها قوانين كبلر كما تطبق على الكواكب المعروفة فى مداراتها حول الشمس.

أما سفن الفضاء التى تدور حول الأرض فهى تسير فى مدرات على شكل قطع مخروطى (ناقص أو مكافئ أو زائد) أو دائرة وغالبا ما تطلق قذائف (صواريخ دفع) أثناء حركتها فترتفع بذلك أو تنخفض سرعتها ويتغير شكل مدارها.

الفرق بين القمر الصناعى (Satellite) والمقذوف (Projectile):

كلاهما يتحرك تحت تأثير جذب الأرض، غير أن القمر الصناعى يتحرك فى مسار بعيدا عن سطح الأرض بما يكفى لجعل قوة جذب الأرض له متغيرة بمعنى أن وزنه يتغير بحسب بعده عن مركز الأرض.



فإذا كانت كتلة القمر الصناعى m وكتلة الأرض M والمسافة بين القمر ومركز الأرض هى: r، فإن مقدار قوة الجذب بينهما تكون: $F=\gamma\dfrac{mM}{r^2}$

حيث γ ثابت الجذب العام

قوة الجذب المؤثر على القمر الصناعى $\overline{F}=-\gamma\dfrac{mM}{r^2}\hat{r}$

ومن قانون نيوتن الثانى: $\overline{F}=m\bar{a}$

$$\frac{-\gamma mM}{r^2}\hat{r}=m(a_r\hat{r}+a_\theta\hat{\theta})$$

حيث a_θ، a_r مركبتا عجلة القمر الصناعى فى الاتجاهين $\hat{\theta}$، $\hat{r}$.

حل معادلة حركة القمر الصناعى فى الاتجاه العرضى $\hat{\theta}$:

$$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2,\ a_\theta=2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}$$

ولما كان $a_\theta=o$ وبكتابة $w=\dot{\theta}$ أى أن $\dot{w}=\ddot{\theta}$ فإن:

$$2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}=o \qquad \therefore\ 2\dot{r}w=-r\dot{w}\rightarrow 2w\frac{dr}{dt}=-\frac{rdw}{dt}$$

$\therefore \quad 2wdr = -rdw$

$\therefore \quad \frac{2dr}{dt} = -\frac{dw}{w} \to \int 2\frac{dr}{r} = -\int \frac{dw}{w} \to \ln r = -\ln w + c$

$\therefore \quad \ln r^2 = -\ln w + \ln c \quad \therefore \ \ln wr^2 = \ln c$

$\therefore \ wr^2 = C \longrightarrow \boxed{r\nu_\theta = C}$

$\nu_\theta = r\dot{\theta} = rw$

$\therefore \ w = \frac{\nu_\theta}{r}$

$w^2 r = r\nu_\theta$

أى أن القمر الصناعى يتحرك بحيث يكون حاصل ضرب بعده عن مركز الأرض والمركبة القطرية لسرعته ثابتة وهو قانون ثبوت عزم السرعة، بحيث أنه فى بداية الحركة مثلا يكون: $r_o(\nu_\theta)_o = C$

حل معادلة حركة القمر الصناعى فى الاتجاه القطرى أو المركزى $(\hat{r})$:

معادلة الحركة:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \qquad , \qquad \dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$$

$$\therefore \quad \frac{-\gamma M}{r^2} = \ddot{r} - r\left(\frac{C}{r^2}\right)^2 = \ddot{r} - \frac{C^2}{r^3}$$

$$\ddot{r} = -\frac{\gamma M}{r^2} + \frac{C^2}{r^3} = \nu_r \frac{d\nu_r}{dr}$$

$$\ddot{r} = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\nu_r}{dt} = \frac{d\nu_r}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} = \nu_r \frac{d\nu_r}{dr}$$

$$\therefore \quad \nu_r d\nu_r = -\left(\frac{\gamma M}{r^2} + \frac{C^2}{r^3}\right)dr$$

وبإجراء التكامل:

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\nu_r^2 = \frac{\gamma M}{r} - \frac{C^2}{2r^2} + B \qquad (1)$$

<u>إيجاد الثابتين B, C:</u> من الشروط الابتدائية (لحظة إطلاق القمر):

$$\vec{r} = r_o\hat{\vec{r}} \qquad , \qquad \vec{v}_o = v_o\hat{\vec{\theta}}$$

نجد أن:

$$\therefore \quad C = r_o v_o \qquad , \qquad B = \frac{1}{2}v_o^2 - \frac{\gamma M}{r}$$

بالتعويض فى (1):

$$\therefore \quad \left(\frac{v_r}{v_o}\right)^2 = \left(1 - \frac{r_o}{r}\right)\left[\left(1 + \frac{r_o}{r}\right) - \frac{2\gamma M}{r_o v_o^2}\right] \qquad (2)$$

