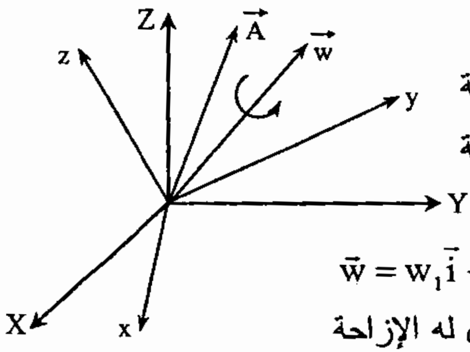
الباب الرابع

الحركة بالنسبة للمحاور الدوارة (أو المتحركة)

Motion relative to moving (Rotating) axes

أولاً: إيجاد معدل التغير الزمنى لمتجه بالنسبة لمجموعة المحاور المتحركة:

نفرض XYZ مجموعة محاور ثابتة فى الفراغ نقطة أصلها O. ونفرض xyz مجموعة محاور متحركة نقطة أصلها O منطبقة على O. ولتكن $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ متجهات الوحدة الأساسية فى اتجاه المحاور الثابتة. وأن $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ متجهات الوحدة الأساسية فى اتجاه المحاور المتحركة.



ولتكن $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ هى السرعة الزاوية للمجموعة المتحركة بالنسبة للمجموعة الثابتة حيث:

$$\vec{w} = w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k}$$

نفرض أن $\vec{A}$ متجه يتغير مع الزمن (ومثال له الإزاحة والسرعة الخطية والزاوية ... إلخ) وأن مركباته بالنسبة للمحاور المتحركة هى A_1, A_2, A_3 حيث:

$$\vec{A} = \vec{A}_M = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k} \qquad (1)$$

وليكن معدل التغير الزمنى للمتجه $\vec{A}$ بالنسبة للمحاور المتحركة $= \frac{d\vec{A}_M}{dt}$

وبالنسبة للمحاور الثابتة $= \frac{d\vec{A}_F}{dt}$ ، العلاقة بين هذين المعدلين هى:

$$\frac{d\vec{A}_F}{dt} = \frac{d\vec{A}_M}{dt} + \overline{w} \wedge \vec{A}_M \qquad (2)$$

أى أن معدل التغير الزمنى للمتجه $\vec{A}$ (الموجود فى مجموعة المحاور المتحركة والذى يدور معها بالسرعة الزاوية $\overline{w}$) بالنسبة لمحاور ثابتة يساوى معدل التغير

الزمنى للمتجه بالنسبة للمحاور المتحركة مضافا إليه الحد $(\vec{w} \wedge \vec{A}_M)$ الذى يمثل معدل التغير الناتج عن دوران المجموعة المتحركة.

أيضاً: من (1) بالتفاضل بالنسبة للزمن نحصل على:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA_1}{dt}\vec{i} + \frac{dA_2}{dt}\vec{j} + \frac{dA_3}{dt}\vec{k}$$

$$\therefore \quad \dot{\vec{A}} = \dot{\vec{A}}_M = \dot{A}_1\vec{i} + \dot{A}_2\vec{j} + \dot{A}_3\vec{k} \qquad (3)$$

وبكتابة:

$$\frac{d\vec{A}_M}{dt} = D_M\vec{A}_M \quad , \quad \frac{d\vec{A}_F}{dt} = D_F\vec{A}$$

فتصبح (2) بالصورة الآتية:

$$D_F\vec{A} = D_M\vec{A} + \vec{w} \wedge \vec{A} = (D_M + \vec{w}\wedge)\vec{A} \qquad (4)$$

ومنها نحصل على العلاقة بين المؤثر $\vec{D}_F$ والمؤثر $\vec{D}_M$ بالصورة:

$$\vec{D}_F = \vec{D}_M + \vec{w} \wedge \vec{A}$$

ويمكن بذلك كتابة (4) بالصورة:

$$\dot{\vec{A}}_F = \dot{\vec{A}}_M + (\vec{w} \wedge \vec{A}) \qquad (5)$$

<u>إيجاد المشتقة الزمنية الثانية فى مجموعتى المحاور الثابتة والمتحركة:</u>

بكتابة:

$$\frac{d^2\vec{A}_M}{dt^2} = D_M^2\vec{A} \quad , \quad \frac{d^2\vec{A}_F}{dt^2} = D_F^2\vec{A}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad D_F^2\vec{A} &= D_F(D_F\vec{A}) = (D_M + \vec{w}\wedge)(D_M + \vec{w}\wedge)\vec{A} \\
&= (D_M + \vec{w}\wedge)(D_M\vec{A} + \vec{w} \wedge \vec{A}) \\
&= D_M(D_M\vec{A} + \vec{w} \wedge \vec{A}) + \vec{w} \wedge (D_M\vec{A} + \vec{w} \wedge \vec{A}) \\
&= D_M^2\vec{A} + D_M(\vec{w} \wedge \vec{A}) + \vec{w} \wedge (D_M\vec{A}) + \vec{w} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{A}) \quad (6)
\end{aligned}$$

وحيث أن:

$$D_M(\vec{w}\wedge\vec{A})=\vec{w}\wedge(D_M\vec{A})+(D_M\vec{w})\wedge\vec{A}$$

[من المتجهات حيث أن: $D(\overline{A}\wedge\overline{B})=\overline{A}\wedge(D\overline{B})+(D\overline{A})\wedge\overline{B}$]

فبالتعويض فى (6) نحصل على:

$$\therefore\ D_F^2\overline{A}=D_M^2\overline{A}+D_M(\overline{w}\wedge\overline{A})+\overline{w}\wedge(\overline{w}\wedge\overline{A})+2\overline{w}\wedge(D_M\overline{A})$$

$$\therefore\ \ddot{\vec{A}}_F=\ddot{\vec{A}}_M+\dot{\vec{w}}\wedge\vec{A}+\vec{w}\wedge(\vec{w}\wedge\vec{A})+2\vec{w}\wedge\dot{\vec{A}}_M \qquad (7)$$

حيث:

$$\dot{\vec{A}}_M=D_M\vec{A},\quad \dot{\vec{w}}=D_M\vec{w},\quad \ddot{\vec{A}}_M=D_M^2\vec{A},\quad \ddot{\vec{A}}_F=D_F^2\vec{A}$$

وأن: $\overline{w}\wedge(\overline{w}\wedge\overline{A})=(\overline{w}.\overline{A})\overline{w}-(\overline{w}.\overline{w})\vec{A}$ (من المتجهمات)

<u>مثال:</u>

إذا كانت مجموعة المحاور (xyz) تتحرك بسرعة زاوية $\overline{w}=2\overline{i}-3\overline{j}+5\overline{k}$ بالنسبة لمجموعة المحاور الثابتة (XYZ) التى لها نفس نقطة الأصل، وكان المتجه $\vec{A}$ فى المجموعة (xyz) له الصورة:

$\vec{A}=\sin t\,\overline{i}-\cos t\,\overline{j}+e^{-t}\overline{k}$ فأوجد $\dot{\vec{A}}_M,\dot{\vec{A}}_F,\ddot{\vec{A}}_M,\ddot{\vec{A}}_F$

<u>الحل:</u>

حيث أن:

$$\vec{A}=\sin t\,\overline{i}-\cos t\,\overline{j}+e^{-t}\overline{k}$$

(1) $$\dot{\vec{A}}_M=D_M\vec{A}=\frac{d}{dt}(\sin t)\overline{i}-\frac{d}{dt}(\cos t)\overline{j}+\frac{d}{dt}(e^{-t})\overline{k}$$

$$=\cos t\,\overline{i}+\sin t\,\overline{j}-e^{-t}\,\overline{k} \qquad (1)$$

(2) $$\dot{\vec{A}}_F=D_F\vec{A}=D_M\vec{A}+\vec{w}\wedge\overline{A}$$

$$=(\cos t\,\overline{i}+\sin t\,\overline{j}-e^{-t}\overline{k})+\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 2 & -3 & 5\\ \sin t & -\cos t & e^{-t}\end{vmatrix}$$

$$= (\cos t\,\bar{i} + \sin t\,\bar{j} - e^{-t}) + (-3e^{-t} + 5\cos t)\,\bar{i} - (2e^{-t} + 5\sin t)\,\bar{j}$$

$$+ (-2\cos t + 3\sin t)\vec{k}$$

$$= (6\cos t - 3e^{-t})\bar{i} + (6\sin t - 2e^{-t})\,\bar{j}$$

$$+ (3\sin t - 2\cos t - e^{-t})\vec{k} \qquad (2)$$

(3) $\ddot{\vec{A}}_M = D_M^2\vec{A} = D_M(\cos t\,\bar{i} + \sin t\,\bar{j} - e^{-t}\bar{k})$

$$= -\sin t\,\bar{i} + \cos t\,\bar{j} + e^{-t}\bar{k} \qquad (3)$$

(4) $\ddot{\vec{A}}_F = \ddot{\vec{A}}_M + \dot{\bar{w}} \wedge \bar{A} + \bar{w} \wedge (\bar{w} \wedge \bar{A}) + 2\bar{w} \wedge \dot{\vec{A}}_M$

$$= (-\sin t\,\bar{i} + \cos t\,\bar{j} + e^{-t}\bar{k}) + \vec{O}$$

$$= \ddot{\vec{A}}_M + \dot{\bar{w}} \wedge \bar{A} + (\bar{w}.\bar{A})\bar{w} - (\bar{w}.\bar{w})\bar{A} + 2\bar{w} \wedge \dot{\vec{A}}_M$$

$$+ (2\sin t + 3\cos t + 5e^{-t})(2\bar{i} - 3\bar{j} + 5\bar{k})$$

$$- (4 + 0 + 25)(\sin t\,\bar{i} + \cos t\,\bar{j} + e^{-t}\bar{k}) \quad \left| \begin{array}{l} \bar{w} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + 5\bar{k} \\ \dot{\bar{w}} = \vec{O} \\ \bar{w}.\bar{w} = 4 + 9 + 25 \end{array} \right.$$

$$+ 2\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -3 & 5 \\ \cos t & \sin t & e^{-t} \end{vmatrix}$$

$$= (6\cos t - 45\sin t + 16e^{-t})\bar{i} + (40\cos t - 6\sin t - 11e^{-t})\bar{j}$$

$$+ (21\cos t + 14\sin t - 12e^{-t})\vec{k} \qquad (4)$$

ثانياً: إيجاد سرعة وعجلة جسيم فى مجموعة المحاور المتحركة:

نفرض أن متجه الموضع للجسيم بالنسبة لمجموعة المحاور المتحركة (xyz) هو $\vec{r}$ وأن مجموعة المحاور (xyz) تتحرك بسرعة زاوية $\vec{w}$ بالنسبة للمجموعة الثابتة (أو الأساسية)، فباستخدام نتائج الفقرة السابقة واعتبار أن $\vec{r} = \vec{A}$ نحصل على المسميات الآتية:

1. السرعة النسبية (أو الظاهرية) للجسيم هى: $D_M\vec{r} = \dot{\vec{r}}_M = \vec{v}_M$
2. السرعة المطلقة (أو الحقيقية) للجسيم هى: $D_F\vec{r} = \dot{\vec{r}}_F = \vec{v}_F$
3. العجلة النسبية (أو الظاهرية) للجسيم هى: $D_M^2\vec{r} = \ddot{\vec{r}}_M = \vec{\alpha}_M$
4. العجلة المطلقة (أو الحقيقية) للجسيم هى: $D_F^2\vec{r} = \ddot{\vec{r}}_F = \vec{\alpha}_F$
5. العجلة المركزية (أو عجلة الجذب المركزى) هى: $\vec{w} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{r}) = \vec{\alpha}_n$
6. العجلة لخطية (أو المستعرضة) هى: $\dot{\vec{w}} \wedge \vec{r} = \vec{\alpha}_t$
7. عجلة كوريوليس (Coriolis) هى: $2(\vec{w} \wedge \dot{\vec{r}}) = \vec{\alpha}_C$

ومن العلاقات (2), (5), (7) فى الفقرة السابقة يمكننا كتابة:

$$\vec{v}_F = \vec{v}_M + \vec{w} \wedge \vec{r} = \dot{\vec{r}}_M + \vec{w} \wedge \vec{r}$$
$$\vec{\alpha}_F = \vec{\alpha}_M + \dot{\vec{w}} \wedge \vec{r} + \vec{w} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{r}) + 2\vec{w} \wedge \dot{\vec{r}}$$
$$\vec{\alpha}_n = \vec{w} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{r}) = (\vec{w}.\vec{r})\vec{w} - (\vec{w}.\vec{w})\vec{r}$$
$$\vec{\alpha}_t = \dot{\vec{w}} \wedge \vec{r}$$
$$\vec{\alpha}_C = 2(\vec{w} \wedge \dot{\vec{r}}) = 2(\vec{w} \wedge \vec{v}_M)$$
$$\vec{\alpha}_F = \vec{\alpha}_M + \vec{w} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{r}) + 2\vec{w} \wedge \dot{\vec{r}}$$

<u>ملحوظة:</u>

إذا كانت السرعة الزاوية w ثابتة فإن $\dot{\vec{w}} = 0$ وعليه تكون العجلة المستعرضة (أو الخطية) $\vec{\alpha}_t = 0$ كما أن العجلة المطلقة للجسيم تصبح:

$$\vec{\alpha}_F = \vec{\alpha}_M + \vec{w} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{r}) + 2\vec{w} \wedge \dot{\vec{r}}$$

طريقة أخرى لإيجاد الصورة العامة للعجلة فى مجموعة المحاور الدوارة:

نستخدم القاعدة الآتية لمعدل التغير الزمنى لأى متجه دوار $\vec{B}$ (أى متجه يدور حول محور)

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \overline{w} \wedge \vec{B}$$

فإذا كانت المحاور (x, y, z) هى محاور دوارة أى أن متجهات الوحدة فى اتجاهها هى متجهات دوارة فإن معدل التغير الزمنى لها يكون:

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \overline{w} \wedge \vec{i}, \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \overline{w} \wedge \vec{j}, \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \overline{w} \wedge \vec{k}$$

فإذا كان متجه الموضع فى المحاور الدوارة هو $\vec{r}$ حيث:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

فبالتفاضل بالنسبة للزمن نحصل على:

$$\therefore \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = x\frac{d\vec{i}}{dt} + \vec{i}\dot{x} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + \vec{j}\dot{y} + z\frac{d\vec{k}}{dt} + \vec{k}\dot{z}$$
$$= (\vec{i}\dot{x} + \vec{j}\dot{y} + \vec{k}\dot{z}) + x(\overline{w} \wedge \vec{i}) + y(\overline{w} \wedge \vec{j}) + z(\overline{w} \wedge \vec{k})$$
$$= \dot{\vec{r}} + \overline{w} \wedge (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \dot{\vec{r}} + \overline{w} \wedge \vec{r}$$

إذا فإن تفاضل أى متجه دوار $\vec{r}$ يكون:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} + \overline{w} \wedge \vec{r}$$

فبأخذ $\vec{Q} = \dot{\vec{r}} + \overline{w} \wedge \vec{r}$ (متجه دوار) فإن تفاضل $\vec{Q}$ يكون:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \dot{\vec{Q}} + \overline{w} \wedge \vec{Q}$$
$$= (\ddot{\vec{r}} + \overline{w} \wedge \dot{\vec{r}} + \dot{\overline{w}} \wedge \vec{r}) + \overline{w}_A(\dot{\vec{r}} + \overline{w} \wedge \vec{r})$$
$$= \ddot{\vec{r}} + \overline{w} \wedge \dot{\vec{r}} + \dot{\overline{w}} \wedge \vec{r} + \overline{w} \wedge \dot{\vec{r}} + \overline{w} \wedge (\overline{w} \wedge \vec{r})$$
$$= \ddot{\vec{r}} + \dot{\overline{w}} \wedge \vec{r} + \overline{w} \wedge (\overline{w} \wedge \vec{r}) + 2(\overline{w} \wedge \dot{\vec{r}})$$

وهى نفس العلاقة التى حصلنا عليها سابقا وتكتب بالصورة:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\ddot{\vec{r}}+\dot{\vec{w}}\wedge\vec{r}+\vec{w}\wedge(\vec{w}\wedge\vec{r})+2(\vec{w}\wedge\dot{\vec{r}})$$

حيث: $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ هى العجلة فى المحاور الثابتة، $\ddot{\vec{r}}$ العجلة فى المحاور المتحركة، $\dot{\vec{w}}\wedge\vec{r}$ العجلة المستعرضة، $\vec{w}\wedge(\vec{w}\wedge\vec{r})$ العجلة المركزية، $2(\vec{w}\wedge\dot{\vec{r}})$ عجلة كوريوليس.

القوى القصورية (أو الزائفة) Inertial (or False) force

حيث أن معادلة حركة جسيم فى المحاور الثابتة (الأساسية) هى:

$$\vec{F}=m\vec{a}_F=m\frac{d^2\vec{r}_F}{dt^2}$$

حيث $\vec{r}_F$ هو متجه موضع الجسيم بالنسبة للمحاور الثابتة، $\vec{F}$ محصلة القوى الحقيقة (أو المطلقة) المؤثرة على الجسيم (فى المحاور الثابتة).

فبالتعويض عن $\vec{a}_F$ بقيمتها نحصل على العلاقة:

$$\vec{F}=m\ddot{\vec{r}}+m(\dot{\vec{w}}\wedge\vec{r})+m\vec{w}(\vec{w}\wedge\vec{r})+2m(\vec{w}\wedge\dot{\vec{r}}) \qquad (1)$$

وهنا $\vec{F}_M=m\vec{a}_M=m\ddot{\vec{r}}$ تمثل القوة الظاهرية (أو النسبية) المؤثرة على الجسيم (فى المحاور المتحركة)، أما $\vec{F}_t=m\vec{a}_t=m(\dot{\vec{w}}\wedge\vec{r})$ فتمثل القوة المستعرضة، وتمثل: $\vec{F}_n=m\vec{a}_n=m\vec{w}\wedge(\vec{w}\wedge\vec{r})$ القوة المركزية، أما $\vec{F}_C=m\vec{a}_C=2m(\vec{w}\wedge\dot{\vec{r}})$ فتمثل قوة كوريوليس (Coriolis force). وبذلك يمكن كتابة (1) بالصورة:

$$\vec{F}=\vec{F}_M+\vec{F}_t+\vec{F}_n+\vec{F}_C \qquad (2)$$

وتعرف القوى $\vec{F}_t,\vec{F}_n,\vec{F}_C$ بالقوى الزائفة (أو القصورية) لأنها قوى غير حقيقية (لا وجود لها عمليا)، وتظهر بسبب حركة المحاور الدوارة بالنسبة للمحاور الأساسية.

وتظهر تلك القوى الزائفة فقط عند اختيارنا لمحاور معجله لوصف حركة الجسيم.

أمثلة محلولة

مثال (1):

إذا كان متجه موضع جسيم بالنسبة لمجموعة محاور متحركة هو: $\vec{r} = (t^2+1)\vec{i} - 6t\vec{j} + 4t^3\vec{k}$ ، وكنت مجموعة المحاور تتحرك بسرعة زاوية $\vec{w}$ بالنسبة لمجموعة المحاور الساكنة حيث: $\vec{w} = 2t\vec{i} - t^2\vec{j} + (2t+4)\vec{k}$

المطلوب: إيجاد:

1. السرعة النسبية والسرعة المطلقة للجسيم عند الزمن t=1.
2. العجلة النسبية والعجلة المطلقة للجسيم عند الزمن t=1.
3. كل من العجلة المركزية والمستعرضة وعجلة كوريوليس عند الزمن t=1 .

