الباب الثالث

الحركة المقيدة المستوية للجسيمات

سبق أن درسنا فى الجزء الأول من كتابنا (أسس علم الديناميكا) حركة نقطة مادية (أو جسيم) فى دائرة (أفقية ورأسية) كحالة خاصة من الحركة المقيدة المستوية للجسيمات، وفى هذا الباب نقوم بدراسة الحالة العامة لهذا النوع من الحركة المستوية، وندرس الموضوعات الآتية:

1. حركة جسيم على منحنى مستو أملس – الإحداثيات الطبيعية (أو الذاتية).
2. حركة جسيم على منحنى السيكلويد (الحركة السيكلويدية).
3. حركة جسيم على منحنى مستو خشن.

أولاً: حركة جسيم على منحنى مستو أملس – الإحداثيات الطبيعية

(1) مركبات السرعة والعجلة فى الإحداثيات الطبيعية (الذاتية أو المماسية):

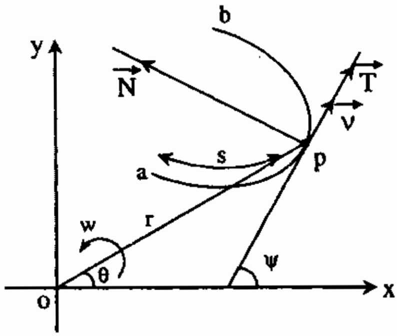
إذا تحرك جسيم فى مستو حركة مقيدة بمسار معين (كانزلاق حلقة على سلك منحنى ثابت الشكل والوضع)، فإن الاتجاهات الطبيعية للتحليل تكون فى اتجاه المماس لمنحنى المسار المعلوم واتجاه العمودى عليه.

وهذين الاتجاهين (المماس للمنحنى والعمودى عليه) يدوران مع حركة الجسيم فى مساره، غير أنهما يحتفظان بتعامدهما على بعضهما، ويعرفان بالإحداثيات الطبيعية (أو الذاتية أو المماسية) لحركة الجسيم المقيد بمسار مستو معلوم.

ولإيجاد مركبتى السرعة فى تلك الإحداثيات:

نفرض أن ab منحنى مستو معلوم وأن هناك نقطة مادية تتحرك عليه وأن موضعها عند اللحظة t هو p، حيث المسافة s (طول القوس) من نقطة ثابتة على المسار إلى الجسيم هى:

$$s = ap$$



وأن ψ هى الزاوية التى يصنعها المماس عند p مع اتجاه ثابت ox فى مستوى الحركة.

تسمى المعادلة:

$$s = f(\psi) \qquad (1)$$

بالمعادلة الذاتية (أو المماسية) للمسار.

سرعة النقطة p تكون فى اتجاه المماس فقط (أى فى اتج اه تزايد دى) ومق دارها $v = \dfrac{ds}{dt}$ فإذا كان $\vec{T}$ هو متجه الوحدة فى اتجاه المماس فإن:

$$\bar{v} = v\bar{T} = \frac{ds}{dt}\bar{T} = \dot{s}\bar{T} \qquad (2)$$

أما فى اتجاه العمودى فلا توجد أى مركبة للسرعة

$$\therefore \quad \bar{v} = \left(\dot{s}\bar{T}, O\right) \qquad (3)$$

<u>لإيجاد مركبتى العجلة فى الإحداثيات الذاتية (أو المماسية):</u>

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\bar{T}) = \dot{s}\frac{d\bar{T}}{dt} = \ddot{s}\bar{T} + \dot{s}\frac{d\bar{T}}{dt} \qquad (4)$$

ولكن:

$$\frac{d\bar{N}}{dt} = \frac{d\psi}{dt}\bar{N} = \dot{\psi}\bar{N} \qquad (5)$$

حيث $\bar{N}$ هو متجه الوحدة فى اتجاه العمودى على المماس ويرتبط بمتجه الوح دة $\bar{T}$ بالعلاقة:

$$\bar{T} = \psi\bar{N} \qquad (6)$$

وتصبح العجلة بالصورة [بالتعويض من (6) فى (4)]:

$$\bar{a} = \ddot{s}\bar{T} + \dot{s}\psi\bar{N} \qquad (7)$$

أى أن العجلة لها مركبتان:

١. مركبة مماسية (فى اتجاه $\bar{T}$) وقيمتها $a_T = \ddot{s}$

٢. مركبة عمودية (فى اتجاه $\bar{N}$) وقيمتها $a_N = \dot{s}\dot{\psi}$

وباستخدام العلاقة بين المسافة s ونصف قطر التقوس (أو الانحناء) للمسار عند النقطة ρ وهى [من التفاضل والتكامل]:

$$\rho = \frac{ds}{d\psi} \tag{8}$$

فإننا نحصل على:

$$a_T = \ddot{s} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \dot{v} = v\frac{dv}{ds} \tag{9}$$

$$v = \frac{dv}{dt} = \dot{s}$$

وهى المركبة المماسية (فى اتجاه المماس للخارج أى فى اتجاه تزايد s).

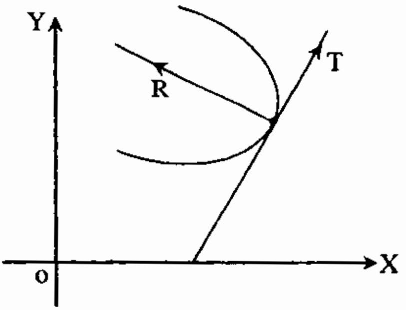
$$a_N = \dot{s}\dot{\psi} = \dot{s}\frac{d\psi}{dt} = \dot{s}\frac{d\psi}{ds}.\frac{ds}{dt} = v\left(\frac{1}{\rho}\right)v = \frac{v^2}{\rho} \tag{10}$$

وهى المركبة العمودية (فى اتجاه العمودى للداخل أى فى اتجاه تزيد ψ).

ويكون مقدار العجلة الكلية:

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$$

واتجاههما يصنع زاوية $\tan^{-1}\left(\frac{a_N}{a_T}\right)$ مع اتجاه المماس.



وتكون معادلتى الحركة لجسيم يتحرك على منحنى مستو معلوم هما:

$$T = ma_T = mv = \frac{dv}{ds}$$

$$R = ma_N = m\frac{v^2}{\rho}$$

ملحوظة:

إذا تحرك الجسيم بسرعة ثابتة على المنحنى فإن $v = \dot{s} = const.$ وتكون $\ddot{s} = o$ أى أن $a_T = o$ مما يعنى أن المركبة المماسية للعجلة تتلاشى.

نتيجة:

فى حالة الدائرة فإن نصف قطرها $(\rho = r)$ انحنائهم يساوى نصف قطرها ويكون: $s = r\theta$ وتكون السرعة: $v = \dot{s} = r\dot{\theta}$

أما العجلة فيكون لها مركبتان هما:

$$a_T = \ddot{s} = r\ddot{\theta} \quad , \quad a_N = \frac{v^2}{r} = \frac{1}{r}(r\dot{\theta})^2 = r\dot{\theta}^2$$

$$\therefore \qquad a = (r\ddot{\theta} \, , \, r\dot{\theta}^2)$$

إيجاد نصف قطر التقوس (أو الانحناء) لمنحنى:

يمكن إيجاد نصف قطر التقوس أو الانحناء (ρ) لأى منحنى معادلته الكرتيزية $y=f(x)$ من العلاقة الآتية:

$$\rho = \frac{\left[1 + y'^2\right]^{3/2}}{y''}$$

حيث $y' = \frac{dy}{dx}$ ، $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$

أما إذا كانت معادلة المنحنى معادلة ذاتية: $s=f(\psi)$ فإن نصف قطر التقوس (أو الانحناء) يعطى بالعلاقة:

$$\rho = \frac{ds}{d\psi}$$

ويعرف مقلوب ρ أى $\frac{1}{\rho}$ بالتقوس أو الانحناء (curvature) للمنحنى عند النقطة المعينة.

مثال:

أوجد نصف قطر التقوس للمنحنين الآتيين:

(1) $y = 2a\,x^2$ (قطع مكافئ)

(2) $s = c\tan\psi$ (منحنى السلسلة)

الحل:

(1) حيث أن $y = 2a\,x^2$

$$\therefore \quad y' = 4\,ax \quad , \quad y'' = 4a$$

$$\therefore \quad \rho = \frac{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}{y''} = \frac{\left(1+16a^2x^2\right)^{3/2}}{4a}$$

(2) حيث أن $s = c\tan\psi$

$$\therefore \quad \rho = \frac{ds}{d\psi} = c\frac{d}{d\psi}(\tan\psi) = c\sec^2\psi$$

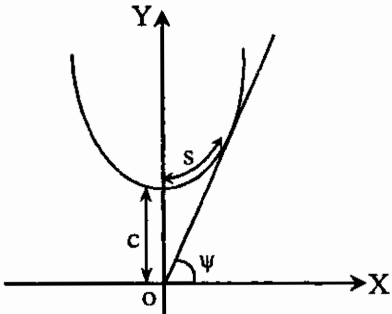
أمثلة محلولة على حركة جسيم على منحنى أملس:

مثال (1):

يتحرك جسيم على منحنى السلسلة (الكتينة) التى معادلتها الذاتية $s=c\tan\psi$ بحيث يدور المماس بسرعة زاوية ثابتة ω - برهن على أن مقدار عجلة الجسيم عند أى موضع يساوى $\left(\rho\omega^2\sqrt{\frac{4\rho}{c}-3}\right)$ حيث ρ نصف قطر الانحناء للمنحنى وأن اتجاهها يصنع زاوية θ مع المماس حيث: $\tan\theta = \frac{1}{2}\cot\psi$

الحل:

منحنى الكتينة (السلسلة) مبين بالشكل ومعادلته الذاتية: $s = c\tan\psi$



السرعة المماسية:

$$v=\frac{ds}{dt}=c\sec^2\psi.\dot{\psi}$$

$$=c\,\omega\sec^2\psi\ ,\ \omega\dot{\psi} \qquad (1)$$

العجلة المماسية:

$$a_T=\frac{dv}{dt}=2c\,\omega\sec^2\psi.\tan\psi.\dot{\psi}=2c\,\omega^2\sec^2\psi.\tan\psi.\dot{\psi} \qquad (2)$$

العجلة العمودية:

حيث نصف قطر الانحناء ويعطى من العلاقة:

$$\rho=\frac{ds}{d\psi}=c\sec^2\psi$$

$$\therefore \qquad a_N=\frac{(c\,\omega\sec^2\psi)^2}{c\sec^2\psi}=c\,\omega^2\sec^2\psi \qquad (3)$$

العجلة الكلية:

$$a^2=a_T^2+a_N^2$$

$$=(2c\,\omega^2\sec^2\psi\tan\psi)^2+(c\,\omega^2\sec^2\psi)^2$$

$$=c^2\omega^4\sec^2\psi(1+4\tan^2\psi)$$

$$=c^2\omega^4\sec^4\psi(4\sec^2\psi-3)$$

$$=(c\sec^2\psi)^2\omega^4\left(\frac{4c\sec^2\psi}{c}-3\right)=\rho^2\omega^4\left(\frac{4\rho}{c}-3\right)$$

ويكون مقدار العجلة:

$$a=\sqrt{a_T^2+a_N^2}=\rho\omega^2\sqrt{\frac{4\rho}{c}-3}$$

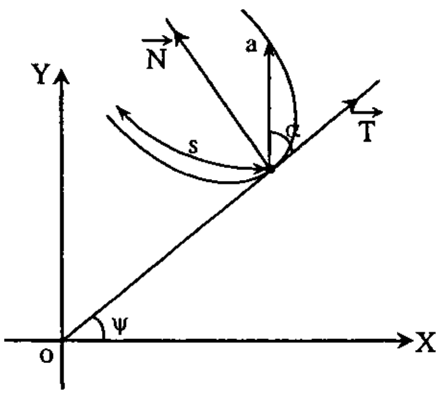
واتجاهها هو:

$$\tan\theta\frac{a_N}{a_T}==\frac{c\omega^2\sec^2\psi}{2c\omega^2\sec^2\psi\tan\psi}=\frac{1}{2}\cot\psi$$

وهو المطلوب.