<u>إيجاد أقصى ارتفاع يصل اليه القمر:</u>

عند أقصى ارتفاع h_{max} يكون الموضع $\vec{r} = (R + h_{max})\hat{\vec{r}} = r_{max}\hat{\vec{r}}$

والسرعة: $\vec{v} = v_{max}\hat{\vec{\theta}}$

وتكون المركبة القطرية للسرعة تساوى صفرا أى أنه: عند $r = r_{max}$ فإن $v_r = o$

بالتعويض فى (2) نحصل على:

$$r_{max} = \frac{r_o}{\frac{2\gamma M}{r_o v_o^2} - 1}$$

وبوضع المقدار الثابت $\varepsilon = \frac{2\gamma M}{r_o v_o^2}$ فإن:

$$\boxed{r_{max} = \frac{r_o}{\varepsilon - 1}} \qquad (3)$$

وهذا الثابت يعتمد مقامه على الشروط الابتدائية لإطلاق القمر الصناعى ويمكن كتابة هذا الثابت بدلالة عجلة الجاذبية عند سطح الأرض (أى الوزن) حيث:

$$mg_o = \frac{\gamma m M}{R^2} \qquad \therefore \quad \gamma M = g_o R^2$$

$$\therefore \qquad \varepsilon = \frac{2g_o R^2}{r_o v_o^2}$$

حيث:

$$g_o = 9.81 \qquad\qquad R = 6370 \text{ x } 10^3 \text{ m}$$

$$\therefore \qquad 2g_o R^2 = 2(9.8)(6370 \text{ x } 10^3)^2 = 796 \text{ x } 10^{12}$$

وتصبح العلاقة (2):

$$\left(\frac{v_r}{v_o}\right)^2 = \left(1 - \frac{r_o}{r}\right)\left[\left(1 + \frac{r_o}{r}\right) - \varepsilon\right]$$

أمثلة محلولة على حركة الأقمار وسفن الفضاء

مثال (1):

إذا كانت T (الزمن الدورى) تقاس بالثانية، وكان a (نصف المحور الأكبر للمدار) يقاس بالمتر، فاوجد قيمة $\lambda = \dfrac{T^2}{a^3}$ فى الحالتين الآتيتين:

(i) الكواكب فى المجموعة الشمسية.

(ii) الأقمار الصناعية فى مداراتها حول الأرض.

الحل:

الكمية $\lambda = \dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{\mu} = \dfrac{4\pi^2}{\gamma M}$ هى كمية ثابتة للكواكب فى المجموعة الشمسية باعتبار M هى كتلة الشمس ($M=M_{sun}=1.99 \text{ x } 10^{30}$ kg) وللأقمار الصناعية حول الأرض باعتبار M هى كتلة الأرض ($M=M_{earth}=5.975 \text{ x } 10^{27}$ kg).

وباعتبار أن ثابت الجذب العام $\gamma = 6.672 \times 10^{-11}$ فإن:

$$\text{(i)} \quad \text{للكواكب}: \lambda = \frac{4 \times (3.14)^2}{(6.6727 \times 10^{-11})(1.99 \times 10^{30})}$$
$$= 2.9710^{-19}\ \text{sec}^2/\text{m}^3$$

$$\text{(ii)} \quad \text{للأقمار الصناعية}: \lambda = \frac{4 \times (3.14)^2}{(6.6727 \times 10^{-11})(5.975 \times 10^{24})}$$
$$= 9.902 \times 10^{-14}\ \text{sec}^2/\text{m}^3$$

مثال (2):

إذا كانت كتلة كوكب المريخ $M=6.418 \times 10^{23}$ kg وكان القمر الصناعى فايكنج I الذى كان يدور حول الكوكب فى زمن دورى .1639min، أوجد نصف المحور الأكبر لمدار هذا القمر.

الحل:

$T = 1639 \text{ min} = 98340 \text{ sec.}$
$M = 6.418 \times 10^{23}\ \text{kg}, \ \gamma = 6.6726 \times 10^{-11}$

ومن قانون كبلر الثالث:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma M}$$

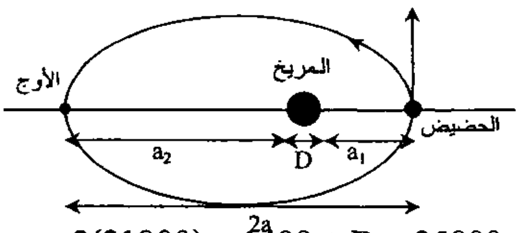
$$\therefore \quad a^3 = \frac{\gamma M T^2}{4\pi^2} = \frac{6.6726 \times 10^{-11})(6.418 \times 10^{23})(98340)^2}{4(3.14)^2}$$
$$\simeq 1.049 \times 10^{22}$$
$$\therefore \ a = \sqrt[3]{1.049 \times 10^{22}} \simeq 2.19 \times 10^7\ \text{m} = 21900\ \text{km}$$

وهو المطلوب.