الحل:

أولاً: **السرعة النسبية والسرعة المطلقة:**

$$(1) \quad \vec{v}_M = \dot{\vec{r}}_M = D_M\vec{r} = D_M[(t^2+1)\vec{i} - 6t\vec{j} + 4t\vec{k}]$$
$$= 2t\vec{i} - 6\vec{j} + 12t^2\vec{k} \qquad (1)$$

وعند t=1 تكون السرعة النسبية:

$$\vec{v}_M = 2\vec{i} - 6\vec{j} + 12\vec{k}$$

$$(2) \; \vec{v}_F = D_F\vec{r} = D_M\vec{r} + \overline{w} \wedge \vec{r} = \dot{\vec{r}}_M + \overline{w} \wedge \vec{r}$$

$$= (2t\bar{i} - 6\bar{j} + 12t^2\bar{k}) + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2t & -t^2 & 2t+4 \\ t^2+1 & -6t & 4t^3 \end{vmatrix}$$

وعند t=1 تكون السرعة المطلقة:

$$\vec{v}_F=(2\bar{i}-6\bar{j}+12\bar{k})+\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -1 & 6\\ 2 & -6 & 4\end{vmatrix}$$

$$=(2\bar{i}-6\bar{j}+12\bar{k})+(32\bar{i}+4\bar{j}-10\bar{k})=34\bar{i}-2\bar{j}+2\bar{k} \qquad (2)$$

ثانياً: العجلة النسبية والعجلة المطلقة:

العجلة النسبية:

$$\vec{\alpha}_M=D_M^2F=D_M(\dot{\vec{r}}_M)=D_M(\vec{v}_M)$$
$$=2\vec{i}-(O)+24t\vec{k}=2\vec{i}+24t\vec{k}] \qquad (3)$$

وعند t=1 تكون العجلة النسبية:

$$\vec{\alpha}_M=2\vec{i}+24\ \vec{k}$$

العجلة المطلقة:

$$\vec{\alpha}_F=D_M^2\vec{r}=\ddot{\vec{r}}_F=\vec{\alpha}_M+(\dot{\vec{w}}\wedge\vec{r})+\vec{w}\wedge(\vec{w}\wedge\vec{r})+2\vec{w}\wedge\dot{\vec{r}}$$

وعند t = 1 تكون العجلة المطلقة:

$$\vec{\alpha}_F=(2\vec{i}+24\vec{k})+(2\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k})\wedge(2\vec{i}-6\vec{j}+4\vec{k})$$
$$+(2\vec{i}-\vec{j}+6\vec{k})\wedge[(2\vec{i}-\vec{j}+6\vec{k})\wedge(2\vec{i}-6\vec{j}+4\vec{k})]$$
$$+2(2\vec{i}-\vec{j}+6\vec{k})\wedge(2\vec{i}-6\vec{j}+16\vec{k})$$
$$=(2\vec{i}+24\vec{k})+(4\vec{i}-4\vec{j}-8\vec{k})+(-14\vec{i}+212\vec{j}+40\vec{k})$$
$$+(48\vec{i}-24\vec{j}-20\vec{k})=(40\vec{i}+184\vec{j}+36\vec{k})$$

ثالثا: العجلة المركزية والمستعرضة وعجلة كوريوليس:

العجلة المركزية:

$$\vec{\alpha}_n=\overline{w}\wedge(\overline{w}\wedge\vec{r})=(\overline{w}.\vec{r})\overline{w}-(\vec{w}.\overline{w})\vec{r}$$

(1) العجلة المركزية:

وعند t = 1 تكون العجلة المركزية:

$$\vec{\alpha}_n = [(2\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k}).(2\vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k})](2\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k})]$$
$$-[(2\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k}).(2\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k})](2\vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k})$$
$$= [4 + 6 + 24](2\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k}) - [4 + 1 + 36](2\vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k})$$
$$= (34)(2\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k}) - (41)(2\vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k})$$
$$= (68 - 82)\vec{i} + (-34 + 246)\vec{j} + (204 - 164)\vec{k}$$
$$= -14\vec{i} + 212\vec{j} + 40\vec{k}$$

العجلة المستعرضة:

$$\vec{\alpha}_t = \dot{\vec{w}} \wedge \vec{r}$$

وعند t = 1 تكون العجلة المستعرضة:

$$\vec{\alpha}_t = (2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}) \wedge (2\vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k})$$
$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 4\vec{j} - 8\vec{k}$$

عجلة كوريوليس:

$$\vec{\alpha}_C = 2(\vec{w} \wedge \dot{\vec{r}}) = 2\vec{w} \wedge \vec{v}_M$$

وعند t = 1 تكون عجلة كوريوليس:

$$\vec{\alpha}_C = 2(2\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k}) \wedge (2\vec{i} - 6\vec{j} + 12\vec{k})$$
$$= 2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -6 & 12 \end{vmatrix} = 48\vec{i} - 24\vec{j} - 20\vec{k}$$

ملحوظة:

لإيجاد العجلة المطلقة (أو الحقيقية) $\vec{\alpha}_F$ التى هى مجموع: العجلة النسبية (أو الظاهرية) والعجلة المستعرضة (أو الخطية) والعجلة المركزية وعجلة كوريوليس، من المناسب إيجاد تلك الأنواع من العجلة أولاً ثم جمعها فنحصل على العجلة المطلوبة.

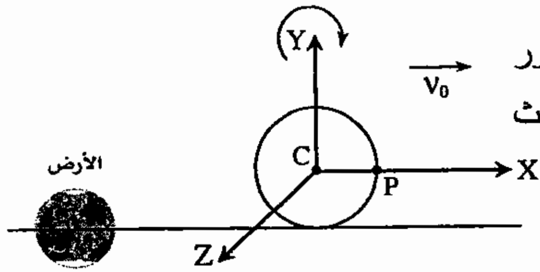
مثال (2):

(أ) تتدحرج كرة نصف قطرها a على الأرض بسرعة ابتدائية ثابتة v_0، أوجد عجلة أى نقطة P على محيط الكرة بالنسبة للأرض.

(ب) إذا تحركت الكرة على منحنى نصف قطره ρ، أوجد عجلة أعلى نقطة P فى الكرة بالنسبة لمركز المنحنى.

الحل:

الجزء (أ):



نختار نقطة أصل المحاور المتحركة عند مركز الكرة C بحيث يكون محور x يمر بنقطة P.

متجه موضع P: $\vec{r}\alpha\vec{i}$

ومنها $\dot{\vec{r}} = o$ ، وايضا $\ddot{\vec{r}} = o$

∴ عجلة النقطة P فى المحاور المتحركة هى $\vec{a}_M = \ddot{\vec{r}} = o$

وحيث أن الدوران حول محور z فإن: $\vec{w} = \vec{k}w = \vec{k}\dfrac{v_o}{\alpha} = \text{const.}$

ومنها: $\dot{\vec{w}} = o$

∴ العجلة المستعرضة تكون: $\vec{a}_t = \dot{\vec{w}} \wedge \vec{r} = o$

وعجلة كوريوليس تكون: $\vec{a}_C = 2(\vec{w} \wedge \dot{\vec{r}}) = o$

أما العجلة المركزية فيمكن إيجادها كالاتى:

فحيث أن $\vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}$ ، $\vec{k}\wedge\vec{i}=-i$ (من المتجهات)، فإن:

$$\vec{a}_n=\vec{w}\wedge(\vec{w}\wedge\vec{r})=\vec{k}w\wedge(\vec{k}w\wedge\vec{i}a)=w^2a[\vec{k}\wedge(\vec{k}\wedge\vec{i}]$$

$$=w^2a[\vec{k}\wedge\vec{j}]=-w^2a\vec{i}=-\left(\frac{v_o^2}{a^2}\right)a\vec{i}=\frac{-v_o^2}{a}\vec{i}$$

<u>العجلة المطلقة:</u>

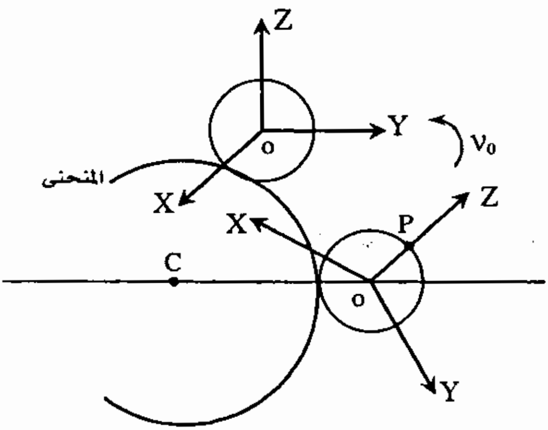
عجلة النقطة P (على محيط الكرة) بالنسبة للأرض هى:

$$\vec{a}_F=\vec{a}_M+(\dot{\vec{w}}\wedge\dot{\vec{r}})+\vec{w}\wedge(\vec{w}\wedge\vec{r})+2(\vec{w}\wedge\dot{\vec{r}})$$

$$=0+0+\left(\frac{-v_o^2}{a}\vec{i}\right)+0=\frac{-v_o^2}{a}\vec{i}$$

أى أن كل نقطة على محيط الكرة تتحرك نحو المركز بعجلة مقدارها $\frac{v_o^2}{a}$ (وهى فى نفس الوقت العجلة المركزية).