مثال (2):

تتحرك نقطة مادية ذات عجلة ثابتة a فى اتجاه يميل بزاوية α على منحنى أملس، أثبت أن هذا المنحنى هو الحلزون متساوى الزاوية ومعادلته $x+\lambda=ke^{2\psi\cot\alpha}$ حيث λ, k ثابتان، $x=2sa\cos\alpha$



الحل:

معادلتا الحركة هما:

$$a_T=\nu\frac{d\nu}{ds}=a\cos\alpha \qquad (1)$$

$$a_N=\frac{\nu^2}{\rho}=a\sin\alpha \qquad (2)$$

بتكامل المعدلة (1):

$$\therefore \quad \int \nu d\nu=a\cos\alpha\int ds$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\nu^2=(a\cos\alpha).s+c$$

$$\therefore \quad \nu^2=2(a\cos\alpha)s+\lambda \quad (3), \quad \longrightarrow \lambda=2c$$

ومن المعادلة (2):

$$\therefore \quad \nu^2=\rho=(a\sin\alpha) \qquad (4)$$

وبمساواة (3) ,(4):

$$\rho=(a\sin\alpha)=2(a\cos\alpha).s+\lambda$$

$$\therefore \quad \rho = \frac{2a\cos\alpha.s+\lambda}{a\sin\alpha}$$

ولكن: نصف قطر الانحناء للمنحنى:

$$\rho = \frac{ds}{d\psi} = \frac{(2a\cos\alpha).s+\lambda}{a\sin\alpha}$$

$$\therefore \quad \frac{ds}{(2a\cos\alpha).s+\lambda} = \frac{d\psi}{a\sin\alpha}$$

وبضرب الطرفين فى $(2a\cos\alpha)$:

$$\therefore \quad \frac{(2a\cos\alpha)ds}{(2a\cos\alpha).s+\lambda} = \frac{2a\cos\alpha d\psi}{a\sin\alpha} = 2\cot\alpha.d\psi$$

وبالتكامل نحصل على:

$$\ln(2a\cos\alpha.s+\lambda) = 2\cot\alpha.\psi + C_1$$

$$\therefore \quad (2a\cos\alpha).s+\lambda = e^{2\psi.\cot\alpha}.e^{C_1} = ke^{2\psi.\cot\alpha}, \quad k = e^{C_1}$$

وبأخذ: $(2a\cos\alpha).s = x$

$$x+\lambda = ke^{2\psi.\cot\alpha}$$

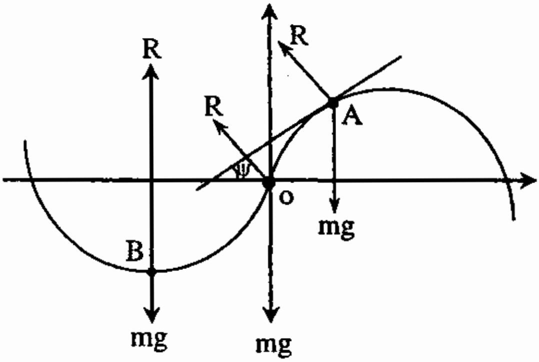
وهى معادلة الحلزون (أو اللولب) المتساوى الزاوية.

<u>مثال (3):</u>

تنزلق حلقة كتلتها m على سلك منحنى أملس مستواه رأسى ومعادلته y=sin x ، فإذا كانت الحلقة قد بدأت حركتها على السلك من النقطة $A\left(\frac{\pi}{4},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$، أوجد رد فعل السلك على الحلقة عند مرورها بالنقطتين: O(o,o)، $B\left(-\frac{\pi}{2},-1\right)$

الحـــل:

نفرض أن موضع الحلقة عند اللحظة t عند النقطة A وأن ψ هى الزاويـــة التـــى يصنعها المماس عند A مع الأفقى فى الاتجاه العمودى على المماس عند A.



معادلات الحركة:

$$m\ddot{s} = -mg\sin\psi \qquad (1)$$

$$m\frac{v^2}{\rho} = mg\cos\psi - R \qquad (2)$$

أيضاً فمن معادلة المنحنى: $y = \sin x$

فإن ميل المنحنى يكون:

$$\tan\psi = \frac{dy}{dx} = \cos x \ , \ \ \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\tan\psi} = \cot\psi$$

وأيضاً حيث أن:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \rightarrow \left(\frac{ds}{dy}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1$$

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \sqrt{1 + \cot^2\psi} = \operatorname{cosec}\psi$$

$$\therefore \qquad \frac{dy}{ds} = \frac{1}{\operatorname{cosec}\psi} = \sin\psi$$

ومن (1):

$$\ddot{s} = -g\sin\psi = -g\frac{dy}{ds}$$

$$\therefore \qquad \dot{s}\frac{d\dot{s}}{ds} = -g\frac{dy}{ds}$$

وبالتكامل بالنسبة إلى s نحصل على:

$$\int \dot{s}d\dot{s} = -g\int d - dy$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\dot{s} = -gy + cons \rightarrow \dot{s}^2 = -2gy + C$$

ولإيجاد الثابت c: في بداية الحركة:

$$x = \frac{\pi}{4}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad v = \dot{s} = o$$

$$\therefore \quad o = \frac{-2g}{\sqrt{2}} + C \rightarrow C = \frac{2g}{\sqrt{2}} = \sqrt{2g}$$

$$\therefore \quad v^2 = -2gy + \sqrt{2}g = g(\sqrt{2} - 2y) \qquad (3)$$

نصف قطر التقوس:

$$\rho = \frac{\left[1 + y^{`2}\right]^{3/2}}{y^{``}} = \frac{\left[1 + \cos^2 x\right]^{3/2}}{-\sin x} = \frac{\left(1 + \tan^2 \psi\right)^{3/2}}{-y}$$

ومن (2) فإن رد فعل السلك:

$$R = m\left(g\cos - \frac{v^2}{\rho}\right) \qquad (4)$$

حيث

$$\cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \psi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}$$

لإيجاد رد الفعل عند النقطة O: حيث $x=o$ ، $y=o$ ، $\rho = \infty$ ، $\cos x = 1$ ، $\sin x = o$

معادلة الحركة عند O هي المعادلة (4):

$$\therefore \ \tan = \psi = \cos x = 1 \qquad \therefore \ \psi = \frac{\pi}{4} \qquad \therefore \ \cos\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

فبالتعويض فى (4):

$$R = m\left(\frac{g}{\sqrt{2}} - o\right) = \frac{mg}{\sqrt{2}} \qquad (5)$$

وهو المطلوب أولاً.

ولإيجاد رد الفعل عند النقطة B: حيث $x = -\frac{\pi}{2}$ ، $y = -1$

$$y` = \frac{dy}{dx} = \cos x = o \ , \ y`` - \sin x = 1 \qquad \therefore \ \rho = 1$$

$$\tan\psi = \cos x = o, \quad \psi = o, \qquad \cos\psi = 1$$

وأيضاً من (3):

$$\nu^2 = g(\sqrt{2} + 2) \qquad (6)$$

ويكون رد الفعل فى هذه الحالة بالصورة:

$$R = m\left(g + \frac{\nu^2}{\rho}\right)$$

[حيث أن معادلة الحركة عند B هى: $\frac{m\nu^2}{\rho} = R - mg$]

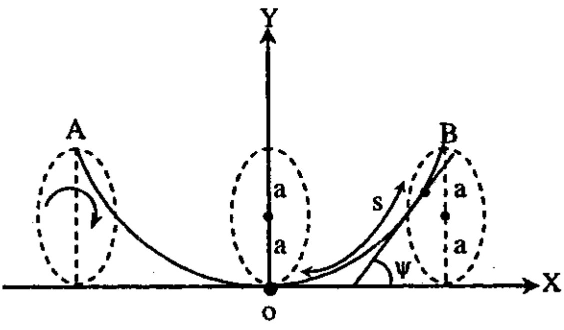
$$R = m\left[g + g\left(\sqrt{2} + 2\right)\right] = mg\left[3 + \sqrt{2}\right] \qquad (7)$$

وهو المطلوب ثانياً.

ثانياً: حركة جسيم على منحنى السيكلويد (الحركة السيكلويدية)

يعرف منحنى السيكلويد (الدويرى) بأنه مسار نقطة على محيط دائرة نصف قطرها a تتدحرج فى اتجاه محور x. تسمى o رأس السيكلويد وتسمى أعلى نقطة B (الناب).

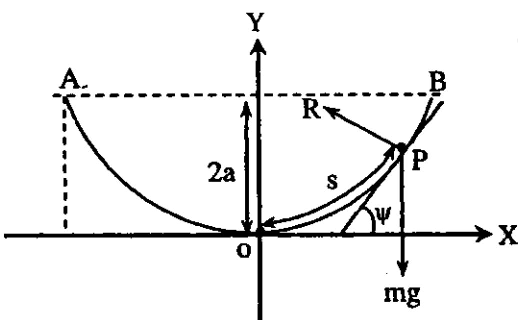
المعادلة الذاتية للسيكلويد هى: $s=4a \sin \psi$ حيث s المسافة من o إلى النقطة المتحركة p.



منحنى السيكلويد

المسألة:

إذا تحرك جسيم m على سلك منحنى أملس على شكل سيكلويد محوره رأسى وتمت الحركة فى البداية بقذف الجسيم من أسفل نقطة o (رأس السيكلويد)، المطلوب الاتى:



المسألة

(i) دراسة الحركة (إيجاد السرعة والمسافة).

(ii) إيجاد رد الفعل العمودى R، ومتى يترك الجسيم السلك.

(iii) إيجاد سرعة وصول الجسيم أعلى نقطة فى السيكلويد B (ناب السيكلويد).

(iv) إيجاد زمن وصول الجسيم من الرأس o إلى الناب B (زمن الحركة).

الحل:

(i) دراسة الحركة:

المعادلة الذاتية للسيكلويد هى:

$$s = 4a \sin \psi \tag{1}$$

حيث s طول القوس a, op نصف قطر الدائرة الراسمة للسيكلويد أثناء تدحرجها.

نصف قطر انحناء السيكلويد هو:

$$\rho = \frac{ds}{d\psi} = 4a \cos \psi \tag{2}$$

معادلات الحركة:

إذا كان رد الفعل العمودى للمنحنى عند p هو R فإن معادلات الحركة تكون:

$$F_T = ma_T = m\ddot{s} = -mg \sin \psi \tag{3}$$

$$F_N = ma_N = m\frac{v^2}{\rho} = R - mg \cos \psi \tag{4}$$

من (1): $\sin \psi = \frac{s}{4a}$ وبالتعويض فى (3) نحصل على:

$$\ddot{s} = -\frac{g}{4a} s = -\omega^2 s \qquad (5) \qquad \Bigg| \; \omega^2 = \frac{g}{4a}$$

المعادلة (5) هى معادلة حركة توافقية بسيطة زمنها الدورى:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{4a}}} = 2\pi\sqrt{\frac{4a}{g}} = 4\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

ولإيجاد السرعة:

حيث أن $\ddot{s} = -\omega^2 s$ [(المعادلة (5)] فبالتكامل بالنسبة إلى s نحصل على:

$$v\frac{dv}{ds} = -\omega^2 s \rightarrow \int v dv = -\omega^2 \int s ds$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}v^2 = -\frac{\omega^2}{2}s^2 + \text{const.} \rightarrow v^2 = -\omega^2 s^2 + C$$

ولإيجاد C:

(1) إذا كان الجسيم فى البداية أى عند s=o قد قذف بسرعة $v = v_o$ فإن:

$C = v_o^2$

وتصبح السرعة:

$$v^2 = v_o^2 - \omega^2 s^2 \qquad (6)$$

(2) أما إذا كان الجسيم فى البداية قد تحرك من السكون فإن $v_o = o$ وتصبح السرعة.

$$v^2 = -\omega^2 s^2 = -\frac{g}{4a}s^2 \qquad (7)$$

ولإيجاد المسافة:

من المعادلة (5): $\ddot{s} = -\omega^2 s$

فبالضرب فى $2\dot{s}$ والتكامل

$$\therefore \int 2\dot{s}\ddot{s} = -\omega^2 \int 2s\dot{s}$$

$$\therefore \dot{s}^2 = -\omega^2 s^2 + C$$

عندما t=o فإن s=so، $\dot{s} = o$ ← $\boxed{C = \omega^2 s_o^2}$

$$\therefore \dot{s}^2 = \omega^2\left(s_o^2 - s^2\right)$$

$$\therefore \dot{s} = \omega\sqrt{s_o^2 - s^2} = \frac{ds}{dt}$$

$$\therefore \int \frac{ds}{\sqrt{s_o^2 - s^2}} = \int \omega dt \qquad \therefore \cos^{-1}\frac{s}{s_o} = \omega t + C_1$$

وعند t=o ، $s=s_o$ فإن: $\cos^{-1}1 = o + C \leftarrow$ $\boxed{C = o}$

$$\therefore \cos^{-1}\frac{s}{s_o} = \omega t \longrightarrow \therefore \frac{s}{s_o} = \cos\omega t$$

$$\therefore \boxed{s = s_o \cos\omega} \qquad (8)$$

(ii) <u>إيجاد رد الفعل العمودى R:</u>

بالتعويض عن ρ من (2) وعن v^2 من (7) [الجسيم بدأ الحركة من السكون] فى المعادلة (4) [معادلة R] نحصل على:

$$R = mg\cos\psi + \frac{mv^2}{\rho} = mg\cos\psi - \frac{\frac{mg}{4a}s^2}{\rho}$$

$$\longrightarrow = mg\left(\cos\psi - \frac{s^2}{4\rho}\right) \qquad \begin{aligned} s &= 4a\sin\psi \\ \rho &= 4a\cos\psi \end{aligned}$$

$$= mg\left[\cos\psi - \frac{(4a\sin\psi)s^2}{4(4a\cos\psi)}\right]$$

$$= mg\left[\cos\psi - \frac{\sin^2\psi}{\cos\psi}\right] \qquad (9)$$

وعندما يترك الجسيم السلك فإن رد الفعل ينعدم أى أن R=o فمن (9) نجد أن:

$$\cos\psi - \frac{\sin^2\psi}{\cos\psi} = o$$

$$\therefore \quad \cos^2\psi = \sin^2\psi \longrightarrow \tan^2\psi = 1 \longrightarrow \tan\psi = \pm 1$$

وحيث أن ψ زاوية حادة فإن $\tan\psi = 1$ ومنها $\psi = \frac{\pi}{4}$

أى أن الجسيم يترك السلك عندما يكون متحركا فى اتجاه يصنع زاوية $\frac{\pi}{4}$ مع الأفقى.