مثال (3):

إذا كان القمر الصناعى فايكنج I على بعد 1499 km من سطح كوكب المريخ عند أقرب نقطة فى المسار وعلى بعد 35800 km عند أبعد نقطة فى المسار. أوجد بالتقريب قطر كوكب المريخ، حيث $a = 21900$ km

<u>الحل:</u>



من الرسم المبين نلاحظ أن:

$2a = a_1 + D + a_2$

حيث a_1 أقرب بعد (الحضيض)، a_2 أبعد نقطة (الأوج)، D قطر الكوكب.

$\therefore \; 2(21900) = 1499 + D + 35800$

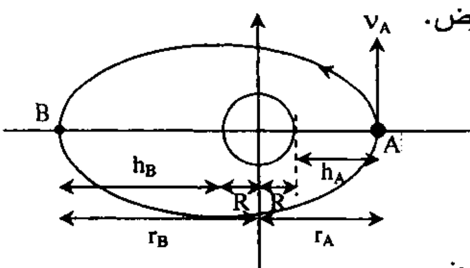
ومنهما $D = 6501$ km وهو قطر كوكب المريخ.

<u>مثال (4):</u>

من نقطة A على ارتفاع $h_A = 500$km من سطح الأرض أطلق قمر صناعى بسرعة $v_A = 36900$ km/h فى اتجاه عمودى على الخط الأفقى المار بمركز الأرض ليتخذ مدارا حول الأرض، فإذا كان نصف قطر الأرض $R = 6370$ km وعجلة الجاذبية على سطحها $g = 9.81\ m/sec^2$ فأوجد:

(i) الاختلاف المركزى e للمدار وعين نوعه.

(ii) أقصى ارتفاع h_B للقمر فوق سطح الأرض.



<u>الحل:</u>

إذا كان:

r_A هو أقرب بعد للقمر من مركز الأرض

h_A هو ارتفاع نقطة الانطلاق من سطح الأرض

R نصف قطر الأرض

فمن هندسة الشكل:

$r_A = R + h_A = 6370 + 500 = 6870$ km

<u>لإيجاد المعامل μ:</u>   عجلة الجاذبية:

$$g = 9.81\ m/sec^2 = \frac{9.81}{1000} \times (60 \times 60)^2$$
$$= 127138\ km/hr^2$$

[للتحويل من متر إلى كم تقسم على 1000 وللتحويل من ثانية إلى ساعة تقسم على 60 x 60]

$$\therefore\ \mu = gR^2 = 127138 \times (6370)^2 = 5.159 \times 10^{12}\ km^3/hr^2$$

<u>الاختلاف المركزي:</u>

$$e = \frac{r_A v_A^2}{\mu} - 1 = \frac{(6870)(369000)^2}{5.159 \times 10^{12}} - 1 = 0.813$$

وحيث أن $e = 0.813 < 1$ فمسار القمر الصناعى هو قطع ناقص، وهو المطلوب الأول.

أيضاً: فعند نقطتى الحضيض والأوج فإن:

$$r_A = a(1 - e) \qquad , \qquad r_B = a(1 + e)$$
$$\therefore \quad 6870 = a(1 - 0.813) \longrightarrow a = 36738\ km$$
$$r_B = 36738\ (1 + 0.813) = 66606\ km$$

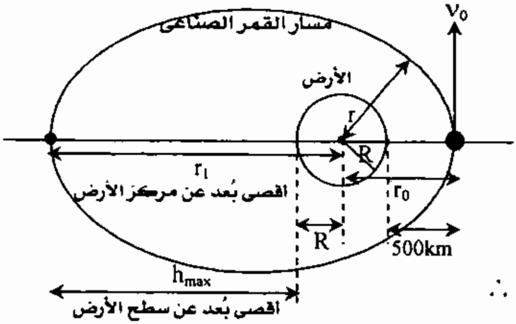
ولإيجاد أقصى ارتفاع للقمر الصناعى فوق سطح الأرض:

$$h_B = r_B - R = 66606 - 6370 = 60236\ km$$ (من الشكل)

<u>مثال (5):</u>

أطلق قمر صناعى موازيا لسطح الأرض بسرعة $1.025 \times 10^4 m/sec.$ من ارتفاع 500km عن سطح الأرض، أوجد أقصى بعد (أو ارتفاع) يصل إليه القمر الصناعى عن سطح الأرض، علما بأن نصف قطر الأرض هو $R = 6370\ km$.

<u>الحـ . ـل:</u>



معادلة مسار القمر (قطع ناقص):

$$r = \frac{\ell}{1 + e\cos\theta}$$

حيث: $e = \ell a \ , \ \ell = \dfrac{h^2}{\mu}$

$$\therefore \ \frac{1}{r} = \frac{1+e\cos\theta}{\ell} = \frac{1}{\ell} + \frac{e\cos\theta}{\ell}$$

$$= \frac{\mu}{h^2} + a\cos\theta \qquad (1)$$

ولكن: $h = r_o v_o$ حيث: $r_o = 6370 + 500 = 6870 \text{ km} = 6.87 \times 10^6 \text{ m}$

$v_o = 1.025 \times 10^4$ m/sec.