<u>الجزء (ب):</u>



نختار المحاور المتحركة بحيث يكون محور x يشير دائما نحو مركز المنحنى (C) أثناء الدوران، ونختار محور z مارا بأعلى نقطة (P) فى الكرة:

حيث a ثابت وحيث: $\vec{r}=a\vec{k}$

فبالتفاضل بالنسبة للزمن:

$$\therefore\quad \frac{d\vec{r}}{dt}=a\frac{d\vec{k}}{dt}+\vec{k}\frac{da}{dt}=a\frac{d\vec{k}}{dt}=a(\vec{w}\wedge\vec{k})$$

[من قاعدة المتجهات الدوارة فإن: $\frac{d\vec{k}}{dt}=\vec{w}\wedge\vec{k}$]

ولكن $\vec{w} = \frac{v_o}{a}\vec{i}$ (سرعة دوران المحاور حول مركز الكرة)

$$\therefore \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = a\left[\frac{v_o}{a}\vec{i} \wedge \vec{k}\right] = v_o(\vec{i} \wedge \vec{k})\vec{v}_o\vec{j} \qquad \Big| \quad \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$$

وهى سرعة النقطة P بالنسبة للإحداثيات المتحركة

اما العجلة فهى:

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{w} \wedge \vec{j} \qquad \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(-v_o\vec{j}) - v_o\frac{d\vec{j}}{dt} = -v_o(\vec{w} \wedge \vec{j})$$

$$= -v_o\left[\frac{v_o}{a}\vec{i} \wedge \vec{j}\right] = -\frac{v_o^2}{a}(\vec{i} \wedge \vec{j}) = -\frac{v_o^2}{a}\vec{k}$$

أى أن عجلة النقطة P فى المحاور المتحركة بالنسبة لمركز الكرة يكون باتجاه المركز وتكون عجلة النقطة P فى تلك المحاور بالنسبة لمركز المنحنى (C) ذو النصف قطر ρ هى: $\vec{a}_M = \ddot{\vec{r}} = \frac{-v_o^2}{\rho}\vec{k}$.

وحيث أن سرعة دوران المحاور المتحركة حول مركز المنحنى C هى: $\vec{w} = \frac{v_o}{\rho}\vec{k}$

حيث ρ نصف قطر المنحنى فتكون: $\boxed{\vec{r} = \rho\vec{k}}$

<u>العجلة المركزية:</u>

$$\vec{a}_n = \vec{w} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{r}) = \frac{v_o}{\rho}\vec{k} \wedge \left[\frac{v_o}{\rho}\vec{k} \wedge \rho\vec{k}\right] = \frac{v_o^2}{\rho}\vec{k}[\vec{k} \wedge \vec{k}] = \frac{v_o^2}{\rho}\vec{k}[0] = 0$$

<u>العجلة المستعرضة:</u>

حيث أن: $\vec{w} = cost \leftarrow \dot{\vec{w}} = o$ وتكون $\vec{a}_t = \dot{\vec{w}} \wedge \vec{r} = o$

<u>عجلة كوريوليس:</u>

$$\vec{a}_C = 2(\vec{w} \wedge \vec{r}) = 2\frac{v_o}{\rho}\vec{k} \wedge (-v_o\vec{j})$$

$$= -\frac{2v_{\circ}^{2}}{\rho}(\vec{k} \wedge \vec{j}) = -\frac{2v_{\circ}^{2}}{\rho}(-\vec{i}) = 2\frac{v_{\circ}^{2}}{\rho}\vec{i}$$

أى أنها تساوى $\frac{2v_{\circ}^{2}}{\rho}$ واتجاهها فى اتجاه مركز المنحنى C

وتصبح عجلة النقطة P بالنسبة إلى C هى:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{w}} \wedge \vec{r} + w \wedge (\vec{w} \wedge \vec{r}) + 2\vec{w} \wedge \dot{\vec{r}}$$

$$= \frac{-v_{\circ}^{2}}{\rho}\vec{k} + O + O + 2\frac{v_{\circ}^{2}}{\rho}\vec{i} = \frac{v_{\circ}^{2}}{\rho}(2\vec{i} - \vec{k})$$

وهو المطلوب.

مسائل

1. مجموعة محاور (xyz) تدور بسرعة زاوية $\vec{w} = 5\vec{i} - 4\vec{j} - 10\vec{k}$ بالنسبة لمجموعة محاور (XYZ) مثبتة ولها نفس نقطة الأصل، أوجد سرعة جسيم مثبت فى المجموعة (xyz) عند النقطة (3, 1, −2) كما يراها مشاهد مثبت فى المجموعة (XYZ).

2. مجموعة محاور (xyz) تدور بسرعة زاوية $\vec{w} = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + \vec{k}$ بالنسبة لمجموعة محاور (XYZ) مثبتة ولها نفس نقطة الأصل، فإذا كان متجه موضع جسيم هو: $\vec{r} = \sin t\vec{i} - \cos t\vec{j} + t\vec{k}$

أوجد ما يلى عند أى لحظة:

1. السرعة الظاهرية والسرعة الحقيقة.
2. العجلة الظاهرية والعجلة الحقيقية.

ثالثاً: تأثير دوران الأرض حول محورها على حركة جسيم بالنسبة لها:

Effect of Earth Rotation

تمهيد:

1. من المعلوم أن الأرض تدور حول محورها دورة كاملة (2π) كل (24) ساعة، وبذلك تكون سرعة دوران الأرض (السرعة الزاوية) حول نفسها هى:

$$w = \frac{2\pi}{t} = \frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60} = 7.27 \times 10^{-5} \text{ rad/sec.}$$

حيث t تقاس بالثانية

وبالرغم من كون w ذات قيمة صغيرة إلا أن لها تأثير على حركة الأجسام فى محيط الأرض، وللتبسيط فإنه من الممكن إهمال مربعات w (أى w^2) والقوى الأعلى لها.

2. ويؤثر دوران الأرض على الأجسام الساقطة نحوها فيحرفها نحو الشرق، كما يؤثر هذا الدوران على الحركة الواقعة فى مستوى مماس للأرض فيحرف مسارها إلى اليمين فى نصف الكرة الشمالى وإلى اليسار فى نصفها الجنوبى، ويمكن حساب مقدار هذا الانحراف كما سنرى فيما بعد.

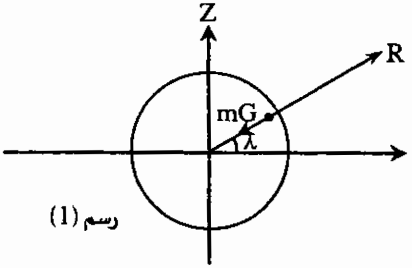
3. وقد قسم الجغرافيون الكرة الأرضية إلى خطوط طول ودوائر عرض لسهولة التعرف على مواقع ومناطق الكرة الأرضية، واستخدم خط الاستواء لتقسيم الكرة الأرضية إلى نصفين: نصف الكرة الشمالى (شمال خط الاستواء) ونصفها الجنوبى (جنوب خط الاستواء). وما يهمنا هنا هو دوائر العرض التى هى عبارة عن دوائر وهمية (ليس لها وجود فعلى) متوازية عددها 180 دائرة منها 90 شمال خط الاستواء و90 جنوبه.

ويمثل خط الاستواء الدرجة (0) وهى الدرجة التى تقسم الأرض إلى جزئين متساويين (شمالى وجنوبى)، ويقع القطب الشمالى عند درجة 90 شمال خط الاستواء، بينما يقع القطب الجنوبى عند درجة 90 جنوب خط الاستواء.

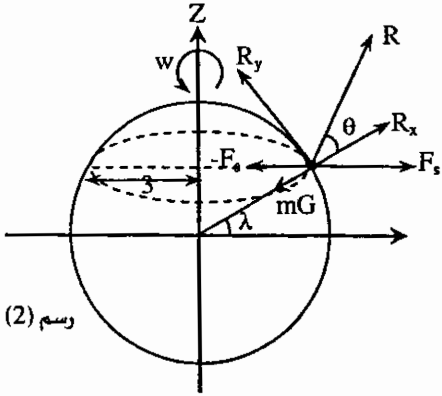
4. ويحدد موقع أى جسيم على سطح الكرة الأرضية بدرجة دائرة خط العرض له (λ)، حيث $\lambda=0$ عند خط الاستواء، $\lambda=90$ عند القطبين الشمالى والجنوبى.

وإذا كان r هو نصف قطر الأرض فإن نصف قطر دائرة العرض يكون:

$$\boxed{\rho = r\cos\lambda}$$



رسم (1)



رسم (2)

__مثال:__

أثبت أنه نتيجة لدوران الأرض حول محورها بسرعة زاوية ثابتة w فإن الجسيم الذى كتلته m والموضوع عند نقطة خط عرضها λ على سطح الكرة يكون له وزن ظاهرى (mg) (نتيجة الدوران) ينقص عن الوزن الفعلى (mG) (مع إهمال تأثير دوران الأرض) بالمقدار $(mrw^2\cos^2\lambda)$ حيث r نصف قطر الأرض.

أثبت كذلك أن رد فعل الأرض للجسيم (R) يكون منحرفا عن العمودى على سطح الأرض بزاوية صغيرة θ تعطى بالعلاقة: $\bar{\theta} \simeq \dfrac{rw^2}{2g}\sin 2\lambda$، وأن هذا الانحراف يكون أكبر ما يمكن عندما $\lambda=45°$ وأوجد مقداره حينئذ.

__الحل:__

__المطلوب:__ إثبات أن الفرق بين الوزن الظاهرى (mg) والوزن الحقيقى (mG) هو:

$$mG - mg = mrw^2\cos^2\lambda$$

__ولإثبات ذلك:__

__فى الرسم (1) (مع إهمال دوران الأرض):__ قوة جذب الأرض mG (نحو المركز O) تساوى مقدارا وتضاد اتجاها رد فعل الأرض على الجسيم.