(iii) إيجاد سرعة وصول الجسيم أعلى نقطة فى السيكلويد B (ناب السيكلويد):

عند الناب فإن $\psi=90°$ وتكون: $s=4a \sin 90 =4a$

وتصبح السرعة: $$v^2 = v_o^2 - \frac{g}{4a}(16a^2) = v_o^2 - 4ag$$

فى حالة قذف الجسيم بسرعة ابتدائية v_o من o.

(iv) إيجاد زمن الوصول إلى الناب (زمن الحركة):

إذا كان الجسيم قد قذف من الرأس o بسرعة v_o فإنه يصل إلى الناب بالسرعة: $v^2 = v_o^2 - 4ag$

[المعادلة (10)]، ولإيجاد زمن الحركة:

من معادلة الحركة [المعادلة (5)]: $$\ddot{s} = -\omega^2 s$$

فبالضرب فى $2\dot{s}$ والتكامل:

$$\int 2\dot{s}\ddot{s} = -\omega^2 \int 2s\dot{s}$$

$$\therefore \quad \dot{s}^2 = -\omega^2 s^2 + C_2$$

وفى البداية (عند الرأس o): $s=so$، $\dot{s} = v_o \leftarrow C_2 = v_o^2$

$$\therefore \ \dot{s}^2 = v_o^2 - \omega^2 s^2 \qquad \therefore \ \dot{s} = \frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{v_o^2 - \varpi^2 s^2}$$

وحيث أن s تزداد بازدياد الزمن فنختار الإشارة الموجبة، أما إذا قذف الجسيم من الناب (فى اتجاه تناقص s) فنختار الإشارة السالبة:

$$\therefore \ \dot{s} = \frac{ds}{dt} = \sqrt{v_o^2 - \varpi^2 s^2}$$

$$\therefore \ \dot{s} = \frac{ds}{\sqrt{v_o^2 - \varpi^2 s^2}} = \frac{1}{\varpi}\frac{ds}{\sqrt{\frac{v_o^2}{\varpi^2} - s^2}}$$

وبالتكامل نحصل على: $$t = \frac{1}{\varpi}\left[\sin^{-1}\frac{s}{v_o/\varpi}\right] + C_3$$

وفى البداية (عند o) فإن $s=o, t=o$ ويكون $C_3=o$

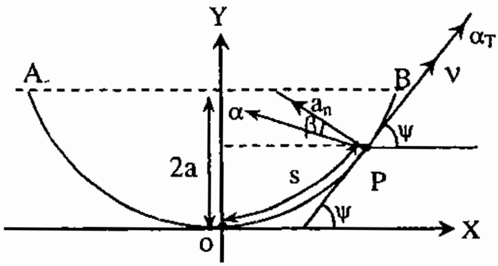
$$t=\frac{1}{\varpi}\sin^{-1}\frac{\varpi}{\nu_o}s=\sqrt{\frac{4a}{g}}\sin^{-1}\left[\sqrt{\frac{g}{4a\nu_o}}s\right]$$

أمثلة محلولة

مثال (1):

يتحرك جسيم p على منحنى السيكلويد $s=4a\ \sin\ \psi$ مبتدئا من رأسه o، فإذا كان المماس عند p يدور بسرعة زاوية ثابتة w، أثبت أن مقدار عجلة الجسيم عند p يساوى $4aw^2$ واتجاهها يصنع مع العمودى عند p زاوية $\beta=\psi$، أوجد أيضاً مركبتى السرعة والمسافة فى اتجاهى المماس عند الرأس والعمودى عليه بدلالة الزمن t.

الحل:



نفرض أن p موضع الجسيم عند الزمن t وأن المسافة المنحنية $s=op$ وأن الزاوية التى يصنعها المماس عند p مع ox عند الرأس تساوى ψ.

فحيث أن:

$$s=4a\sin\psi \qquad (1)$$

$$\therefore \quad \nu=\dot{s}=\frac{ds}{dt}=4a\cos\psi.\dot{\psi} \qquad (2)$$

وحيث أن المماس يدور بسرعة زاوية ثابتة ω فإن:

$$\frac{ds}{dt}=\dot{\psi}=\text{const}\omega \qquad (3)$$

وتصبح (2):

$$v = 4a\,\omega \cos\psi \qquad (4)$$

المركبة المماسية للعجلة:

$$a_T = \ddot{s} = \frac{dv}{dt} = -4a\omega^2 \sin\psi = -\omega^2 s \qquad (5)$$

المركبة العمودية للعجلة:

$$a_N = \frac{v^2}{\rho}$$

حيث s نصف قطر الانحناء ويعطى من:

$$\rho = \frac{ds}{d\psi} = 4a\cos\psi$$

$$\therefore \quad a_N = \frac{(4a\omega\cos\psi)^2}{(4a\cos\psi)} = 4a\omega^2\cos\psi \qquad (6)$$

مقدار عجلة الجسيم الكلية:

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{(-4a\omega^2\sin\psi)^2 + (4a\omega^2\cos\psi)^2} = 4a\omega^2 \quad (7)$$

واتجاهها يصنع زاوية β مع العمودى عند p حيث:

$$\therefore \quad \tan\beta = \frac{-a_T}{a_N} = \frac{-(4a\omega^2\sin\psi)}{4a\omega^2\cos\psi} = \frac{\sin\psi}{\cos\psi} = \tan\psi \rightarrow \beta = \psi$$

وهو المطلوب الأول.

ثانياً: إيجاد مركبتى السرعة والمسافة:

(1) مركبات السرعة:

مركبتى السرعة فى اتجاهى المماس عند الرأس (ox) والعمودى عليه (oy) هما:

$$\dot{x} = v\cos\psi = 4a\omega\cos^2\psi = 4a\omega\cos^2 wt \qquad (8)$$

$$\dot{y} = v\sin\psi = 4a\omega\cos\psi\sin\psi = 4a\omega\cos wt\sin wt \quad (9)$$

(2) مركبات المسافة (إحداثيات موضع الجسيم):

من (8):

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = 4a\omega\cos^2 wt$$

بفصل المتغيرات والتكامل:

$$\int_0^x dx = 4a\omega\int_0^t \cos^2 wt\ dt \qquad \Big| \qquad 2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$$

$$\therefore\ x = 2a\omega\int_0^t (1+\cos 2wt)dt = 2a\omega\left[t + \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right]_0^t$$

$$= a[2\omega t + \sin 2\omega t] = a[2\psi + \sin 2\psi] \qquad (10)$$

ومن (9):

$$4a\omega\cos wt\sin wt\,\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \qquad \Big| \qquad 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$$

$$= 2a\omega\sin 2wt$$

$$\therefore\ \int_0^x dy = 2a\omega\int_0^t \sin 2wt = 2a\omega\left[\frac{\cos 2wt}{2\omega}\right]_0^t = a[= \cos 2wt - (-1)]\ dt$$

$$= a[= \cos 2wt] - a[1 - \cos 2\psi]$$

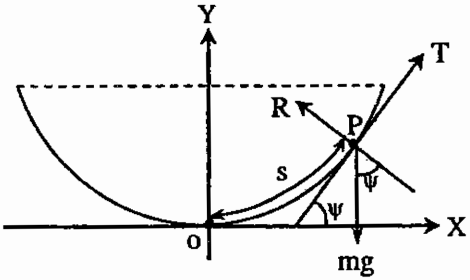
وهو المطلوب الثانى.

مثال (2):

ثبت سلك على شكل سيكلويد أملس فى مستوى رأسى بحيث كان محوره رأسيا ورأسه إلى أسفل، فإذا بدأ جسيم p كتلته m الحركة على السلك مبتدئا من السكون

السكون عند أحد طرفى السلك، أوجد الزمن الذى يستغرقه الجسيم فى الوصول إلى رأس السيكلويد o وأثبت أن الضغط على السلك عند o يساوى 2mg.

<u>الحـل:</u>



معادلات حركة الجسيم فى اتجاه المماس والعمودى عليه:

$$ma_T = -mg\sin\psi \qquad (1)$$

$$ma_N = R - mg\cos\psi \qquad (2)$$

من (1) نجد أن:

$$a_T = \ddot{s} = -g\left(\frac{s}{4a}\right) = \frac{-g}{4a}s = -\omega^2 s \qquad (3) \quad \text{و} \quad \omega^2 = \frac{g}{4a}$$

حيث: معادلة السيكلويد الذاتية $\sin\psi = \frac{s}{4a} \leftarrow s = 4a\sin\psi$

من (2) نجد أن:

$$R = mg\cos\psi + m\frac{v^2}{\rho}$$

ولكن: $\rho = \frac{ds}{d\psi} = 4a\cos\psi$

$$\therefore \quad R = mg\cos\psi + m\frac{v^2}{4a\cos\psi} \qquad (4)$$

من المعادلة (3) نجد أن معادلة حركة توافقية بسيطة فيها $\omega = \sqrt{\frac{g}{4a}}$

وحلها العام هو:

$$s = A\cos wt + B\sin wt \qquad (5)$$

وبالتفاضل نحصل على:

$$\therefore \quad \dot{s} = -A\omega\sin wt + B\,\omega\cos\omega t \qquad (6)$$

حيث A, B ثابتان اختياريان ولإيجادهما:

الجسيم بدأ الحركة من السكون عند أحد طرفى السلك (أى عند الناب) حيث $4=90°$

$\therefore\ t = o,\ s = 4a \sin 90 = 4a,\ \dot{s} = o$

فمن (5), (6) نجد أن:

$4a = A \cos o + B \sin o = A(1) + B(o) = A \qquad \therefore \quad \boxed{A = 4a}$

$o = -A\omega \sin o + B\omega \cos o = -A(o) + B\omega(1) = B\omega \ \rightarrow \quad \boxed{B = o}$

وتصبح (5), (6) بالصورة:

$$s = 4a \cos wt = 4a \cos \sqrt{\frac{g}{4a}}t \tag{7}$$

$$\dot{s} = -4\alpha\omega \sin wt = -2\sqrt{ag} \sin \sqrt{\frac{g}{4a}}t = \nu \tag{8}$$

وعندما يصل الجسيم إلى رأس السيكلويد فإن s=o فمن (7) نجد أن:

$$o = 4a \cos \sqrt{\frac{g}{4a}}t \rightarrow \cos \sqrt{\frac{g}{4a}}t = o \rightarrow \sqrt{\frac{g}{4a}}t = \frac{\pi}{2} \rightarrow \quad \boxed{t = \pi\sqrt{\frac{g}{4}}}$$

ومن (8) نجد أن سرعة الجسيم عند الرأس هى:

$$\nu = -2\sqrt{ag}$$

<u>ولإيجاد رد فعل لسلك (أو الضغط على السلك) عند o:</u>

من (4) بوضع ψ=o، $\nu = -2\sqrt{ag}$ $\nu = -2\sqrt{ag}$ نحصل على:

$$R_o = mg \cos o + m\frac{\left(-2\sqrt{ag}\right)^2}{4a \cos o}$$

$$= mg + m\frac{4ag}{4a} = mg + mg = 2mg$$

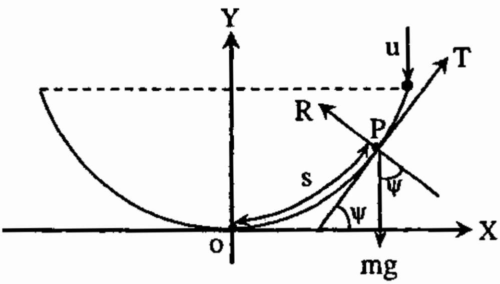
وهو المطلوب.