$\therefore \ h = 6.87 \times 10^6 \times 1.025 \times 10^4 = 7.04 \times 10^{10}$ m^2/sec. (2)

وإذا كانت قوة الجذب بين القمر والأرض هى: $F = \gamma \dfrac{mM}{r^2}$

حيث m كتلة القمر، M كتلة الأرض.

وأيضا فإن من قانون نيوتن الثانى:

$$F = mg = \frac{\gamma mM}{R^2} = \frac{\mu m}{R^2}$$

حيث:

$\mu = \gamma M = gR^2 = 9.81 \times (6.37 \times 10^6)^2 = 3.98 \times 10^{14}$ m^3/sec (3)

بالتعويض من (2)، (3) فى (1) نحصل على:

$$\frac{1}{r} = \frac{3.98 \times 10^{14}}{(7.04 \times 10^{10})^2} + a\cos\theta = 8.03 \times 10^{-8} + a\cos\theta \qquad (4)$$

<u>ولتعيين a (نصف المحور الأكبر لمسار القمر):</u>

عند $r = r_o$ فإن $\theta = o$ فبالتعويض فى (4) نحصل على:

$a = 6.53 \times 10^{-8}$ (5)

$$\therefore \qquad \frac{1}{r} = 8.03 \times 10^{-8} + 6.53 \times 10^{-8} \cos\theta \qquad (6)$$

أقصى بعد للقمر عن مركز الأرض r_1 يكون عندما $\theta=\pi$ فبـ التعويض في (6) نحصل على:

$r_1 = 66670 \text{ km} = R + h_{max}$

وبالتالى يكون أقصى بعد (أو ارتفاع) للقمر عن سطح الأرض هو:

$h_{max} = r_1 - R = 66670 - 6370 = 60300 \text{ km}$

وهو المطلوب.

<u>مثال (٦):</u>

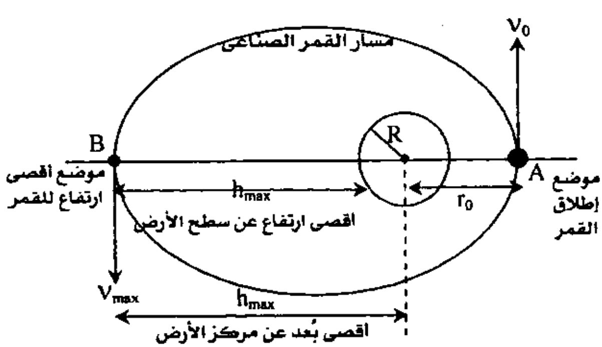
أطلق قمر صناعى فى اتجاه مواز لسطح الأرض بسرعة 303×10^2 km/hr عندما كان على ارتفاع 430 km فوق سطح الأرض فتحرك فى مسار على شكل قطع ناقص:

(أ) أوجد سرعته عندما يصل إلى أقصى ارتفاع له وهو 4050 km علما بأن نصف قطر الأرض $R = 6370$ km.

(ب) أوجد مركبتى سرعة القمر الصناعى v_θ، v_r عندما يكون على ارتفاع 1930 km فوق سطح الأرض.

(ج) تحقق من أن أقصى ارتفاع يصل إليه القمر الصناعى هو 4050 km.

<u>الحـل:</u>



عند موضع إطلاق القمر A: السرعة هى: $\vec{v}_o = \vec{v}_o\hat{\theta} = 303 \times 10^2\hat{\theta}$

عند موضع أقصى ارتفاع B: السرعة هى: $\vec{v}_{max} = v_{max}\hat{\theta}$

ولكن $r_o v_o = r_{max}\, v_{max}$ فإن:

بعد A عن مركز الأرض $= r_o = (430 + 6370)\text{ km} = 6800\text{ km}$

بعد B عن مركز الأرض $= r_{max} = (4050 + 6370)\text{ km} = 10420\text{ km}$

وتكون سرعة القمر عند أقصى ارتفاع هى:

$$v_{max} = \frac{r_o v_o}{r_{max}} = \frac{6800 \times 30300}{10420} = 19770\text{ km/h}$$

وهو المطلوب أولا:

<u>ثانيا:</u> عندما يكون القمر على ارتفاع 1930Km يكون بعده عن مركز الأرض هو:

$$r = 1930 + 6370 = 8300\text{ km}$$

بالتعويض فى العلاقة:

$$v_\theta = \frac{r_o v_o}{\gamma}$$

$$\therefore\ v_\theta = \frac{6800 \times 30300}{8300} = 24824\text{ kn/hr}$$

<u>ولإيجاد v_r:</u> نعوض فى العلاقة:

$$\therefore\ \left(\frac{v_r}{v_\theta}\right)^2 = \left(1 - \frac{r_o}{r}\right)\left[\left(1 + \frac{r_o}{r}\right) - \varepsilon\right]$$