<u>وفى الرسم (2) (مع اعتبار تأثير دوران الأرض):</u> قوة جذب الأرض mG (نحو المركز O دائما) ولكن نتيجة الدوران فإن رد فعل الأرض R ينحرف خلال زاوية θ، ولتكن مركبتيه R_x، R_y.

وهناك قوة تنشأ عن الدوران حول محور معين (ويكون اتجاهها نحو الخارج) هى القوة الطاردة المركزية (Centripital force) وقيمتها:

$$F_s = mw^2 \rho = mw^2 (r \cos \lambda)$$
$$= mrw^2 \cos \lambda$$

ومن اتزان الجسيم وبالتحليل فى اتجاهى نصف القطر والمماس نحصل على مركبتى رد فعل الأرض كالآتى:

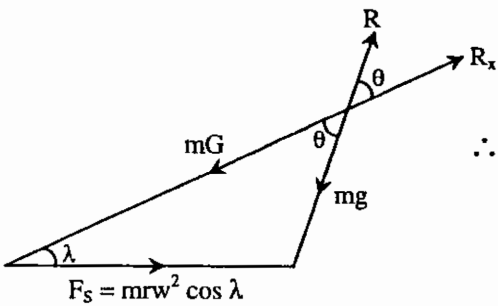
$$R_x + F_s \cos \lambda = mG$$
$$\therefore \quad R_x = mG - F_s \cos \lambda = mG - mrw^2 \cos^2 \lambda \qquad (1)$$
$$R_y + (-F_s \sin \lambda) = o$$
$$\therefore \quad R_y = F_s \sin \lambda = mrw^2 \cos \lambda \sin \lambda \qquad (2)$$

وفى هذه الحالة يكون الوزن الظاهرى mg فى عكس اتجاه رد الفعل المحصل R، أى أن mg=R حيث $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$، وباعتبار أن المركبة R_y (فى اتجاه المماس للكرة الأرضية) غير مؤثرة، وأن المركبة المؤثرة هى المركبة العمودية (أى التى فى اتجاه المركز) فيمكن كتقريب كتابة:

$$R = \sqrt{R_x^2} = R_x$$
$$\therefore \quad mg = R_x = mG - mrw^2 \cos^2 \lambda$$
$$\therefore \quad mG - mg = mrw^2 \cos^2 \lambda \qquad (3)$$

أى أن الفرق بين الوزن الظاهرى mg والوزن الفعلى (mG) هو: $mrw^2 \cos^2 \lambda$ وهو المطلوب أولا.

<u>ثانيا:</u> رد فعل الأرض R ينحرف عن العمودى على سطح الأرض أى عن اتجاه الوزن الظاهرى (الناتج عن الدوران) بالزاوية θ، ومن قانون الجيب (أنظر المثلث المرفق) فإن:



$$\frac{\sin\lambda}{mg} = \frac{\sin\theta}{mrw^2 \cos\lambda}$$

$$\therefore \quad \sin\theta = \frac{mrw^2 \cos\lambda \sin\lambda}{mg}$$

$$= \frac{rw^2 \cos\lambda \sin\lambda}{g} = \frac{rw^2 \sin 2\lambda}{2g}$$

وباعتبار أن θ زاوية صغيرة فنستخدم التقريب $\sin\theta \simeq \theta$

$$\therefore \quad \theta \simeq \frac{rw^2}{2g}\sin 2\lambda \qquad (4)$$

<u>وبطريقة أخرى:</u> فإن اتجاه R يمكن إيجاده من العلاقة:

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{mrw^2 \cos\lambda \sin\lambda}{mG - mrw^2 \cos^2\lambda} = \frac{mrw^2 \cos\lambda \sin\lambda}{mg}$$

[باستخدام (3) ,(2) ,(1)]

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{2rw^2 \cos\lambda \sin\lambda}{2g} = \frac{rw^2 \sin 2\lambda}{2g} \qquad (5)$$

وهذه العلاقة الدقيقة تعطى انحراف رد فعل الأرض(R) عن العمودى على سطح الأرض.

<u>وعند خط الاستواء:</u> حيث $\lambda=0$ فإن $\sin 2\lambda = 0 \leftarrow \theta=0$ أى لا يوجد انحراف.

<u>وعند القطبين:</u> حيث $\lambda = 90$ فإن $\sin 2\lambda = \sin 180 = 0 \leftarrow \theta=0$ أى لا يوجد انحراف أيضا.

<u>أعظم انحراف:</u> يكون عندما $\sin 2\lambda = 1$ أى عندما $2\lambda = 90^\circ [\sin 90=1] \leftarrow \lambda=45^\circ$

ويكون مقداره بالتقريب:

$$\theta \simeq \frac{rw^2}{2g} \simeq 1.7 \text{ x } 10^{-3} \text{ rad/sec.} = 0.1 \text{ degree}$$

رابعاً: دراسة تأثير دوران الأرض على حركة قذيفة فى مجال سطح الأرض:

بفرض أن الأرض كرة نصف قطرها r ومركزها O وتدور حول محورها بسرعة زاوية ثابتة w (وهى كمية صغيرة من رتبة 10^{-5} فيمكن إهمال مربعاته ا (w^2) فى المعادلات، أيضاً مع اعتبار أن $\vec{w}$ ثابتة فإن $\dot{\vec{w}} = 0$.

معادلة الحركة للقذيفة يمكن كتابتها بالصورة:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} - m\vec{w} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{r}) - 2m(\vec{w} \wedge \dot{\vec{r}})$$

[مع إهمال الحدود المشتملة على $\dot{\vec{w}}$]، وأيضاً لما كان الحد الثانى مشتملاً على w^2 فيمكن إهماله أيضاً، ونحصل على معادلة الحركة بالصورة:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} - 2m(\vec{w} \wedge \dot{\vec{r}})$$

$$\therefore \quad \ddot{\vec{r}} = \vec{g} - 2(\vec{w} \wedge \dot{\vec{r}}) \qquad (1)$$

ومن هذه المعادلة الاتجاهية يمكن الحصول على المركبات القياسـ ية للعجلـ ة فـ ى اتجاهات المحاور الثلاثة z, y, x كالآتى:

بكتابة:

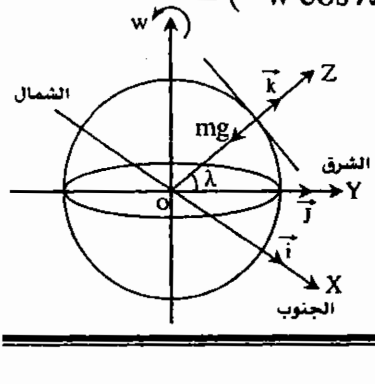
$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

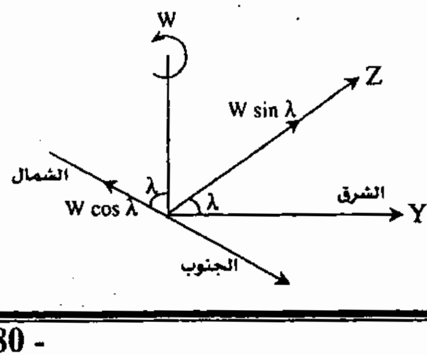
واختيار المحاور المتحركة على سطح الأرض بحيث أن: محور x يشير إلى جهـ ة الجنوب، محور y يشير إلى جهة الشرق، ومحور z عمودى على المماس لـ سطح الأرض (أى أن اتجاه مركز الأرض للخارج). واتجاه mg نحو مركز الأرض:

$$\therefore \quad \vec{g} = -g\vec{k}$$

$$\vec{w} = w_x\vec{i} + w_y\vec{j} + w_z\vec{k}$$

$$= (-w\cos\lambda)\vec{i} + (0)\vec{j} + (w\sin\lambda)\vec{k}$$





أيضاً فإن:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

$$\therefore\quad \vec{w} \wedge \dot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -w\cos\lambda & 0 & w\sin\lambda \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(-w\dot{y}\sin\lambda) - \vec{j}(-w\dot{z}\cos\lambda - \dot{x}w\sin\lambda) + \vec{k}(-w\dot{y}\cos\lambda)$$

$$= \vec{i}(-w\dot{y}\sin\lambda) + \vec{j}(w\dot{x}\sin\lambda + w\dot{z}\cos\lambda) + \vec{k}(-w\dot{y}\cos\lambda)$$

وبذلك يمكننا كتابة (1) بالصورة:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} = -g\vec{k} - 2[\vec{i}(-w\dot{y}\sin\lambda) + \vec{j}(w\dot{x}\sin\lambda + w\dot{z}\cos\lambda) + \vec{k}(-w\dot{y}\cos\lambda)]$$

وبمساواة معاملات $\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}$ فى الطرفين نحصل على:

$$\ddot{x} = 2w\dot{y}\sin\lambda \qquad (2)$$

$$\ddot{y} = -2w(\dot{x}\sin\lambda + \dot{z}\cos\lambda) \qquad (3)$$

$$\ddot{z} = -g + 2w\dot{y}\cos\lambda \qquad (4)$$

المعادلات (2), (3), (4) تعطى المعادلات التفاضلية لمعادلة حركة الجسيم (المقذوف) فى مجال سطح الأرض باعتبار دوران الأرض، وبحل هذه المعادلات (بالتكامل) نحصل على مركبات السرعة $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$، وبالتكامل مرة ثانية نحصل على موضع الجسيم عند أى لحظة (x, y, z)، كما يلى:

<u>أولا: إيجاد مركبات السرعة:</u>

بتكامل المعادلات (2), (3), (4) واعتبار مركبات السرعة الابتدائية $(\dot{z}_o, \dot{y}_o, \dot{x}_o)$.