مثال (3):

ثبت سيكلويد أملس فى مستوى رأسى بحيث كان محوره رأسيا ورأسه إلى أسفل. فإذا قذف جسيم كتلته m بسرعة u من عند ناب السيكلويد لينزلق إلى أسفل. أثبت أن الزمن الذى يأخذه الجسيم لكى يصل إلى رأس السيكلويد هو:

$$t = 2\sqrt{\frac{a}{g}}\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{ag}}{u}\right)$$

الحـــل:



معادلة حركة الجسيم فى اتجاه المماس:

$ma_T = -mg\sin\psi$

$$\therefore\ \ddot{s} = \frac{g}{4a}s = -\omega^2 s \qquad (1)$$

حيث المعادلة الذاتية للسيكلويد هى:

$$\sin\psi\frac{s}{4a} \leftarrow s\ 4a\ \sin\psi$$

الحل العام للمعادلة (1) هو:

$$s = A\cos wt + B\sin wt \qquad (2)$$

وبالتفاضل نحصل على:

$$\dot{s} = -Aw\sin wt + Bw\cos wt \qquad (3)$$

حيث $\omega = \sqrt{\frac{g}{4a}}$، A, B ثابتان.

ولإيجاد الثابتان A, B:

فى البداية: $\dot{s} = -u$ ،s=4a ،t=o

(السرعة الابتدائية فى اتجاه تناقص s)

$$\therefore\quad 4a = A\cos o + B\sin o \longrightarrow \boxed{A = 4a}$$

$$\therefore\quad -u = -A\omega\sin o + B\omega\cos o \longrightarrow \boxed{B = -u/\omega}$$

وتصبح المعادلة (2) بالصورة:

$$s = 4a\cos wt - \frac{u}{w}\sin wt$$

$$= 4a\cos\sqrt{\frac{g}{4a}}t - u\sqrt{\frac{4a}{g}}\sin\sqrt{\frac{g}{4a}}t$$

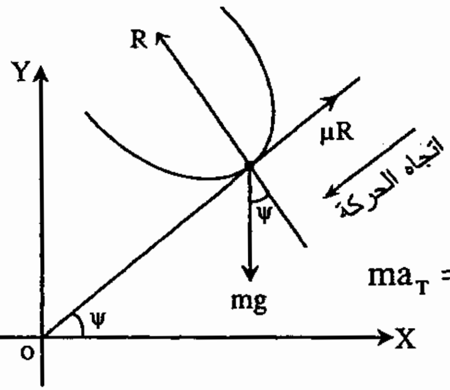
وعندما يصل الجسيم إلى الرأس (حيث s=o) فإننا نحصل على الزمن بالصورة:

$$t = 2\sqrt{\frac{a}{g}}\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{ag}}{u}\right)$$

وهو المطلوب.

ثالثاً: حركة جسيم على منحنى مستو خشن:

إذا تحرك جسيم كتلته m على منحنى مستو خشن وكان معامل الاحتكاك بين الجسيم والمستوى هو μ، وكان رد الفعل العمودى هو R، فإن الاحتكاك النهائى يساوى (μR) ويكون فى الاتجاه المضاد للحركة، وتكون معادلات الحركة كالآتى:



(1) إذا كانت الحركة أسفل المنحنى:

معادلات الحركة فى اتجاه المماس للمنحنى والعمودى عليه هما:

$$ma_T = m\ddot{s} = m\nu\frac{d\nu}{ds} = \mu R - mg\sin\psi \quad (1)$$

$$ma_N = m\frac{\nu^2}{\rho} = R - mg\cos\psi \quad (2)$$

يحذف R بين (1) ،(2) وذلك بضرب (2) فى μ والطرح نحصل على:

$$m\left[\ddot{s} - \mu\frac{\nu^2}{\rho}\right] = mg(\mu\cos\psi - \sin\psi)$$

ولكن:

$$\therefore\ \ddot{s} = \nu\frac{d\nu}{ds} = \frac{1}{2}\frac{d(\nu^2)}{ds}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d(\nu^2)}{d\psi}\cdot\frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{2\rho}\frac{d(\nu^2)}{d\psi} \qquad \Bigg| \qquad \rho = \frac{ds}{d\psi}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2\rho}\frac{d(\nu^2)}{d\psi} - \mu\frac{\nu^2}{2\rho} = g(\mu\cos\psi - \sin\psi)$$

بالضرب فى 2ρ للطرفين:

$$\frac{d(\nu^2)}{d\psi} - 2\mu\nu^2 = 2\rho g(\mu\cos\psi - \sin\psi)$$

وهذه معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية ولكى نحلها نضرب كلا من الطرفين فـى عامل التكامل $e^{-2\mu\psi}$ فنحصل على:

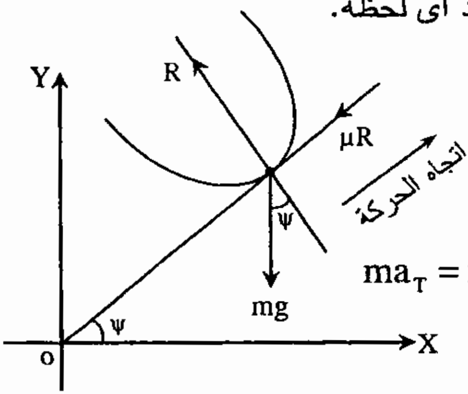
$$e^{-2\mu\psi}\left[\frac{dv^2}{d\psi}-2\mu v^2\right]=2\rho g e^{-2\mu\psi}(\mu\cos\psi-\sin\psi)$$

$$\therefore \quad \frac{d}{d\psi}\left(e^{-2\mu\psi}.v^2\right)=2\rho g e^{-2\mu\psi}(\mu\cos\psi-\sin\psi)$$

وبفصل المتغيرات والتكامل بالنسبة إلى ψ نحصل على:

$$e^{-2\mu\psi}.v^2=2g\int\rho e^{-2\mu\psi}(\mu\cos\psi-\sin\psi)d\psi \qquad (3)$$

فإذا كانت ρ معلومة بدلالة ψ فإنه يمكننا تكامل الطرف الأيمن من هذه المعادلـــة، وبذلك نحصل على (v^2) أى على السرعة عند أى لحظة.



(2) إذا كانت الحركة أعلى المنحنى:

معادلات الحركة فى اتجـــاه الممــــاس للمنحنى والعمودى عليه هى:

$$ma_T=m\ddot{s}=mv\frac{dv}{ds}=-\mu R-mg\sin\psi \quad (4)$$

$$ma_N=m\frac{v^2}{\rho}=R-mg\cos\psi \qquad (5)$$

بحذف R بين (4) ,(5) وذلك بضرب (5) فى μ والجمع نحصل على:

$$\therefore \quad m\left[\ddot{s}+\mu\frac{v^2}{\rho}\right]=-mg(\sin\psi+\mu\cos\psi)$$

ولكن:

$$\ddot{s}=\frac{1}{2\rho}\frac{dv^2}{d\psi}$$

$$\therefore \quad \frac{dv^2}{d\psi}+2\mu v^2=-2\rho g(\sin\psi+\mu\cos\psi)$$

وهى معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية ولكى نحلها نضرب فى عامل التكامل $e^{2\mu\psi}$ فنحصل على:

$$e^{2\mu\psi}\left[\frac{dv^2}{d\psi}+2\mu v^2\right]=-2\rho g e^{2\mu\psi}(\sin\psi+\mu\cos\psi)$$

$$\therefore \qquad \frac{d}{d\psi}\left(e^{2\mu\psi}.v^2\right)=-2\rho g e^{2\mu\psi}(\sin\psi+\mu\cos\psi)$$

وبالتكامل بالنسبة إلى ψ نحصل على:

$$e^{2\mu\psi}.v^2=-2g\int\rho e^{2\mu\psi}(\sin\psi+\mu\cos\psi)d\psi \qquad (6)$$

وبتكامل الطرف الأيمن إذا علمت ρ بدلالة ψ يمكننا إيجاد سرعة الجسيم (v).

<u>ملحوظة (1):</u>

لإجراء التكاملات فى (3) ,(6) نستخدم التكاملين الآتيين:

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}[\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x] \qquad (7)$$

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}[\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x] \qquad (8)$$

<u>ملحوظة (2):</u>

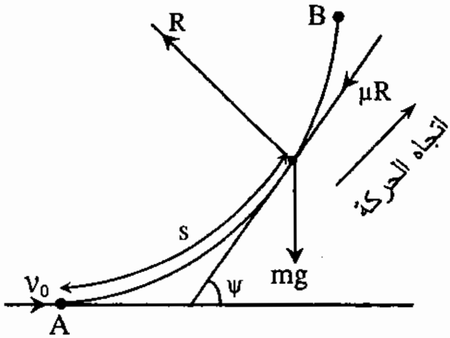
كان من الممكن استنتاج معادلات الحركة إلى اسفل من معادلات الحركة إلى أعلى بوضع $(-\mu)$ بدلا من (μ).

أمثلة محلولة

مثال (1):

يتحرك جسيم على مستوى أفقى أملس مبتدئاً بسرعة v_o ويحرف مساره حائط رأسى خشن معامل احتكاكه μ ومسقطه الأفقى هو المنحنى AB. أثبت أن سرعة الجسيم v تعطى بدلالة زاوية ميل المماس ψ لحركة الجسيم عند أى وضع بالعلاقة: $v = v_o e^{-\mu\psi}$

الحـل:



القوى المؤثرة على الجسيم فى مستوى حركته هـى $R,\ \mu R$ ، أمـا وزن الجسيم ورد فعل المستوى الأفقى فيعملان عموديا على مستوى الحركة فليس لهما تأثير هنا.

معادلات الحركة فى اتجاه المماس والعمودى على المسار هما:

$$ma_T = -\mu R \qquad (1)$$

$$\therefore \quad ma_N = R \qquad (2)$$

من (1) نحصل على:

$$mv\frac{dv}{ds} = -\mu R \qquad (3)$$

ومن (2) نجد أن:

$$m\frac{v^2}{\rho} = R \qquad (4)$$

بحذف R بين (3), (4) نحصل على:

$$v\frac{dv}{ds} = -\mu\frac{v^2}{\rho}$$

ولكن $\rho = \dfrac{ds}{d\psi}$، $\dfrac{dv}{d\psi} - \mu v \leftarrow \dfrac{dv}{ds} = \dfrac{dv}{d\psi}\dfrac{d\psi}{ds} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{dv}{d\psi}$

بفصل المتغيرات وإجراء التكامل نحصل على:

$$\int_{v_o}^{v}\frac{dv}{v} = -\mu\int_{0}^{\psi} d\psi \qquad \therefore \qquad [\ln v]_{v_o}^{v} = -\mu\psi$$

$$\therefore\ \ln - \ln v_o = -\mu\psi$$

$$\therefore\ \ln v = \ln v_o = -\mu\psi \quad \therefore\ \ln\frac{v}{v_o} = -\mu\psi \quad \Big| \quad \ln a = b \quad \therefore\ a = e^{b}$$

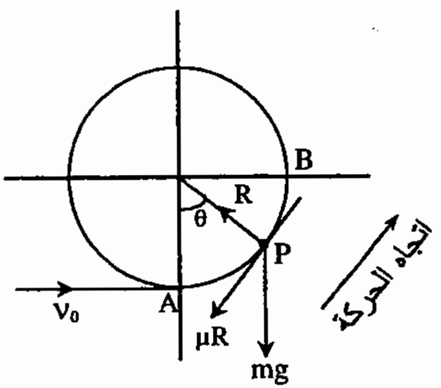
$$\therefore\ \ln\frac{v}{v_o} = e^{-\mu\psi} \longrightarrow v = v_o = e^{-\mu\psi}$$

مثال (2):

يتحرك جسيم على سلك دائرى خشن معامل احتكاكه μ ونصف قطـره a مثبت فى مستوى رأسى. قذف الجسيم فى بدء الحركة من أسفل نقطة من الـسلك بسرعة v_o تكاد تكفى ليصل الجسيم إلى القطر الأفقى للسلك. فإذا عاد الجسيم ثانية إلى أسفل موضع بسرعة v أثبت أن:

$$\frac{v^2}{v_o^2} = \frac{1 - 2\mu^2 - 3\mu e^{-\mu\pi}}{1 - 2\mu^2 + 3\mu e^{\mu\pi}}$$

الحـل:



نستخدم هنا معادلات الحركة للجـسيم فى دائرة وليكن الجسيم عنـد النقطـة $p(a,\theta)$.