حيث

$$1 - \frac{r_o}{r} = 1 - 0.82 = 0.18$$

$$1 + \frac{r_o}{r} = 1 + 0.82 = 1.82$$

$$\varepsilon = \frac{2\gamma M}{r_o v_o^2} = \frac{796 \times 10^{12}}{\left(6800 \times 10^3\right)\left(30300 \times \frac{5}{18}\right)^2} = 1.652$$

$$\therefore \left(\frac{v_r}{v_o}\right)^2 = (0.18)\,[1.820 - 1.652] = 0.0324$$

$$\therefore \frac{v_r}{v_o} = 0.17389 \qquad \therefore v_r = 5269.06 \text{ km/hr}$$

ثالثا: أقصى بعد للقمر عن مركز الأرض هو:

$$r_{max} = \frac{r_o}{\varepsilon - 1} = \frac{6800}{1652 - 1} = 10429.4 \text{ km} = h_{max} + R$$

ويكون أقصى ارتفاع عن سطح الأرض:

$$h_{max} = r_{max} - R = 10429.4 - 6370 = 4059 \text{ km}$$

وهو المطلوب.

مثال (7):

سفينة فضاء تدور حول الأرض بحيث كان أقل ارتفاع لها عن سطح الأرض هو 2000 km وأكبر ارتفاع لها عن سطح الأرض هو 4000 km، عين الاختلاف المركزى لمدار السفينة وحدد نوع المسار، وكذلك سرعة السفينة عند أبعد نقطة، أوجد كذلك مقدار سرعة السفينة عندما تكون على ارتفاع 2500 km من سطح الأرض.

[اعتبر عجلة الجاذبية على سطح الأرض 9.81 km/sec_2، نصف قطر الأرض R=6370 km].

الحل:

إذا كان: $h_A, \; h_B, \; h_c$ هى ارتفاعات سفينة الفضاء عند النقاط A (أقل ارتفاع)، B (أكبر ارتفاع)، C (الارتفاع 2500km) وكان $r_A, \; r_B$ هى أقرب وأبعد نقطة من سطح الأرض، r_c هى بعد السفينة من سطح الأرض عند الارتفاع h_c.

فمن الشكل نجد أن: (انظر الشكل فى الصفحة التالية)

$$r_A = R + h_A = 6370 + 2000 = 8370\text{km}$$
$$r_B = R + h_B = 6370 + 4000 = 10370\text{km}$$
$$r_C = R + h_C = 6370 + 2500 = 8870\text{km}$$

المعامل μ:

$$\mu = gR^2 = \frac{9.81}{1000}(6370)^2 = 398059 \text{ km/sec}^2$$

ومن خواص القطع:

$$2a = h_a + 2R + h_B$$
$$= 2000 + 2(6370) + 4000 = 18740$$
$$\therefore \quad a = 9370 \text{ km}$$

ومن علاقة نقطة الحضيض: $r_A = a(1-e)$

$$\therefore \quad 8370 = 9370\,(1-e)$$

ومنهما $\boxed{e=0.107}$ أى أن $e<1$ وبذلك يكون مسار السفينة على شكل قطع ناقص

ولإيجاد سرعة السفينة عند أقرب نقطة من سطح الأرض (نقطة A):

نستخدم العلاقة:

$$e = \frac{r_A v_A^2}{\mu} - 1$$

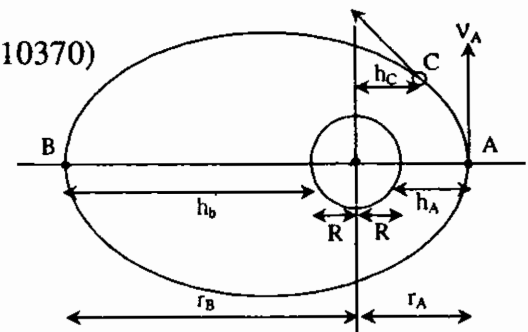
$$\therefore \quad 0.107 = \frac{8370 v_A^2}{398059} - 1 = 0.021\, v_A^2 - 1$$

ومنهما نجد أن $v_A^2 = 52.714 \rightarrow v_A = 7.26 \text{km/sec}$

ولإيجاد السرعة عند أبعد نقطة (B):

من قانون ثبوت عزم السرعة:

$$v_A r_A = v_B r_B = h$$
$$\therefore \quad 7.26 \times 8370 = v_B \times (10370)$$
$$\therefore \quad v_B = 5.859 \text{ km/sec.}$$



<u>ولإيجاد مقدار سرعة السفينة عند نقطة C التى تقع على ارتفاع h_c=2500 km من سطح الأرض:</u>