نحصل على مركبات السرعة بالصورة:

$$\dot{x} = 2wy\sin\lambda + \dot{x}_o \qquad (5)$$

$$\dot{y} = -2w(x\sin\lambda + z\cos\lambda) + \dot{y}_o \qquad (6)$$

$$\dot{z} = -gt + 2wy\cos\lambda + \dot{z}_o \qquad (7)$$

ثانياً: لإيجاد الموضع (x, y, z):

بالتعويض من المعادلة (6) فى (2) نحصل على:

$$\ddot{x} = 2w[-2w(x\sin\lambda + z\cos\lambda)\dot{y}_o]\sin\lambda$$
$$= -4w^2x\sin^2\lambda - 4w^2z\cos\lambda\sin\lambda + 2w\dot{y}_o\sin\lambda$$

وبإهمال الحدود المشتملة على w^2:

$$\therefore\ \ddot{x} = 2w\dot{y}_o\sin\lambda$$

وبالتكامل بالنسبة للزمن نحصل على:

$$\therefore\ \dot{x} = 2w\dot{y}_o t\sin\lambda + \dot{x}_o$$

وبإجراء التكامل من ثانية:

$$\therefore\ x = 2w\dot{y}_o\frac{t^2}{2}\sin\lambda + \dot{x}_o t$$
$$= \dot{x}_o t + w\dot{y}_o t^2\sin\lambda \qquad (8)$$

وبالمثل بإجراء نفس الخطوات نحصل على z, y كالتالى:

بالتعويض عن $\dot{z},\dot{x}$ من (5), (7) فى (3) نحصل على:

$$\ddot{y} = -2w[(2wy\sin\lambda + \dot{x}_o)\sin\lambda$$
$$+(-gt + 2wy\cos\lambda + \dot{z}_o)\cos\lambda]$$

وبإهمال الحدود المشتملة على w^2:

$$\therefore\ \ddot{y} = -2w\dot{x}_o\sin\lambda - 2\dot{z}_o\cos\lambda + 2wgt\cos\lambda$$

وبإجراء التكامل بالنسبة للزمن:

$$\therefore\ \dot{y} = -2w\dot{x}_o t\sin\lambda - 2w\dot{z}_o t\cos\lambda + wgt^2\cos\lambda + \dot{y}_o$$

وبإجراء التكامل من ثانية نحصل على:

$$y = -w\dot{x}_o t^2\sin\lambda - w\dot{z}_o t^2\cos\lambda + \frac{1}{3}wgt^3\cos\lambda + y_o t$$

$$= \frac{1}{3} wgt^3 \cos\lambda - wt^2 (\dot{x}_o \sin\lambda + \dot{z}_o \cos\lambda) + +y_o t \quad (9)$$

وبالمثل يمكن إيجاد z بالصورة:

$$z = -\frac{1}{2} gt^2 + w\dot{y}_o t^2 \cos\lambda + \dot{z}_o t \qquad (10)$$

المعادلات (8),(9), (10) تعطى موضع الجسيم (أو المقذوف) عند أى لحظة فى مجال سطح الأرض باعتبار دوران الكرة الأرضية بعجلة زاوية ثابتة w.

أمثلة تطبيقية

ملحوظة:

يمكن استخدام المعادلات الخاصة بالموضع (x, y, z) أى المعادلات (8),(9),(10) فى حل المسائل التطبيقية التالية، غير أنه من المناسب استخدام المعادلات التفاضلية للحركة $(\ddot{z}, \ddot{y}, \ddot{x})$ أى المعادلات (2), (3), (4) من البداية وتطبيق الشروط الحدية وتكامل مرتين للحصول على الموقع. وفى الأمثلة التطبيقية التالية نستخدم معادلات الموضع [(8), (9), (10)] بينما سوف نستخدم المعادلات (2), (3), (4) ونجرى التكامل مرتين فى المسائل بعد ذلك.

مثال (1):

سقطت قذيفة من السكون من ارتفاع h عن سطح الأرض حيث $\dot{x}_o = 0, \dot{y}_o = 0, \dot{z}_o = 0$، أوجد مقدار انحراف القذيفة عن الرأسى.

الحل:

نستخدم المعادلات (8), (9), (10) وصورتها:

$$x = w\dot{y}_o t^2 \sin\lambda + \dot{x}_o t \qquad (1)$$

$$y = \frac{1}{3} wgt^3 \cos\lambda - wt^2 (\dot{x}_o \sin\lambda + \dot{z}_o \cos\lambda) + \dot{y}_o t \qquad (2)$$

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + w\dot{y}_o t^2 \cos\lambda + \dot{z}_o t \qquad (3)$$

ولكن $\dot{x}_o = 0, \dot{y}_o = 0, \dot{z}_o = 0$ وتؤول تلك المعادلات إلى:

$$x = 0 \qquad (4)$$

$$y = \frac{1}{3}wgt^3 \cos\lambda \qquad (5)$$

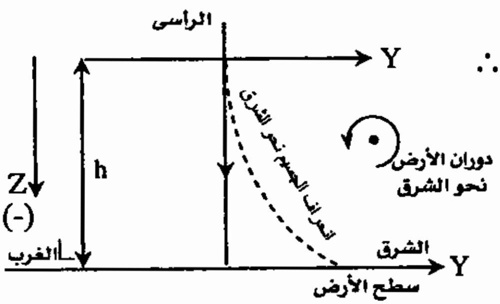
$$z = -\frac{1}{2}gt^2 \qquad (6)$$

ومن (6) حيث أن: $z = -h \leftarrow -h = -\frac{1}{2}gt^2$ ومن ذلك نجد أن:

$$t^2 = \frac{2h}{g} \qquad \therefore\ t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad (7)$$

وبالتعويض من (7) فى (5) نحصل على:

$$\therefore\ y = \frac{1}{3}wg\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2} \cos\lambda \quad (8)$$



وهو مقدار انحراف الجسيم واتجاهه نحو الشرق (مع اتجاه دوران الأرض).

مثال (2):

سقط جسيم من ارتفاع 100m عن سطح الأرض من مكان خط عرضه $\lambda = 45°$ شمالاً، أوجد مقدار الانحراف عن الرأسى.

الحل:

نستخدم المعادلات (8), (9), (10)، واعتبار أن الجسيم سقط من السكون فإن $\dot{x}_o, \dot{y}_o, \dot{z}_o$ تساوى أصفارا وتؤول تلك المعدلات إلى:

$$x = 0 \qquad (1)$$

$$y = \frac{1}{3}wgt^3 \cos\lambda \qquad (2)$$

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 \qquad (3)$$

فمن (3) حيث أن: $z = -h \leftarrow -h = -\frac{1}{2}gt^2 \leftarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

وبالتعويض فى (2): $\therefore \; y = \frac{1}{3}wg\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2} \cos\lambda$

وبالتعويض عن القيم:

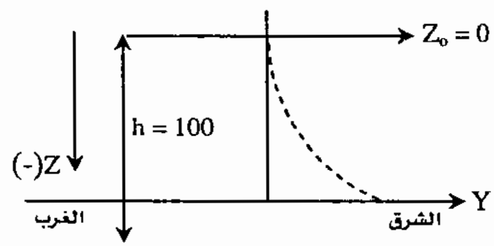
$$w = 7.3 \text{ x } 10^{-5}, \quad g = 9.8, \quad h = 100, \quad \lambda = 45$$

$$\therefore \quad y = \frac{1}{3}(7.3 \text{ x } 10^{-5})(9.8)\left(\frac{200}{9.8}\right)^{3/2} \cos(45°) = 0.1554\text{m}$$

حيث: $\cos(45°) = 0.707$

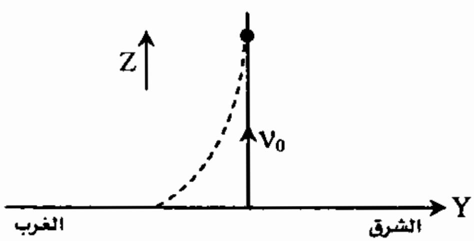
وهو مقدار الانحراف عن الرأسى بالمتر ويكون هذا الانحراف نحو الشرق (مع اتجاه دورن الأرض).

<u>مثال (3):</u>



أطلقت قذيفة رأسيا بسرعة v_o فبإهمال مقاومة الهواء واعتبار أن (g) ثابتة، أوجد موضع سقوط القذيفة عندما تسقط على الأرض.

<u>الحـــل:</u>



من معادلات حركة المقذوف باعتبـــــار تـــأثير دوران الأرض واعتبار أن $x_o = y_o = z_o = 0$ وأن $\dot{x}_o = 0, \dot{y}_o = 0, \dot{z}_o = v_o$

نحصل على معادلة الانحراف (معادلة y) بالصورة:

$$y=\frac{1}{3}wgt^3\cos\lambda-wt^2(\dot{x}_o\sin\lambda+\dot{z}_o\cos\lambda)$$
$$=\frac{1}{3}wgt^3\cos\lambda-wt^2\nu_o\cos\lambda \qquad (1)$$

<u>ولإيجاد زمن الطيران (زمن الصعود والهبوط):</u>

نستخدم قوانين الحركة تحت تأثير عجلة ثابتة (g)، فحيث أن:

$$z=-\frac{1}{2}gt^2-w\dot{y}_ot^2\cos\lambda+\dot{z}_ot=-\frac{1}{2}gt^2+\nu_ot \qquad (2)$$

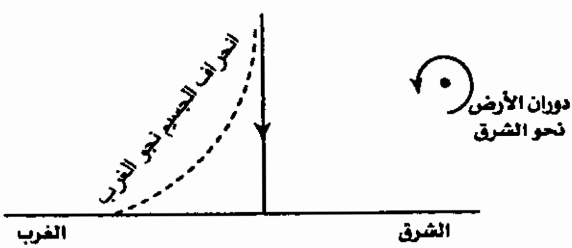
وبعد وصول القذيفة إلى أقصى ارتفاع ثم العودة إلى نقطة القذف تكون z=o ومنها نوجد زمن الوصول إلى نقطة القذف:

$$\therefore\quad 0=-\frac{1}{2}gt^2+\nu_ot\rightarrow t=\frac{2\nu_o}{g} \qquad (3)$$