دراسة الحركة إلى أعلى من A إلى B:

معادلات الحركة فى اتجـاه المماس والعمودى عليه:

$$ma_T = -\mu R - mg\sin\theta \quad (1)$$
$$ma_N = R - mg\cos\theta \quad (2)$$

ولما كانت مركبات العجلة فى الحركة الدائرية هى: $a\ddot{\theta}$ فى اتجاه المماس $a\dot{\theta}^2$ فى اتجاه نصف القطر

فمن (1) نجد أن:

$$ma\ddot{\theta} = -\mu R - mg\sin\theta \qquad (3)$$

ومن (2) نحصل على:

$$ma\dot{\theta}^2 = R - mg\cos\theta \qquad (4)$$

وبكتابة:

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta}$$

وبحذف R بين (3) ,(4) وذلك بضرب (4) فى μ والجمع نحصل على:

$$a\ddot{\theta} + \mu a\dot{\theta}^2 = -g(\sin\theta + \mu\cos\theta)$$

$$\therefore \quad \frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} + \mu a\dot{\theta}^2 = \frac{-2g}{a}(\sin\theta + \mu\cos\theta)$$

وهذه معادلة تفاضلية ولحلها نستخدم عامل التكامل $e^{2\mu\theta}$ فنحصل على الحل العام بالصورة:

$$e^{2\mu\theta}.\dot{\theta}^2 = \frac{-2g}{a}\int e^{2\mu\theta}(\sin\theta + \mu\cos\theta)d\theta$$

$$= \frac{-2g}{a}\int e^{2\mu\theta}\sin\theta d\theta - \frac{2\mu g}{a}\int e^{2\mu\theta}\cos\theta d\theta \qquad (1)$$

ولكن من التكاملات القياسية:

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2}[\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x]$$

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2}[\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x]$$

نجد أن:

$$\alpha = 2\mu, \quad \beta = 1$$

$$\int e^{2\mu\theta}\sin\theta d\theta = \frac{e^{2\mu\theta}}{4\mu^2 + 1}[2\mu\sin\theta - \cos\theta]$$

$$\int e^{2\mu\theta}\cos\theta d\theta = \frac{e^{2\mu\theta}}{4\mu^2+1}[2\mu\cos\theta+\sin\theta]$$

بالتعويض فى (1) نحصل على:

$$e^{2\mu\theta}.\dot{\theta}^2 = \frac{-2g}{a}\frac{e^{2\mu\theta}}{4\mu^2+1}(2\mu\sin\theta-\cos\theta)$$

$$-\frac{2\mu g}{a}\frac{e^{2\mu\theta}}{4\mu^2+1}(2\mu\sin\theta+\sin\theta)+C \qquad (2)$$

حيث C ثابت التكامل، ولإيجاده:

فى البداية: عند النقطة A: $\theta = o$ ، $\dot{\theta} = \frac{v^2}{a}$

وفى النهاية: عند النقطة B: $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، $\dot{\theta} = o$

وبالتعويض فى المعادلة (2) بالشروط الابتدائية ثم بالشروط النهائية والطرح نتخلص من ثابت التكامل، ونحصل على المعادلة:

$$v_o^2 = \frac{2ag}{4\mu^2+1}(1-2\mu^2+3\mu e^{\mu\pi}) \qquad (3)$$

<u>دراسة الحركة إلى أسفل من B إلى A:</u>

بإتباع الطريقة السابقة، أو بوضع (-μ) بدلا من (μ) فى المعادلة (3) نحصل على السرعة v مباشرة بالصورة:

$$v^2 = \frac{2ag}{4\mu^2+1}(1-2\mu^2-3\mu e^{-\mu\pi}) \qquad (4)$$

بقسمة (4) على (3) نحصل على:

$$\frac{v^2}{v_o^2} = \frac{1-2\mu^2-3\mu e^{-\mu\pi}}{1-2\mu^2+3\mu e^{\mu\pi}}$$

وهو المطلوب.

مسألة:

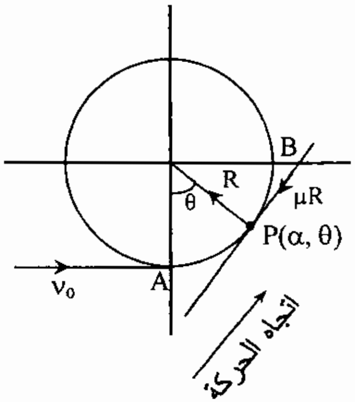
فى مثال (2)، إذا أهملنا تأثير القوى الخارجية (قوة جذب الأرض) فتصبح القوة المؤثرة هى: رد الفعل R ، قوة الاحتكاك μR (عكس اتجاه الحركة).

والمطلوب: (1) إيجاد رد فعل السلك على الجسيم عند أى موضع.

(2) إثبات أن الجسيم يعود إلى نقطة القذف A بعد زمن قدره

$$t = \frac{a}{\mu v_o}(e^{2\mu\pi} - 1).$$

الحل:



معادلات الحركة (مع إهمال الوزن mg) هى:

$$ma_T = ma\ddot{\theta} = -\mu R \qquad (1)$$

$$ma_N = ma\dot{\theta}^2 = R \qquad (2)$$

وبكتابة: $\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta}$

وضرب المعادلة (2) فى μ والجمع مع (1) نحصل على:

$$\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} = -2\mu a\dot{\theta}^2$$

وبفصل المتغيرات:

$$\therefore \quad \frac{d\dot{\theta}^2}{\dot{\theta}^2} = -2\mu d\theta$$

وبإجراء التكامل نحصل على:

$$\ln\dot{\theta}^2 = -2\mu\theta + \text{const.}$$

$$\therefore \quad \dot{\theta}^2 = Ce^{-2\mu\theta}$$

وباستخدام الشروط الابتدائية: عند t=o، θ=o، $\dot{\theta}=\frac{v_o}{a}$ فإن:

$$C=\frac{v_o^2}{v^2}$$

$$\therefore \quad \dot{\theta}^2=\frac{v_o^2}{a^2}e^{-2\mu\theta} \qquad (3)$$

$$\therefore \quad \dot{\theta}=\frac{v_o}{a}e^{-\mu\theta}=\frac{d\theta}{dt} \qquad \therefore \quad \frac{v_o}{a}=e^{\mu\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

وبفصل المتغيرات والتكامل مرة ثانية:

$$\therefore \quad \int e^{\mu\theta}d\theta=\frac{v_o}{a}\int dt$$

$$\therefore \quad \frac{e^{\mu\theta}}{\mu}=\frac{v_o t}{a}+C_1$$

ومن الشروط الابتدائية: عند t=o فإن $\theta=o \leftarrow C_1=\frac{1}{\mu}$

$$\therefore \quad \frac{e^{\mu\theta}}{\mu}=\frac{v_o t}{a}+\frac{1}{\mu} \qquad \therefore \quad \frac{v_o t}{a}=\frac{1}{\mu}(e^{\mu\theta}-1)$$

$$\therefore \quad t=\frac{a}{\mu v_o}(e^{\mu\theta}-1) \qquad (4)$$

ولكن يعود الجسيم إلى نقطة القذف يجب ألا يتلاشى رد الفعل R أثناء الحركة وأن يصنع الجسيم دورة كاملة أى أن θ=2π.

<u>**فلإيجاد R:**</u>

من (2)، (3) نجد أن:

$$R=ma\dot{\theta}^2=ma\left(\frac{v_o^2}{a^2}e^{-2\mu\theta}\right)=m\left(\frac{v_o^2}{a}\right)e^{-2\mu\theta}$$

وهو رد فعل السلك على الجسيم عند أى موضع.

ولإيجاد زمن العودة إلى نقطة القذف:

نضع $\theta=2\pi$ فى (4) فنحصل على:

$$\therefore \qquad t=\frac{a}{\mu v_o}(e^{2\mu\pi}-1)$$

وهو المطلوب.

مثال (3):

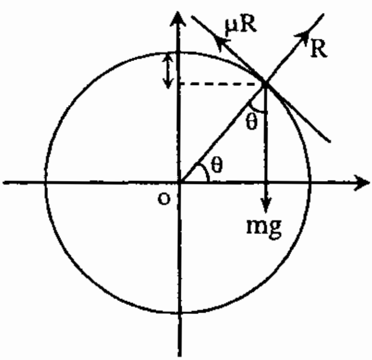
سقط جسيم من وضع الاتزان النهائى بالقرب من أعلى نقطة فى سلك دائرى خشن مستواه رأسى بأن أعطى إزاحة صغيرة مهملة. أثبت أن الجسيم يترك السلك عند نقطة يصنع نصف القطر الواصل إليها مع الرأسى زاوية θ حيث:

$\theta=\alpha+\mu\beta$

$$\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \qquad , \qquad \beta=2-\frac{4}{3}\frac{\alpha}{\sin\alpha}$$

علماً بأن معامل الاحتكاك μ كمية صغيرة جداً يمكن إهمال مربعاتها وقواها الأعلى.

الحـل:



معادلات الحركة:

فى اتجاه المماس (للخارج):

$$ma\ddot{\theta}=mg\sin\theta-\mu R \qquad (1)$$

في اتجاه العمودى (للداخل):

$$ma\dot{\theta}^2=m\frac{v^2}{a}=mg\cos\theta-R \quad (2)$$

وحيث أن العجلة المماسية هى:

$$a_T=a\ddot{\theta}=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{d\theta}{d\theta}.(\dot{\theta})=\frac{dv}{d\theta}\left(\frac{v}{a}\right)=\frac{1}{a}\frac{1}{2}\frac{dv^2}{d\theta}$$

فبالتعويض فى (1):

$$\therefore \quad \frac{m}{2a}\frac{dv^2}{d\theta} = mg\sin\theta - \mu R \qquad (3)$$

وبضرب (2) فى μ والطرح من (3) نحصل على:

$$\frac{m}{2a}\left(\frac{dv^2}{d\theta} = -2\mu v^2\right) = mg(\sin\theta - \mu\cos\theta)$$

$$\left(\frac{dv^2}{d\theta} = -2\mu v^2\right) = 2ag(\sin\theta - \mu\cos\theta)$$

وبالضرب فى عامل التكامل $e^{-2\mu\theta}$ نحصل على:

$$\therefore \quad e^{-2\mu\theta}\left(\frac{dv^2}{d\theta} = -2\mu v^2\right) = 2age^{-2\mu\theta}(\sin\theta - \mu\cos\theta)$$

$$\therefore \quad \frac{d}{d\theta}\left(e^{-2\mu\theta}.v^2\right) = 2age^{-2\mu\theta}(\sin\theta - \mu\cos\theta)$$

وبإجراء التكامل نحصل على:

$$\left[e^{-2\mu\theta}.v^2\right]_o^0 = 2ag\int_o^0 e^{-2\mu\theta}(\sin\theta - \mu\cos\theta)d\theta$$

وباستخدام نتيجتى التكامل القياسيان حيث $\beta=1$, $\alpha=-2\mu$ نحصل على:

$$e^{-2\mu\theta}.v^2 = 2ag\left[\frac{e^{-2\mu\theta}}{4\mu^2+1}(-2\mu\sin\theta - \cos\theta)\right.$$

$$\left. - \frac{\mu e^{-2\mu\theta}}{4\mu^2+1}(-2\mu\cos\theta + \sin\theta)\right]_o^0$$

$$= \frac{2ag}{4\mu^2+1}\left[e^{-2\mu\theta}\left(-2\mu\sin\theta - \cos\theta + 2\mu^2\cos\theta - \mu\sin\theta\right)\right]_o^0$$

وبإهمال مربعات μ نحصل على:

$$e^{-2\mu\theta}.v^2 = 2ag\left[e^{-2\mu\theta}(-3\mu\sin\theta - \cos\theta)\right]_o^0$$
$$= 2ag\left[e^{-2\mu\theta}(-3\mu\sin\theta - \cos\theta)+1\right]_o^0$$
$$= -2age^{-2\mu\theta}(3\mu\sin\theta + \cos\theta) + 2ag$$

وبالضرب فى نحصل على:

$$v^2 = -2ag(3\mu\sin\theta - \cos\theta) + 2age^{2\mu\theta} \qquad (4)$$

عندما يترك الجسيم السلك فإن: R=o فبوضع R=o فى (2) نحصل على:

$$\frac{mv^2}{a} = mg\cos\theta \longrightarrow v^2 = ag\cos\theta \qquad (5)$$

من (4), (5) نجد أن:

$$\cos\theta = -2(3\mu\sin\theta + \cos\theta) + 2e^{2\mu\theta}$$

$$\therefore \quad -6\mu\sin\theta - 3\cos\theta + 2e^{2\mu\theta} = o \qquad (6)$$

وبوضع θ=α+μβ واعتبار أن μβ صغيرة جداً أى أن:

$$\cos\mu\beta \longrightarrow 1,\ \sin\mu\beta \longrightarrow \mu\beta$$

$$\therefore \quad \cos\theta = \cos(\alpha+\mu\beta) = \cos\alpha\cos\mu\beta - \sin\alpha\sin\mu\beta$$
$$= \cos\alpha - \mu\beta\sin\alpha \qquad (7)$$

$$\sin\theta = \sin(\alpha+\mu\beta) = \sin\alpha\cos\mu\beta + \cos\alpha\sin\mu\beta$$
$$= \sin\alpha + \mu\beta\sin\alpha \qquad (8)$$