نستخدم قانون ثبوت الطاقة عند النقطتين C, A حيث:

$$k_A + u_A = k_c + u_c = \text{const.}$$

حيث u, K هما طاقتى الحركة والجهد عند النقطتين المذكورتين:

$$\therefore \quad \frac{1}{2}mv_A^2 + \left(-\frac{\mu m}{r_A}\right) = \frac{1}{2}mv_c^2 + \left(\frac{\mu m}{r_c}\right)$$

حيث m كتلة السفينة، v_c، v_A سرعتيهما عند A, C

$$\therefore \quad \frac{1}{2}v_A^2 - \frac{\mu}{r_A} = \frac{1}{2}v_c^2 - \frac{\mu}{r_c}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}(7.26)^2 - \frac{398059}{8370} = \frac{1}{2}v_c^2 - \frac{398059}{8870}$$

ومنا نجد أن $v_c = 6.875$ km/sec.

وهو المطلوب.

مسائل على حركة الأقمار الصناعية وسفن الفضاء

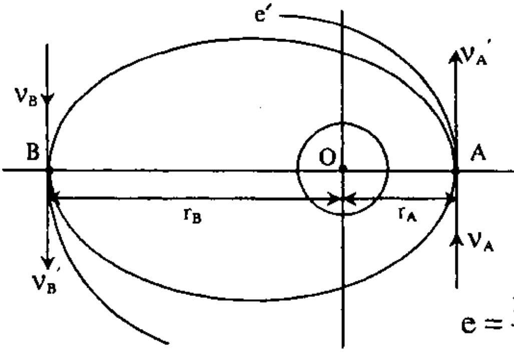
1. إذا كان طول نصف المحور الأكبر لمسار قمر صناعى على شكل قطع ناقص حول الأرض هو 4850 miles وكان نصف قطر الأرض R=4680 miles فأوجد السرعة التى يتحرك بها هذا القمر فى مساره، وأثبت أن الزمن الدورى لحركته هو 333 دقيقة تقريبا.
2. بدأت مركبة فضاء الحركة وهى على ارتفاع 2400 km من سطح الأرض، وكانت سرعتها 8100 m/sec ، أوجد أقصى ارتفاع للمركبة عن سطح الأرض (اعتبر أن R=6370 km، $g=9.81\ m/sec^2$).
3. أطلق قمر صناعى من ارتفاع 430 km فوق سطح الأرض بسرعة 36000m/sec.، أوجد أقصى ارتفاع يصل إليه القمر وسرعته عندئذ، أوجد كذلك مركبتا سرعة القمر القطرية والعرضية عندما يكون القمر على ارتفاع 7230km فوق سطح الأرض.
4. سفينة فضاء تدور حول الأرض فى مسار دائرى نصف قطره 8000 km عند مرورها بنقطة ما أطلقت صواريخ دفع فزادت سرعتها فجأة بمقدار 10% من قيمتها الأصلية، أثبت أن المسار الجديد نتيجة تغير السرعة هو قطع ناقص وأوجد المعادلة القطبية له (أعتبر نصف قطر الأرض R=6370 km).
5. سفينة فضاء تدور حول الأرض فى قطع ناقص اختلافه المركزى =e، عند مرور السفينة بأقرب موضع من الأرض أثر عليها دفع مماس فزادت سرعتها فجأة إلى الضعف. عين نوع المسار الجديد واختلافه المركزى، وإذا أثر الدفع المماس عند مرور السفينة بأبعد موضع عن الأرض وضاعف سرعتها كذلك فعين نوع المسار الجديد.
6. سفينة فضاء تسير نحو القمر فى مسار على شكل قطع مكافئ وعندما وصلت إلى أقرب نقطة A من القمر وكانت على بعد 1760 km من مركزه أطلقت

صاروخا مضادا فانخفضت سرعتها بمقدار 20% فتغير شكل مسارها، أوجد معادلة المسار الجديد وعين نوعه وكذلك زمن وصول السفينة إلى نقطة A مرة أخرى. وعندما عادت السفينة إلى نقطة A خفضت سرعتها فجأة إلى الحد الذى جعلها تدور فى مسار على شكل دائرة، عين سرعة السفينة فى هذا المسار الدائرى (علما بأن نصف قطر القمر 1738 km وأن عجلة الجاذبية على سطح القمر= $\frac{1}{6}$ عجلة الجاذبية على سطح الأرض).