وبالتعويض فى المعادلة (1) نوجد موضع سقوط القذيفة على الأرض:

$$y=\frac{1}{3}wg\left(\frac{2\nu_o}{g}\right)^3\cos\lambda-w\left(\frac{2\nu_o}{g}\right)^2\nu_o\cos\lambda$$
$$=\frac{8}{3}w\frac{\nu_o^3}{g^2}\cos\lambda-4w\frac{\nu_o^3}{g^2}\cos\lambda=-\frac{4}{3}w\frac{\nu_o^3}{g^2}\cos\lambda \qquad (4)$$

أى أن القذيفة تسقط منحرفة نحو الغرب (لوجود الإشارة السالبة وعكس اتجاه دوران الأرض) مسافة قدرها $\frac{4}{3}\frac{w\nu_o^3}{g^2}\cos\lambda$، وهو المطلوب



مسائل

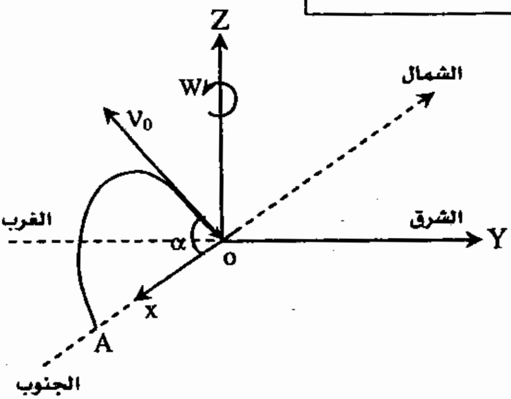
(1) أطلقت قذيفة من مكان خط عرضه λ بسرعة قذف v_0 نحو الجنوب فى اتجاه يصنع زاوية α مع المستوى الأفقى، عين موضع القذيفة بعد زمن t، وأوجد مقدار انحرافها عن المستوى الرأسى الأصلى وكذلك موضع سقوطها.

(2) سقط جسيم كتلته m من السكون من ارتفاع h عند خط عرض λ، أوجد موضع الجسيم عند أى لحظة ومعادلة المسار وكذلك موضع وصول الجسيم إلى الأرض (أى موضع اصطدامه بالأرض) عن النقطة التى تقع رأسيا أسفل موضعه الابتدائى (أى موضع انحراف الجسيم)، واذكر متى يبلغ هذا الانحراف أقصاه وما قيمته حينئذ.

(3) أطلق صاروخ رأسيا إلى أعلى من مكان خط عرضه $\lambda=60°$ شمالا فارتفع مسافة 100km فى الجو ثم عاد إلى الأرض، فبإهمال مقاومة الهواء والحدود المشتملة على w^2، أوجد انحراف مكان عودة الصاروخ عن مكان إطلاقه، وبين إحداثيات مكان عودة الصاروخ.

(4) سقط جسيم عند خط الاستواء $(\lambda = 0)$ من ارتفاع 400m فبإهمال مقاومة الهواء. أوجد بعد نقطة اصطدام الجسيم بالأرض عن النقطة التى تقع أسفل موضعه الابتدائى رأسيا.

حلول بعض المسائل



حل المسألة (1):

نأخذ المحاور كما بالشكل ونفرض أن القذيفة بدأت حركتها من نقطة الأصل بالسرعة v_o المبينة فى رأس المسألة.

فتكون معادلات الحركة (العجلة) هى:

$$\ddot{x} = 2w\dot{y}\sin\lambda \qquad (1)$$

$$\ddot{y} = -2w(\dot{x}\sin\lambda + \dot{z}\cos\lambda) \qquad (2)$$

$$\ddot{z} = -g + 2w\dot{y}\cos\lambda \qquad (3)$$

الشروط الابتدائية للمسألة:

عند t=o فإن x=o, y=o, z=o، وأيضا:

$$\dot{x}_o = v_o\cos\alpha, \dot{y} = o, \dot{z} = v_o\sin\alpha$$

من (1) بالتكامل:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (2w\sin\lambda)y + \dot{x}_o \\ &= 2yw\sin\lambda + v_o\sin\alpha \qquad (4)\end{aligned}$$

من (3) بالتكامل:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= -gt + (2w\sin\lambda)y + \dot{z}_o \\ &= -gt + 2yw\cos\lambda + v_o\sin\alpha \qquad (5)\end{aligned}$$

من (4) ,(5) بالتعويض فى المعادلة (2) نحصل على:

$$\begin{aligned}\ddot{y} = &-2w\sin\lambda(v_o\cos\alpha + 2wy\sin\lambda) \\ &-2w\cos\lambda(v_o\sin\alpha - gt + 2wy\cos\lambda)\end{aligned}$$

وبإهمال الحدود المشتملة على w^2 نحصل على:

$$\begin{aligned}\ddot{y} = &-2w\sin\lambda(v_o\cos\alpha) - 2w\cos\lambda(v_o\sin\alpha - gt) \\ &-2wv_o\sin(\alpha+\lambda) + 2wgt\cos\lambda\end{aligned}$$

بالتكامل مرة ثانية نحصل على $\dot{y}$ بالصورة:

$$\dot{y} = -2wv_o t\sin(\alpha+\lambda) + wgt^2\cos\lambda \qquad (6)$$

وبالتكامل نحصل على y بالصورة:

$$y = -wv_o t^2\sin(\alpha+\lambda) + \frac{1}{3}wgt^3\cos\lambda \qquad (7)$$

أيضاً من المعادلتين (4) ,(7) [بالتعويض عن y من (7) فى (4)]:

$$\dot{x} = 2w\sin\lambda[-wv_o t^2\sin(\alpha+\lambda) + \frac{1}{3}wgt^3\cos\lambda] + v_o\cos\lambda$$

وبإهمال الحدود المشتملة على w^2 نحصل على:

$$\dot{x} = v_o\cos\lambda$$

وبالتكامل نحصل على:

$$x = v_o t\cos\alpha \qquad (8)$$

أيضاً من المعادلتين (5) ,(7) [بالتعويض عن y من (7) فى (5)]:

$$\dot{z} = -gt + 2w\cos\lambda[-wv_o t^2\sin(\alpha+\lambda) + \frac{1}{3}wgt^3\cos\lambda] + v_o\sin\alpha$$

وبإهمال الحدود المشتملة على w^2 نحصل على:

$$\dot{z} = -gt + v_o\sin\alpha$$

وبالتكامل نحصل على:

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_o t\sin\alpha \qquad (9)$$

المعادلات (8) ,(7) ,(9) تعطى موضع الجسم عند أى لحظة t

أيضاً فإن المعادلة (7) تعطينا مقدار الانحراف عن المستوى الرأسى الأصلى (xyz) ويكون هذا الانحراف شرق المستوى أو غربه تبعا لإشارة المقدار.

والآن : القذيفة ستعود إلى المستوى الأفقى (xoz) عندما z=o فمن المعادلة (9) نجد أن:

$$o=-\frac{1}{2}gt^2+v_o t\sin\alpha$$

$$\therefore \qquad t=\frac{2v_o t\sin\alpha}{g} \qquad (10)$$

ولإيجاد موقع عودة القذيفة (وليكن نقطة A):

نعوض بالزمن (10) فى المعادلتين (7) ,(8) فنحصل على:

$$x_A=v_o\left(\frac{2v_o\sin\alpha}{g}\right)\cos\alpha=\frac{v_o^2}{g}\sin 2\alpha$$

$$y_A=-wv_o\left(\frac{2v_o\sin\alpha}{g}\right)^2\sin(\alpha+\lambda)$$

$$+\frac{1}{3}wg\left(\frac{2v_o\sin\alpha}{g}\right)^3\cos\lambda$$

$$=-\frac{4wv_o^3\sin^2\alpha}{3g^2}[3\cos\alpha\sin\lambda+\sin\alpha\cos\lambda]$$

ومنه يتضح أن الانحراف يكون ناحية الغرب من المستوى الرأسى الأصلى (إشارة سالب).

حل المسألة (2):

بفرض أن الجسيم فى البداية عند نقطة A على محور z.