بالتعويض من (7), (8) فى (6) نحصل على:

$$-6\mu(\sin\alpha + \mu\beta\cos\alpha) - 3(\cos\alpha - \mu\beta\sin\alpha)\ 2e^{2\mu\theta} = 0$$

وباعتبار أن: $e^x = 1 + x + x2 + ... \simeq 1 + x$

(بإهمال مربعات x)

$$\therefore \quad e^{2\mu\theta} = 1 + 2\mu\theta = 1 + 2\mu(\alpha + \mu\beta) = 1 + 2\mu\alpha$$

وحيث أن $\cos\alpha = ⅔$، $\mu^2 \simeq o$ فإن:

$$-6\mu \sin\alpha - 3\cos\alpha + 3\mu\beta \sin\alpha + 2(1 + 2\mu\alpha) = 0$$

$$-6\mu \sin\alpha - 3(⅔) + 3\mu\beta \sin\alpha + 2 + 4\mu\alpha = 0$$

وبالقسمة على μ:

$$-6\sin\alpha + 3\beta\sin\alpha + 4\alpha = 0$$

$$\therefore \quad 3\beta\sin\alpha = 6\sin\alpha - 4\alpha$$

$$\therefore \quad \beta = \frac{6\sin\alpha - 4\alpha}{3\sin\alpha} = 2\frac{4}{3}\frac{\alpha}{\sin\alpha}$$

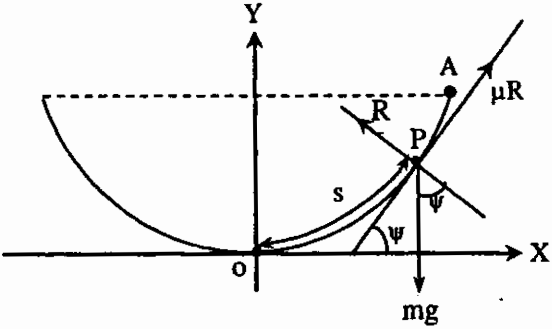
$$\therefore \quad \theta = \alpha + \mu\left(2 - \frac{4}{3}\frac{\alpha}{\sin\alpha}\right)$$

وهو المطلوب.

__مثال (4):__

سلك خشن على هيئة سيكلويد محوره رأسي ورأسه إلى أسفل. تنزلق حلقة صغيرة مبتدئة من السكون عند ناب السيكلويد فوصلت إلى الرأس ساكنة. أثبت أن معامل الاحتكاك بين الحلقة والسلك يعطى بالعلاقة: $\mu^2 e^{\mu\pi} = 1$

__الحل:__



المعادلة الذاتية للسيكلويد:

$$s = 4a\sin\psi$$

نصف قطر الانحناء:

$$\rho = \frac{ds}{d\psi} 4a\cos\psi$$

معادلات الحركة:

فى اتجاه المماس:

$$m\ddot{s} = \mu R - mg\sin\psi \quad (1)$$

فى اتجاه العمودى:

$$m\frac{v^2}{\rho} = R - mg\cos\psi \quad (2)$$

ولكن:
$$m\ddot{s} = v\frac{dv}{ds} = v\frac{dv}{d\psi}\frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{\rho} = \left(\frac{1}{2}\frac{dv^2}{d\psi}\right) = \frac{1}{2\rho}\frac{d(v^2)}{d\psi}$$

بالتعويض فى (1):

$$\therefore \quad \frac{m}{2\rho}\frac{dv^2}{d\psi} = \mu R - mg\sin\psi \qquad (3)$$

بضرب (2) فى μ والطرح مع (3) نحصل على:

$$\frac{m}{2\rho}\left(\frac{dv^2}{d\psi} - 2\mu v^2\right) = mg(\mu\cos\psi - \sin\psi)$$

$$\therefore \quad \frac{dv^2}{d\psi} - 2\mu v^2 = 2\rho g(\mu\cos\psi - \sin\psi)$$

وهى معادلة تفاضلية، لكى نحلها نضرب فى عامل التكامل $e^{-2\mu\psi}$ فنحصل على:

$$e^{-2\mu\psi}\left(\frac{dv^2}{d\psi} - 2\mu v^2\right) = 2\rho e^{-2\mu\psi}(\mu\cos\psi - \sin\psi)$$

وبالتعويض عن $\rho = 4a\cos\psi$

$$\therefore \; e^{-2\mu\psi}\left(\frac{dv^2}{d\psi} - 2\mu v^2\right) = 8age^{-2\mu\psi}(\mu\cos^2\psi - \cos\psi\sin\psi)$$

$$\therefore \; \frac{d}{d\psi}\left(e^{-2\mu\psi} - v^2\right) = 8age^{-2\mu\psi}(\mu\cos^2\psi - \cos\psi\sin\psi)$$

وبإجراء التكامل بالنسبة إلى ψ واعتبار أن:

$\psi=o$ عند الرأس o (حيث v=o، من رأس المسألة)

$\psi=\frac{\pi}{2}$ عند الناب A (حيث v=o، من رأس المسألة)

نحصل على:

$$\left[e^{-2\mu\psi}.v^2\right]_{\pi/2}^{o}=8ag\int_{\pi/2}^{o}e^{-2\mu\psi}[(\mu\frac{1}{2}(1+\cos2\psi)-\frac{1}{2}\sin2\psi]d\psi$$

$$=4ag\int_{\pi/2}^{o}e^{-2\mu\psi}[\mu(1+\cos2\psi)-\sin2\psi]d\psi$$

$$=4ag\mu\int_{\pi/2}^{o}e^{-2\mu\psi}d\psi+4ag\mu\int_{\pi/2}^{o}e^{-2\mu\psi}\cos2\psi d\psi$$

$$=4ag\int_{\pi/2}^{o}e^{-2\mu\psi}\sin\psi d\psi$$

$$=4ag\mu\left[\frac{e^{-2\mu\psi}}{-2\mu}\right]_{\pi/2}^{o}+4ag\mu\left[\frac{e^{-2\mu\psi}}{4\mu^2+4}(-2\mu\cos2\psi+2\sin2\psi)\right]_{\pi/2}^{o}$$

وبالتعويض بحدى التكامل نحصل على:

$$0=4ag\left[-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2\mu\pi}\right]+4ag\mu\left[\frac{-2\mu}{4\mu^2+4}-e^{-2\mu\pi}\left(\frac{2\mu}{4\mu^2+4}\right)\right]$$

$$-4ag\left[\frac{-2}{4\mu^2+4}-e^{-2\mu\pi}\left(\frac{-2}{4\mu^2+4}\right)\right]$$

$$=\left[-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-\mu\pi}\right]-\left[\frac{2}{4\mu^2+\psi}+e^{-\mu\pi}\left(\frac{2\mu^2}{4\mu^2+4}\right)\right]$$

$$+\left[\frac{2}{4\mu^2+4}+e^{-\mu\pi}\left(\frac{2}{4\mu^2+4}\right)\right]$$

$$=\left[-\frac{1}{2}-\frac{2\mu^2}{4\mu^2+4}+\frac{2}{4\mu^2+4}\right]-e^{-\mu\pi}\left[-\frac{1}{2}+\frac{2\mu^2}{4\mu^2+4}-\frac{2}{4\mu^2+4}\right]$$

وبالضرب فى $(\psi\mu^2+\psi)$ نحصل على:

$$[-2\mu^2-2-2\mu^2+2]=e^{-\mu\pi}\,[-2\mu^2-2+2\mu^2-2]$$

$$\therefore \quad -4\mu^2=e^{-\mu\pi}\,(-4)$$

$$\therefore \quad \mu^2=e^{-\mu\pi} \longrightarrow \mu^2.e^{\mu\pi}=1$$

وهو المطلوب.

مسائل على الحركة المقيدة

1. أنبوبة رفيعة سطحها أملس على شكل قطع مكافئ معادلته $y=2a\,x^2$ موضوعة فى مستوى رأسى. قذف جسيم كتلته m من عند رأس القطع بسرعة ابتدائية v_o وواصل سيره داخل الأنبوبة فإذا كان R هو رد الفعل العمودى لسطح الأنبوبة على الجسيم، وكانت ρ هى نصف قطر الانحناء (أو التقوس) للسطح فاثبت أن $\rho R=\lambda$ حيث (λ) ثابت مقداره $\lambda=m\left(v_o^2+\frac{g}{4a}\right)$.

2. يتحرك جسيم على سلك منحنى أملس رأسى معادلته $y=a\sin\frac{2\pi}{b}x$ حيث: a,b ثوابت، ما هى السرعة القصوى المسموح بها حتى لا يغادر الجسيم المنحنى عند أعلى نقطة فيه (A)، وإذا تحرك الجسيم بهذه السرعة القصوى ما هو رد فعل السلك عند أسفل نقطة فى المنحنى (B).

3. يتحرك جسيم كتلته m على منحنى بحيث كانت العلاقة بين المسافة القوسية s والسرعة هى $s=\frac{1}{2}\ln\frac{1+g^2}{1+v^2}$، فإذا علم أن الجسيم بدأ الحركة بسرعة v عندما كانت s=o، أوجد القوة المماسية التى تؤثر على الجسيم والزمن الذى يمضى حتى تصبح السرعة $v=1$.

4. أنبوبة رفيعة مثبتة فى مستوى رأسى على شكل قطع مكافئ معادلته $x^2=4y$ فإذا بدأ جسيم كتلته m الانزلاق من السكون داخل الأنبوبة من نقطة على ارتفاع h من رأس القطع وكانت ρ نصف قطر الانحناء فاثبت أن رد فعل الأنبوبة على الجسيم يساوى $\frac{2mg}{\rho}(h+1)$.

5. تنزلق حلقة كتلتها m على سلك أملس على شكل منحنى السلسلة (الكتينة) $s=c\tan\psi$ مثبت فى مستوى رأسى بحيث يكون رأس الكتينة إلى أعلى ومحورها رأسى إلى أسفل. فإذا بدأت الحلقة حركتها من الرأس بسرعة $\sqrt{2gc}$، أثبت أن الضغط الواقع على الحلقة عند أى موضع هو $mg\cos\psi$.

6. سلك أملس على شكل سيكلويد $s=4a\sin\psi$ مثبت فى مستوى رأسى بحيث كان محوره رأسى ورأسه إلى أعلى. إذا ابتدأ جسيم كتلته m الحركة من السكون من عند الرأس، أثبت أن الجسيم سوف يترك السلك عند نقطة عندها تكون الزاوية $\psi=\frac{\pi}{4}$، وأوجد مقدار سرعة الجسيم عندئذ.

7. ابتدأ جسيم الحركة من حالة السكون من موضع A على قوس من منحنى سيكلويد محوره رأسى ورأسه إلى أسفل. أثبت أن زمن هبوط الجسيم من A إلى الرأس هو $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$، وإذا قذف الجسيم من النقطة A بالسرعة التى يصل بها إلى الرأس فاثبت أنه يصل إلى الرأس فى زمن قدره $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}$.

8. ينزلق جسيم على سلك أملس على شكل سيكلويد محوره رأسى ورأسه إلى أعلى. فإذا قذف جسيم كتلته m بسرعة مقدارها $v_o \frac{3}{2}\sqrt{ag}$ من الرأسى (أعلى نقطة فى السلك)، فأثبت أنه يصل إلى الناب بعد زمن قدره $2\sqrt{ag}\ln 3$ وأوجد سرعته عندئذ.