7. قذف قمر صناعى كتلته m رأسيا إلى أعلى ابتداء من نقطة A على سطح الأرض بسرعة V_A تكفى لوصوله إلى نقطة B التى تقع على ارتفاع h فوق سطح الأرض، ثم قذف القمر بعد ذلك من نقطة B بسرعة أفقية v_B تكفى لتحركه فى مسار دائرى حول الأرض. فإذا كان نصف قطر الأرض R وكانت عجلة الجاذبية عند سطحها g فاحسب كل من v_A، v_B وأثبت أن الطاقة الكلية اللازمة لإطلاق القمر من نقطة A حتى يكمل مساره الدائرى (الذى بدأه من نقطة B) تعطى بالعلاقة:

$$E=\frac{1}{2}mgR\left[1+\frac{h}{R+h}\right]=\frac{1}{2}mgR\left[2-\frac{R}{R+h}\right]$$

حلول بعض المسائل على حركة الأقمار الصناعية وسفن الفضاء



حل المسألة (٥):

دراسة الحركة عند A:

قبل الدفع مباشرة:

السرعة ν_A تعطى من معادلة الاختلاف المركزى

$$e = \frac{r_A \nu_A^2}{\mu} - 1 = \frac{1}{2}$$

ومنها:

$$\nu_A = \sqrt{\frac{3\mu}{2r_A}}$$

السرعة عند A بعد الدفع مباشرة:

$$\nu'_A = 2\nu_A = 2\sqrt{\frac{3\mu}{2r_A}}$$

ومن معادلة الاختلاف المركزى نوجد الاختلاف المركزى للمسار الجديد من نقطة A بعد الدفع مباشرة (e'):

$$e' = \frac{r_A \nu_A'^2}{\mu} - 1 = \frac{r_A}{\mu}\left[2\sqrt{\frac{3\mu}{2r_A}}\right]^2 - 1$$

$$= 4\frac{r_A}{\mu}\left(\frac{3\mu}{2r_A}\right) - 1 = 6 - 1 = 5 > 1$$

وهذا يعنى أن المسار الجديد عبارة عن قطع زائد بؤرته O (مركز الأرض).

دراسة الحركة عند B:

قبل الدفع مباشرة:

من قانون ثبوت عزم السرعة حول O:

$$\nu_A r_A = \nu_B r_B = h$$

$$\therefore \quad \nu_A\, \alpha(1-e) = \nu_B\, \alpha(1+e)$$

$$\therefore \quad \nu_B = \frac{1}{3}\nu_A = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3\mu}{2r_A}}$$

<u>السرعة عند B بعد الدفع مباشرة:</u>

$$\nu`_B = 2\nu_B = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3\mu}{2r_A}}$$

ومن معادلة الاختلاف المركزى نوجد الاختلاف المركزى للمسار الجديد من نقطة B بعد الدفع مباشرة (e''):

$$e`` = \frac{r_B \nu_B}{\mu} - 1 = \frac{3r_A}{\mu}\left[\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3\mu}{2r_A}}\right]^2 - 1$$

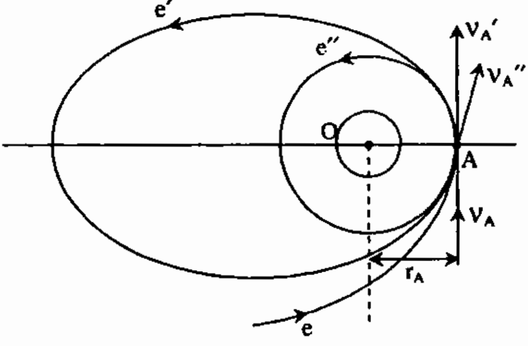
$$= \frac{3r_A}{\mu}\left[\frac{4}{9}\left(\frac{3\mu}{2r_A}\right)\right] - 1 = 2 - 1 = 1$$

وهذا يعنى أن المسار الجديد عبارة عن قطع مكافئ بؤرته O (مركز الأرض).

وهو المطلوب.

<u>حل المسألة (٦):</u>

أولاً: <u>السفينة تسير نحو القمر فى قطع مكافئ:</u>



معادلة الاختلاف المركزى تعطى السرعة عند النقطة A(ν_A):

$$e = \frac{r_A \nu_A^2}{\mu} - 1 = 1$$

$$\therefore \quad \nu_A = \sqrt{\frac{2\mu}{r_A}}$$

عند وصول السفينة إلى نقطة A وأطلقت الصاروخ المضاد انخفضت سرعتها بمقدار 20% أى أن سرعة السفينة بعد التخفيض هى:

$$v'_A = 0.8 v_A = 0.8\sqrt{\frac{2\mu}{r_A}}$$

والاختلاف المركزى e′ للمسار الجديد يعطى من العلاقة:

$$e' = \frac{r_A v'^2_A}{\mu} - 1 = \frac{r_A}{\mu}\left[0.8\sqrt{\frac{2\mu}{r_A}}\right]^2 - 1 = 0.28 < 1$$

أى أن المسار الجديد هو قطع ناقص، ولإيجاد معادلته:

$$r = \frac{\ell'}{1 + e'\cos\theta} = \frac{\ell'}{1 + 0.28\cos\theta}$$

حيث ℓ' نصف الوتر البؤرى العمودى ويعطى من العلاقة:

$$\ell' = a_{r_A}(1 + e) = 1760(1 + 0.28) = 2252.8 \text{ km}$$

$$\therefore \quad \boxed{r = \frac{2252.8}{1 + 0.28\cos\theta}}$$

<u>ثانياً</u>: لإيجاد الزمن اللازم لوصول السفينة مرة أخرى إلى نقطة A وهو عبارة عن الزمن الدورى T فمن قانون كبلر الثالث نجد أن:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} a^3 \qquad (1)$$