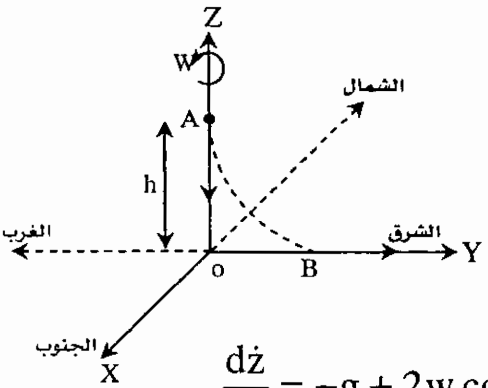
معادلات الحركة (مركبات العجلة بالنسبة لدوران الأرض):

$$\ddot{x}=2w\dot{y}\sin\lambda \qquad (1)$$

$$\ddot{y}=-2w(\dot{x}\sin\lambda+\dot{z}\cos\lambda) \qquad (2)$$

$$\ddot{z}=-g+2w\dot{y}\cos\lambda \qquad (3)$$

الشروط الابتدائية:



عند t=o فإن: x=o, y=o, z=h

$\dot{x}_o = o, \dot{y}_o = o, \dot{z}_o = o$

من (1): $\dfrac{d\dot{x}}{dt} = 2w\sin\lambda \dfrac{dy}{dt}$

وبالتكامل: $\int d\dot{x} = 2w\sin\lambda \int dy$

$\therefore\ \dot{x} = 2wy\sin\lambda \qquad (4)$

ومن (3): $\dfrac{d\dot{z}}{dt} = -g + 2w\cos\lambda \dfrac{dy}{dt}$

فبالتكامل: $\int d\dot{z} = -g\int dt + 2w\cos\lambda \int dy$

$\therefore\ \dot{z} = -gt + 2wy\cos\lambda \qquad (5)$

ومن (5) ,(4) بالتعويض فى (2):

$\therefore\ \ddot{y} = -2w[2wy\sin^2\lambda + (-gt + 2wy\cos\lambda)\cos\lambda]$

وبإهمال الحدود المشتملة على w^2 نحصل على:

$\ddot{y} = 2wgt\cos\lambda$

وبالتكامل: $\dot{y} = wgt^2\cos\lambda$

وبالتكامل مرة ثانية:

$y = \frac{1}{3}wgt^2\cos\lambda \qquad (6)$

وبالتعويض من (6) فى (4) وإهمال الحدود المشتملة على w^2 نحصل على:

$\dot{x} = 2w(\frac{1}{3}wgt^2\cos\lambda)\sin = 0$

وبالتكامل نحصل على: $\int dx = 0$

أى أن:

$x = 0 \qquad (7)$

وبالتعويض من (6) فى (5) وإهمال الحدود المشتملة على w^2 نجد أن:

$$\therefore \quad \dot{z} = -gt + 2w[\frac{1}{3}wgt^2\cos\lambda]\cos\lambda = -gt$$

وبالتكامل نحصل على:

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + h \qquad (8)$$

المعادلات (8) ,(7) ,(6) تعطى موضع الجسيم عند أى لحظة، ومن المعادلة (7) نجد أن الجسيم يتحرك فى المستوى yoz (الذى معادلته x=o)، ومن المعادلتين ,(6) (8) نحصل على معادلة المسار للجسيم (علاقة بين y, z)

فمن (8):

$$h - z = -\frac{1}{2}gt^2$$

$$\therefore \quad t^2 = \frac{2}{g}(h-z) \to t^6 = \frac{8}{g^3}(h-z)^3 \qquad (9)$$

ومن (6):

$$y^2 = \frac{1}{9}w^2g^2t^2\cos^2\lambda \qquad (10)$$

وبالتعويض من (9) فى (10):

$$\therefore \quad y^2 = \frac{1}{9}w^2g^2\frac{8}{g^3}(h-z)^3\cos^2\lambda$$

$$= \frac{8w^2\cos^2}{9g}(h-z)^3 \qquad (11)$$

وهى معادلة المسار للجسيم.

عندما يصل الجسيم إلى سطح الأرض (المستوى الأفقى xoy) عند نقطة B فإن z=o

وبالتعويض فى (8) نحصل على زمن سقوط الجسيم (وصوله من A إلى B)

$$0 = -\frac{1}{2}gt^2 + h \to h\frac{1}{2}gt^2 \to t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

وبالتعويض فى المعادلة (6) نحصل على انحراف الجسيم حيث:

$$y=-\frac{1}{3}wg\left(\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^3\cos\lambda=\frac{2}{3}hw\sqrt{\frac{2h}{g}}\cos\lambda$$

أى أن الجسيم يصطدم بالأرض عند نقطة B الواقعة نحو الشرق (شرق الرأسى)

ويبلغ الانحراف أقصاه عند خط الاستواء حيث o= وقيمته هى:

$$y_{max}=\frac{2}{3}hw\sqrt{\frac{2h}{g}}$$ [حيث cos o =1]

وهو المطلوب

<u>حل المسألة (3):</u>

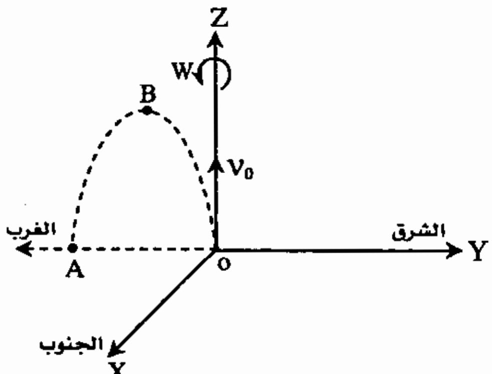
نفرض أن الصاروخ أطلق من نقطة الأصل O بسرعة رأسية v_o. فتكون معادلات الحركة (قوانين العجلة فى المحاور الدوارة بالنسبة للأرض).

$$\ddot{x}=2w\dot{y}\sin\lambda \qquad (1)$$

$$\ddot{y}=-2w(\dot{x}\sin\lambda+\dot{z}\cos\lambda) \qquad (2)$$

$$\ddot{z}=-g+2w\dot{y}\cos\lambda \qquad (3)$$

الشروط الابتدائية:



عند t=o فإن: x=o, y=o, z=o ،

$$\dot{x}_o=\dot{y}_o=o, \dot{z}_o=v_o$$

من (1) بالتكامل نحصل على:

$$\dot{x}=2wy\sin\lambda \qquad (4)$$

من (2) بالتكامل نحصل على:

$$\dot{z}=-gt+2wy\cos\lambda+v_o \quad (5)$$

من (5) ,(4) بالتعويض فى (2) نحصل على:

$$\ddot{y}=-2w[2wy\sin\lambda)\sin\lambda+(-gt+2wy\cos\lambda+v_o)\cos\lambda]$$

وبإهمال الحدود المشتملة على w^2:

$$\therefore\ \ddot{y} = -2w[-gt\cos\lambda + v_o\cos\lambda] = -2w\cos\lambda] = -2w\lambda(v_o - gt)$$

وبالتكامل:

$$\therefore\ \dot{y} = -2w\cos\lambda(v_o t - \frac{1}{2}gt^2) \qquad (6)$$

وبالتكامل مرة ثانية:

$$\therefore\ y = -2w\cos\lambda\left(\frac{1}{2}v_o t^2 - \frac{1}{6}gt^3\right) \qquad (7)$$

وبالتعويض عن y من (7) فى (4):

$$\therefore\ \dot{x} = 2w[-2w\cos\lambda\left(\frac{1}{2}v_o t^2 - \frac{1}{6}gt^3\right)\sin\lambda$$

وبإهمال الحدود المشتملة على w^2 نجد أن:

$$\therefore\ \dot{x} = 0$$

وبالتكامل نحصل على:

$$\therefore\ x = 0 \qquad (8)$$

وبالتعويض عن y من (7) فى (5):

$$\dot{z} = -gt - 4w^2\cos^2\lambda\left(\frac{1}{2}v_o t^2 - \frac{1}{6}gt^3\right) + v_o$$

وبإهمال الحدود المشتملة على w^2:

$$\therefore\ \dot{z} = -gt - 4w^2\cos^2\lambda\left(\frac{1}{2}v_o t^2 - \frac{1}{6}gt^3\right) + v_o \qquad (9)$$

وبالتكامل نحصل على:

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_o t \qquad (10)$$

المعادلات (10) ,(8) ,(7) تعطى موضع الصاروخ عند أى لحظة.

من المعادلة (8) نجد أن الصاروخ يتحرك فى المستوى الرأسى yoz (حيث x=o)
ويعود الصاروخ إلى الأرض (المستوى xoy) عند نقطة A حيث z=o فبالتعويض
فى (10) لإيجاد زمن الطيران (الزمن من O إلى A) نجد أن:

$$o=-\frac{1}{2}gt^2+\nu_o t \rightarrow \quad \boxed{t=\frac{2\nu_o}{g}}$$

ولتعيين مكان (أو موقع) الهبوط:

من المعادلة (8) نجد أن: $x=o$

ومن المعادلة (7) بالتعويض عن t نجد أن:

$$y=-2w\cos\lambda\left[\frac{1}{2}\nu_o\left(\frac{2\nu_o}{g}\right)^2-\frac{1}{6}g\left(\frac{\nu}{2}\right)^3\right]=-\frac{4}{3}\frac{w\cos\lambda}{g}\nu_o^3 \quad (11)$$

ولإيجاد ν_o بدلالة h (أقصى ارتفاع للصاروخ):

عند أقصى ارتفاع (B) تنعدم السرعة $\dot{z}$ فمن (9) نجد أن:

$$o=-\frac{1}{2}gt^2+\nu_o t$$

ومنها: $t-\frac{\nu_o}{g}$، وهو الزمن من O إلى B (أى زمن أقصى ارتفاع)

فبالتعويض فى (10) نحصل على أقصى ارتفاع:

$$z_{max}=-\frac{1}{2}g\left(\frac{\nu_o}{g}\right)^2+\nu_o\left(\frac{\nu_o}{2}\right)=\frac{\nu_o^2}{2g}=h$$

ومن ذلك نجد أن: $\nu_o=\sqrt{2gh}$

وبالتعويض فى (11) نحصل على انحراف مكان عودة الصاروخ عن مكان إطلاقه:

$$y=--\frac{4}{3}\frac{w\cos\lambda}{g^2}(2gh)^{3/2} \quad (12)$$

الإشارة السالبة معناها أن الانحراف يكون نحو الغرب

<u>**ولإيجاد إحداثيات مكان عودة الصاروخ A:**</u> (بالتعويض عن القيم العددية) نحصل على:

$$y = -\frac{4}{3}\frac{(2.27 \times 10^{-5})\cos 60^\circ}{(9.8)^2}[2 \times 9.8 \times 100]^{3/2} \quad \left| \begin{array}{l} w = 7.27 \times 10^{-5} \\ \lambda = 60^\circ \\ g = 9.8 \end{array} \right.$$

$$= -1.385 \text{ km}$$

أى أن إحداثيات مكان عودة الصاروخ هى:

$$A = (x, y, z) = (0, -1.385, 0)$$

وهو المطلوب