9. أنبوبة ملساء على شكل سيكلويد محوره رأسى ورأسه لأسفل ومفتوح عند الطرفين (النابين)، فإذا قذف جسيم كتلته m من أسفل نقطة على الجدار الداخلى للأنبوبة بسرعة أفقية u، فإذا كانت $u^2>4ag$ فاثبت أن الجسيم سوف يعود إلى الرأس ثانية بعد زمن قدره:

$$4\sqrt{\frac{a}{g}}\left[\sin^{-1}\frac{\sqrt{4ag}}{u}+\sqrt{\frac{u^2}{4ag}-1}\right]$$

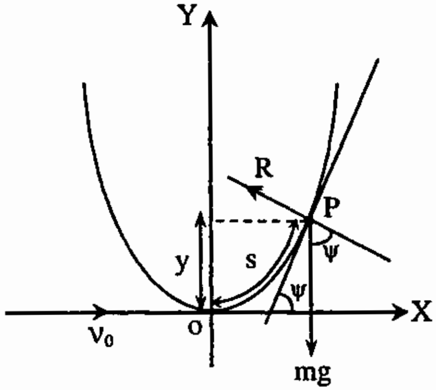
10. ينزلق جسيم على سلك خشن على شكل سيكلويد موضوع فى مستوى رأسى ورأسه إلى أسفل، فإذ بدأ الجسيم بسرعة u من عند الرأس وكانت هذه السرعة تكفى لوصول الجسيم إلى الناب، فاثبت أن معامل الاحتكاك μ يحقق المعادلة:

$$e^{u\pi}=\mu^2+\frac{u^2}{4ag}\left(1+\mu^2\right)$$

حلول المسائل على الحركة المقيدة المستوية

مسألة (1):

معادلات الحركة:



فى اتجاه العمودى:

$$ma_N = m\frac{v^2}{\rho} = R = mg\cos\psi$$

ومنها

$$R = mg\cos\psi + m\frac{v^2}{\rho}$$

$$\therefore\ \rho R = mg\rho\cos\psi + mv^2 \quad (1)$$

ولإيجاد السرعة عند أى موضع:

من قانون الطاقة فى المسافة من O إلى P نجد أن:

$$\frac{1}{2}mav^2 - \frac{1}{2}v_o^2 = -mgy$$

ومنها نحصل على:

$$v^2 = v_o^2 - 2gy \quad (2)$$

ولتعيين نصف قطر التقوس ρ:

$$\rho = \frac{(1+y^{`2})^{3/2}}{y^{``}}$$

$$y = 2ax^2,\ y^` = 4ax = \tan\psi,\ y^{``} = 4a$$

$$\therefore\ \rho = \frac{(1+16a^2x^2)^{3/2}}{4a} \quad (3)$$

$$y^` = \frac{dy}{dx} = \tan\psi = 4ax,$$

$$\cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1+16a^2x^2}}$$

بالتعويض من (2) ,(3) فى (1):

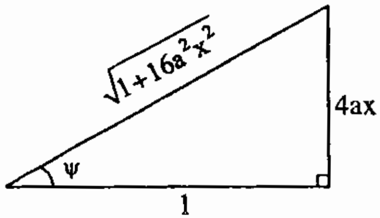
$$\therefore\ \rho R = mg\left[\frac{(1+16a^2x^2)^{3/2}}{4a}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{1+16a^2x^2}}\right] + m\left(v_o^2 - 2g.2ax^2\right)$$

$$= \frac{mg}{4a}\left[(1+16a^2x^2)^{3/2}\right] + mv_o^2 - 2mgax^2$$

$$= \frac{mg}{4a} + 4mgax^2 + mv_o^2 - 4mgax^2 = \frac{mg}{4a} + mv_o^2$$

$$= m\left(v_o^2 + \frac{g}{4a}\right) = \text{const.} = \lambda$$

وهو المطلوب.



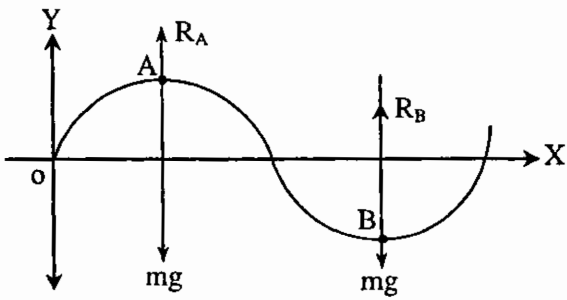
ملحوظة:

استخدمنا العلاقة $\sin\psi = \frac{dy}{dx}$،

العلاقة $\tan\psi = \frac{dy}{dx} = y'$

$$\tan\psi = 4ax$$

$$\cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1+16a^2x^2}}$$



مسألة (2):

معادلات الحركة عند أعلى نقطة A:

$$ma_N = mg - R_A = m\frac{v_A^2}{\rho_A}$$

ومنها نحصل على:

$$R_A = mg - m\frac{v_A^2}{\rho_A} = m\left(g - \frac{v_A^2}{\rho_A}\right) \qquad (1)$$

لكى لا يغادر الجسيم المنحنى عند هذه النقطة يجب أن يكون $R_A \geq o$

$$\therefore \quad m\left(g - \frac{v_A^2}{\rho_A}\right) \geq o \rightarrow v_A \leq \sqrt{g\rho_A} \rightarrow (v_A)_{max} = \sqrt{g\rho_A} \qquad (2)$$

وهى السرعة القصوى المسموح بها حتى لا يغادر الجسيم المنحنى عند النقطة A.

نصف قطر التقوس :

$$y = a\sin\frac{2\pi}{b}x \qquad , \qquad y_A = a$$

$$y` = \frac{2\pi a}{b}\cos\frac{2\pi}{b}x \qquad , \qquad y`_A = o$$

$$y`` = \frac{4\pi^2 a}{b^2}\sin\frac{2\pi}{b}x \qquad , \qquad \ddot{y_A} = \frac{-4\pi^2 a}{b^2}$$

$$\rho = -\frac{\left(1+y^{12}\right)^{3/2}}{y``} \longrightarrow \rho_A = \frac{b^2}{4\pi^2 a}$$

$$\therefore \quad (v_A)_{max} = \sqrt{g\rho_A} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{a}}$$

معادلات الحركة عند أسفل نقطة B:

$$ma_N = R_B - mg = \frac{v_B^2}{\rho_B}$$

ومنها:

$$R_B = mg + m = \frac{v_B^2}{\rho_B} \qquad (3)$$

حيث: $\rho_B = \rho_A$ ، $v_A = (v_A)_{max}$

بالتعويض فى (3):

$$\therefore \quad R_B = mg + m\frac{(g\rho_A)}{\rho_A} = mg + mg = 2mg$$

وهو رد فعل السلك عند النقطة B وهو المطلوب.

مسألة (3):

حيث أن $s = \frac{1}{2}\ln\frac{1+g^2}{1+v^2}$

$$\therefore \quad 2s = \ln\frac{1+g^2}{1+v^2} \qquad \therefore \quad -2s = \ln\frac{1+v^2}{1+g^2}$$

$$\therefore \quad e^{-2s} = \ln\frac{1+v^2}{1+g^2} \qquad \therefore \quad 1+v^2 = (1+g^2)e^{-2s} \qquad (1)$$

$$\therefore \quad v^2 = e^{-2s}(1+g^2) - 1 \qquad (2)$$

وهى سرعة الجسيم عند أى موضع.

<u>معادلة الحركة المماسية:</u>

$$F_T = ma_T = mv\frac{dv}{ds} \qquad (3)$$

ومن (2):

$$v\frac{dv}{ds} = -2e^{-2s}(1+g^2) = -2(1+v^2) \qquad (4)$$

وتصبح القوة المماسية:

$$F_T = -2m(1+v^2) \qquad (5)$$

عندما $v=1$ فإن القوة المماسية تكون:

$$F_T = -4m \qquad (6)$$

والإشارة السالبة تدل على أن اتجاه القوة فى اتجاه تناقص البعد القوسى s.

<u>ولإيجاد الزمن الذى يمضى حتى تصبح السرعة $v=1$:</u>

من العلاقة (4):

$$a_T = -2(1+v^2) = \frac{dv}{dt}$$

وبفصل المتغيرات والتكامل فإن:

$$\int\frac{d}{1+v^2} = -2\int dt$$

$$\therefore \quad \tan^{-1} v = -2t + C \qquad (7)$$

<u>ولإيجاد C:</u>

من الشروط الابتدائية: $t = o$، $s=o$، $v=v_o$

$$\therefore \quad C = \tan^{-1} v_o$$

ومن (2) نجد أن:

$$v_o^2 = e^o(1+g^2) - 1 = (1+g^2) - 1 = g^2 \longrightarrow v_o = g$$

$$\therefore \quad C = \tan^{-1} g$$

بالتعويض فى (7):

$$\tan^{-1} v = -2t + \tan^{-1} g$$

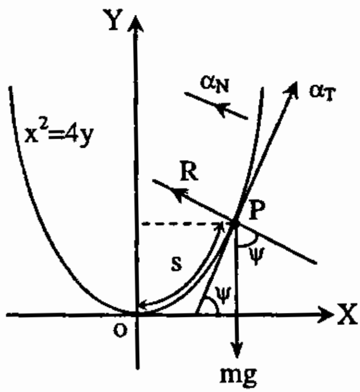
$$\therefore \quad 2t = \tan^{-1} g - \tan^{-1} v \longrightarrow t = ½(\tan^{-1} g - \tan^{-1} v)$$

عندما $v=1$ فإن $\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$:

$$\therefore \quad t = ½(\tan^{-1} g - \frac{\pi}{4}) \qquad (8)$$

وهو الزمن المطلوب.

<u>مسألة (4):</u>



معادلات حركة الجسيم فـى اتجـاه المماس والعمودى عليه

$$a_T = mv\frac{dv}{ds} = -mg\sin\psi \quad (1)$$

$$a_N = m\frac{v^2}{\rho} = -mg\cos\psi \quad (2)$$

وباستخدام العلاقة $\sin\psi = \frac{dv}{ds}$، فمن (1):

$$v\frac{dv}{ds} = -g\frac{dy}{ds} \longrightarrow vdv = -gdy$$

وبالتكامل نحصل على: $v^2 = -2gy + C$

ولإيجاد C:

عند $t=o$ فإن $v_o=o$ ، $C = 2gh \rightarrow y = h$

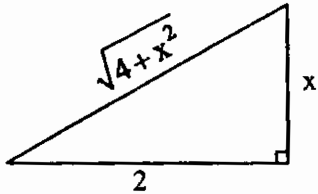
$$\therefore \quad v^2 = -2gy + 2gh = 2g(h-y) \qquad (3)$$

وحيث أن:

$$y` = \frac{x}{2} \leftarrow y = \frac{x^2}{4} \quad , \quad y` = \frac{dy}{dx} = \tan\psi$$

$$\therefore \quad \tan\psi = \frac{x}{2} \rightarrow \cos\psi = \frac{2}{\sqrt{4+x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{1+y}} \qquad (4)$$



نصف قطر التقوس أو الانحناء ρ:

$$\rho = \frac{\left(1+y^{12}\right)^{3/2}}{y``} = \frac{\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{3/2}}{½} = 2(1+y)^{3/2}$$

$$\therefore \quad \frac{\rho}{2} = (1+y)^{3/2} \rightarrow \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2/3} = 1+y \rightarrow y = 1-\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2/3} \qquad (5)$$

وبالتعويض فى (4)

$$\therefore \quad \cos\psi = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2/3}}} = \left(\frac{\rho}{2}\right)^{-1/3} \qquad (6)$$

ولإيجاد رد فعل المنحنى عند أى موضع:

بالتعويض من (3) ,(6) فى (2) نحصل على:

$$R = \frac{mv^2}{\rho} + mg\cos\psi = \frac{m}{\rho}[2g(h-y)] + mg\left(\frac{\rho}{2}\right)^{-1/3} \qquad (7)$$

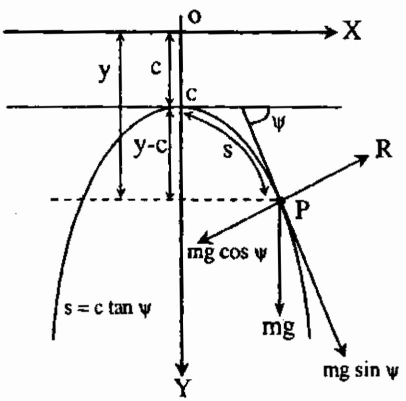
ولكن:

$$\left(\frac{\rho}{2}\right)^{-1/3}=\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2/3}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{-1}=\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2/3}\left(\frac{2}{\rho}\right)=\frac{2}{\rho}(1+y)$$

فبالتعويض فى (7) نحصل على:

$$\therefore\quad R=mg\left[\frac{2}{\rho}(h-y)+\frac{2}{\rho}(1+y)\right]=\frac{2mg}{\rho}(h+1)$$

وهو المطلوب.