حيث:

$$1760 = a(1 - 0.28) \longleftarrow r_A = a(1 - e)$$

ومنها نحصل على: $a = 2444.44$ km

أيضاً: فإن : $\mu = gR^2$

حيث g عجلة جاذبية القمر $g = (1/6)(9.81)\text{m/sec}^2$

R نصف قطر القمر $R = 1738$ km

$$\therefore \quad \mu = \frac{1}{6} \times \frac{9.81}{1000}(1738)^2 = 4938.75 \text{ km}^3/\text{sec}^2$$

فبالتعويض فى (1) نحصل على:

$$T^2 = \frac{4(3.14)^2(2444.44)^3}{4938.75}$$

ومنها نجد أن:

$$T = 10805.389 \text{ sec.}$$
$$= 3.001 \text{ hr (ساعة)}$$

<u>ثالثاً:</u> عند عودة السفينة مرة أخرى إلى نقطة A خفضت سرعتها فجأة بحيث سارت فى مسار دائرى، ولإيجاد سرعة السفينة عند A فى المسار الدائرى الجديد (v''_A) نستخدم معادلة الاختلاف المركزى حيث:

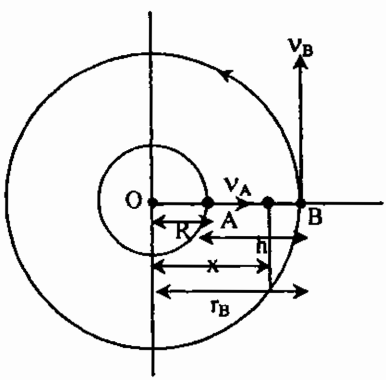
(المسار دائرى)
$$e'' = \frac{r_A v''^2_A}{\mu} - 1 = o$$

$$\therefore \quad v''_A = \sqrt{\frac{\mu}{r_A}} = \sqrt{\frac{4938.75}{1760}} = 1.675 \text{km/sec}$$

وهو المطلوب.

<u>حل المسألة (7):</u>

قذف القمر الصناعى من نقطة A على سطح الأرض بسرعة v_A تكفى لوصوله إلى نقطة B على ارتفاع h فوق سطح الأرض.



<u>دراسة الحركة من A إلى B:</u>

يتحرك القمر فى خط مستقيم تحت تأثير قوة جذب مركزى

$$F = m\ddot{x} = mg\frac{R^2}{x^2}$$

حيث X هى بعد القمر عند أى لحظة من مركز الأرض o.

$$\therefore \quad \ddot{x} = g\frac{R^2}{x^2} \rightarrow v\frac{dv}{dx} = g\frac{R^2}{x^2}$$

بفصل المتغيرات والتكامل نحصل على:

$$\int_{0}^{v_A} v\,dv = R^2 \int_{R}^{R+h} \frac{dx}{x^2}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}v_A^2 = gR^2\left[-\frac{1}{x}\right]_R^{R+h} = gR^2\left[-\frac{1}{R+h}+\frac{1}{R}\right]$$

$$= gR^2\left[\frac{h}{R(R+h)}\right]$$

$$\therefore \quad v_A^2 = \frac{2gRh}{R+h} \rightarrow v_A = \sqrt{\frac{2gRh}{R+h}} \qquad (1)$$

<u>ثانياً</u>: من نقطة B يتحرك القمر فى مسار دائرى، فمن معادلة الاختلاف المركزى نوجد السرعة v_B للقمر حيث:

(للمسار دائرى) $$e = \frac{r_B v_B^2}{\mu} - 1 = 0$$

$$\therefore \quad v_B^2 = \frac{\mu}{r_B} = \frac{gR^2}{R+h} \rightarrow v_B = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}} \qquad (2)$$

ولإيجاد الطاقة الكلية اللازمة لإطلاق القمر من نقطة A على سطح الأرض:

$$E = E_A + E_B = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{2gRh}{R+h}\right) + \frac{1}{2}m\left(\frac{gR^2}{R+h}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{mgh}{R+h}(2h+R) = \frac{1}{2}mgh\left[\frac{R+h+h}{R+h}\right]$$

$$= \frac{1}{2}mgR\left[1+\frac{h}{R+h}\right]$$

ويمكن كتابة هذه العلاقة بالصورة الآتية:

$$E=\frac{1}{2}mgR\left[2-\frac{h}{R+h}\right]$$

وذلك حيث أن:

$$\left(2-\frac{R}{R+h}\right)=\frac{2R+2h+R}{R+h}=\frac{R+2h}{R+h}$$

$$=\frac{R+h+h}{R+h}=1+\frac{h}{R+h}$$

وهو المطلوب.