__مسألة (5):__

__معادلات الحركة:__

فى اتجاه المماس:

$$mv\frac{dv}{ds}=-mg\sin\psi \qquad (1)$$

فى اتجاه العمودى:

$$m\frac{v^2}{\rho}=mg\cos\psi-R \qquad (2)$$

نصف قطر الانحناء (أو التقوس) للمنحنى:

$$\rho=\frac{d\rho}{d\psi}=\frac{d}{d\psi}(c\tan\psi)=c\sec^2\psi \qquad (3)$$

__ولإيجاد رد فعل المنحنى (R):__

من (2):

$$R=mg\cos\psi-m\frac{v^2}{\rho} \qquad (4)$$

__ولإيجاد v^2:__ نستخدم معادلة الطاقة:

حيث أن السرعة الابتدائية عند الرأس (C) $=\sqrt{2gc}$

والسرعة عند أى موضع $v=(p)$ فإن معادلة الطاقة تعطى:

$$\therefore \quad \tfrac{1}{2}m\,v^2 - \tfrac{1}{2}m\left(\sqrt{2gc}\right)^2 = mg(y-c)$$

$$\therefore \quad v^2 - 2gc = 2g(y-c) = 2gy - 2gc$$

$$\therefore \quad v^2 = 2gy - 2gc + 2gc = 2gy \qquad (5)$$

وحيث أن:

$$\frac{dy}{ds} = \sin\psi$$

$$\therefore \quad dy = ds \sin\psi = c \sec^2\psi .\sin\psi \, d\psi = c \sec\psi \tan\psi \, d\psi$$

[$ds = c\sec^2\psi d\psi \leftarrow s = c\tan\psi$ من معادلة المنحنى]

وبالتكامل نحصل على y بالصورة الآتية:

$$y = c\sec\psi + \text{const.}$$

$D(\sec x) = \sec x \tan x$

$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x$

ومن الشروط الابتدائية: عند $t=o$, $s=o$, $(\psi=o)$, $y=c$ فإن:

$$c = c\sec o + \text{const.} = c + \text{const.} \longrightarrow \text{const} = o$$

$$\therefore \quad y = c\sec\psi$$

وتصبح (5) بالصورة:

$$v^2 = 2gc\sec\psi \qquad (6)$$

بالتعويض من (3), (6) فى (4) نحصل على:

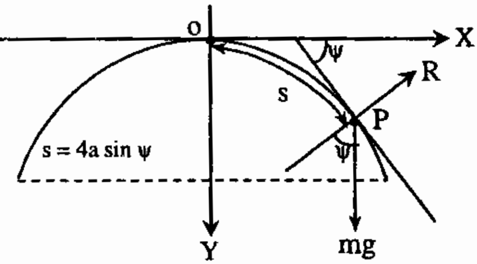
$$R = mg\cos\psi - \frac{m(2gc\sec\psi)}{c\sec^2\psi} = mg\cos\psi - \frac{2mg}{\sec\psi}$$

$$= mg\cos\psi - 2mg\cos\psi = -mg\cos\psi \qquad (7)$$

وهو رد الفعل المطلوب، وتفيد إشارة (–) إلى أن اتجاه رد الفعل مضاد للاتجاه المفروض فى الشكل.

مسألة (6):

معادلات الحركة في اتجاه المماس والعمودي:



$$m\ddot{s} = mg\sin\psi \qquad (1)$$

$$m\frac{v^2}{\rho} = mg\cos\psi - R \qquad (2)$$

من (2):

$$R = mg\cos\psi - m\frac{v^2}{\rho} \qquad (3)$$

نصف قطر الانحناء:

$$\rho = \frac{ds}{d\psi} = 4a\cos\psi \qquad (4)$$

ولإيجاد v^2: توجد طريقتين:

الطريقة الأولى: من المعادلة (1) بوضع:

$$\ddot{s} = v\frac{dv}{ds} = v\frac{dv}{d\psi}.\frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{\rho}\frac{dv^2}{d\psi}$$

واستخدام (4) نحصل على:

$$\frac{1}{\rho}\frac{dv^2}{d\psi} = g\ \sin\psi \longrightarrow dv^2 = 2\rho g\ \sin\psi d\psi = 8ag\ \sin\psi\ \cos\psi d\psi$$

وبالتكامل نحصل على:

$$v^2 = 4ag\ \sin^2\psi + C$$

ولإيجاد C:

من الشروط الابتدائية للحركة: $t=o$، $v=o$، $\psi=o \rightarrow C=o$

$$\therefore\ v^2 = 4ag\ \sin^2\psi \qquad (5)$$

الطريقة الثانية:

بتطبيق قانون الطاقة من الوضع الابتدائى O حتى الوضع العام p

$\therefore \frac{1}{2}v^2 - o = mgy \qquad \Big| \ \rho^2 = 8ay$

$$\therefore v^2 = 2gy = 2g\left(\frac{\rho^2}{8a}\right) = \frac{g}{4a}(4a\sin\psi)^2 = 4ag\sin^2\psi \qquad (5)$$

بالتعويض من (4) ,(5) فى (3) نحصل على:

$$R = mg\cos\psi - m\,\frac{4ag\sin^2\psi}{4a\cos\psi}$$

$$= mg\cos\psi - mg\,\frac{\sin^2\psi}{\cos\psi} = mg\cos\psi\left[1-\frac{\sin^2\psi}{\cos^2\psi}\right]$$

$$= mg\cos\psi\,[1-\tan^2\psi]$$

لكى يترك الجسيم المسار يجب أن تكون R=O

$$\therefore \ o = mg\cos\psi\,[1-\tan^2\psi]$$

$$\therefore \ \cos\psi\,[1-\tan^2\psi] = o$$

$$\therefore \ \cos\psi = \tan^2\psi\cos\psi$$

$$\therefore \ \tan^2\psi = 1 \longrightarrow \tan\psi = 1 \longrightarrow \psi = \frac{\pi}{4}$$

أى أن الجسيم سوف يترك السلك عند نقطة يصنع المماس عندها زاوية $\psi = \frac{\pi}{4}$ مع الأفقى.

ولإيجاد سرعة الجسيم عندئذ:

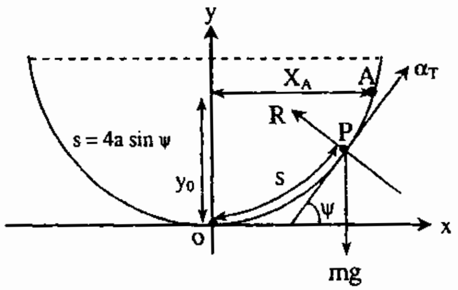
من (5):

$$v^2 = 4ag\sin^2\psi = 4ag\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^2 = 4ag\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2ag \to v = \sqrt{2ag}$$

وهو المطلوب.

مسألة (7):

الحالة الأولى:



الجسيم ابتدأ الحركة من الـ سكون مـ ن الموضـ ع A علـ ى قـ وس السيكلويد:

معادلة الحركة فى اتجاه المماس:

$$ma_T = -mg\sin\psi$$

$$\therefore \quad \ddot{s} = -g\sin\psi = \frac{-g}{4a}s = -ws^2$$

وهى معادلة حركة توافقية بسيطة مركزها s=o، حيث $w = \sqrt{\frac{g}{4a}}$،

وسعتها d يمكن حسابها بمعلومية سرعة الجسيم عند نقطة البدايـ ة $A = (s_o, \psi_o)$

ومن العلاقة بين السرعة والموضع والسعة (d) فى الحركـ ة التوافقيـ ة البـ سيطة:

$$v^2 = w^2(d^2 - s^2)$$

ولكن عند A فإن:

$$\therefore d = s_o \longleftarrow s_A = s_o,\ v_A = o$$

وزمن الحركة:

$$t_{AO} = \frac{\theta_{AO}}{w} = \frac{\pi/2}{\sqrt{g/4a}} = \pi\sqrt{\frac{g}{4a}}$$

وسرعة الجسيم عند الرأس O نحصل عليها من معادلة الطاقة وصورتها:

$$\frac{1}{2}mv_o^2 - o = mgy_o \rightarrow v_o^2 = 2gy_o = 2g\left(\frac{s_o^2}{8a}\right) = \frac{g}{4a}s_o^2$$

$$\therefore \quad v_o = \frac{s_o}{2}\sqrt{\frac{g}{4a}}$$

الحالة الثانية:

إذا قذف الجسيم من النقطة A بالسرعة v_0 فلحساب زمن وصوله إلى O فمن العلاقة بين السرعة والموضع والسعة $(d`)$ نجد أن:

$$v^2 = w^2(d`^2 - s^2)$$

فى البداية: $v_A = v_0$ ، $s_A = s_0$

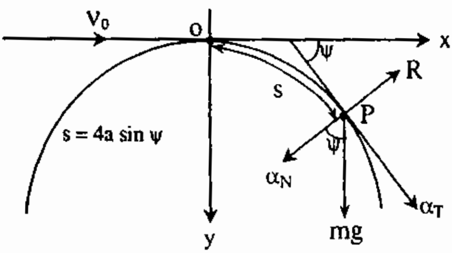
$$\therefore \quad \left(\frac{s_o}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}\right)^2 (d`^2 - s_o^2) \rightarrow d` = s_o\sqrt{2}$$

ويكون الزمن المطلوب:

$$t`_{AO} = \frac{\theta`_{AO}}{w} = \frac{\pi/4}{\sqrt{g/4a}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{g}{4a}}$$

وهو المطلوب.

مسألة (8):



معادلات الحركة:

$$m\ddot{s} = mg\sin\psi \qquad (1)$$

$$m\frac{v^2}{\rho} = mg\cos\psi - R \qquad (2)$$

من المعادلة (1) واعتبار أن: $\sin\psi = \frac{s}{4a}$ نحصل على:

$$\therefore \quad \ddot{s} = \frac{g}{4a}s = w^2 s \qquad (3)$$

وهى معادلة تفاضلية متجانسة من الرتبة الثانية حلها العام هو:

$$s = A\cosh wt + B\sinh wt \qquad (4)$$

ولإيجاد A, B:

من الشروط الابتدائية للحركة:

$$t = o, s = o, \dot{s} = v_o = \frac{3}{2}\sqrt{ag}$$

ومن (4) بالتفاضل بالنسبة للزمن:

$$\dot{s} = v = Aw \sinh wt + B\, w \cosh wt \qquad (5)$$

بالتعويض فى (4) ,(5) بالشروط الابتدائية نحصل على:

من (4) نجد أن: A=o،   ومن (5) نجد أن: B=3a

وبالتالى نحصل على:

$$s = 3a \sinh wt = 3a \sinh \sqrt{\frac{g}{4a}}t \qquad (6)$$

$$\dot{s} = v = 3a\, w \cosh wt = 3a\sqrt{\frac{g}{4a}} \cosh\sqrt{\frac{g}{4a}}t \qquad (7)$$

وعندما يصل الجسيم إلى الناب يكون s=4a

ويصبح الزمن اللازم للوصول إلى الناب هو [من (6)]

$$4a = 3a \sinh \sqrt{\frac{g}{4a}}t$$

$$\therefore \qquad \frac{4}{3}\sinh\sqrt{\frac{g}{4a}}t$$

$$\therefore \qquad t = \sqrt{\frac{4a}{g}}\sinh^{-1}\frac{4}{3} = 2\sqrt{\frac{a}{g}}\sinh^{-1}\frac{4}{3}$$

ولكن:

$$\sinh^{-1} x = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right|$$

$$\therefore \qquad \sinh^{-1}\frac{4}{3} = \ln\left[\frac{4}{3} + \sqrt{\frac{16}{9}+1}\right] = \ln\left[\frac{4}{3} + \sqrt{\frac{25}{9}}\right]$$

$$= \ln\left[\frac{4}{3} + \frac{5}{3}\right] = \ln\frac{9}{3} = \ln 3$$

$$\therefore \qquad \boxed{t = 2\sqrt{\frac{a}{g}}\ln 3} \qquad (8)$$

وهو المطلوب.

ولإيجاد سرعة الوصول الى الناب:

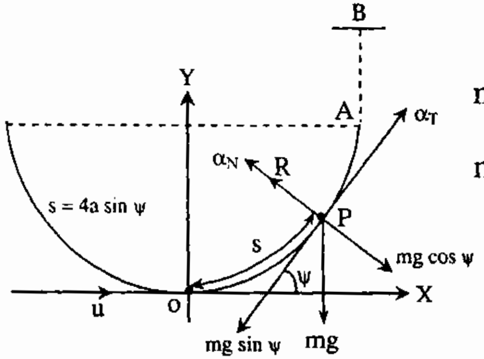
نعوض عن t من (8) فى المعادلة (7) فنحصل على:

$$v = 3a\sqrt{\frac{g}{4a}}\cosh\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}\right]\left[2\sqrt{\frac{a}{g}}\ln 3\right]$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{ag}\cosh[\ln 3]$$

وهو المطلوب

مسألة (9):



معادلتا الحركة:

$$m\ddot{s} = -mg\sin\psi \qquad (1)$$

$$m\frac{v^2}{\rho} = -mg\cos\psi + R \qquad (2)$$

من المعادلة (1) بالتعويض عن:

$$\sin\psi = \frac{s}{4a}$$

(من المعادلة الذاتية للسيكلويد)

$$\therefore \qquad \ddot{s} = \frac{g}{4a}s = -w^2 s \qquad (3) \qquad , \qquad w = \frac{g}{4a}$$

المعادلة (3) هى معادلة تفاضلية متجانسة من الرتبة الثانية وفى نفس الوقت هـ ى معادلة حركة توافقية بسيطة، ولكى نوجد حلها هناك طريقتين:

الطريقة الأولى: الحل العام (كمعادلة تفاضلية) هو:

$$s = A\cos wt + B\sin wt \qquad (4)$$

وبالتفاضل بالنسبة للزمن:

$$\dot{s} = v = Aw \sin wt + wB \cos wt \qquad (5)$$

ولإيجاد الثوابت A, B:

من الشروط الابتدائية: t=o، s=o، $\dot{s} = u$

فمن المعادلة (4) نجد أن: A=o

ومن المعادلة (5) نجد أن: $B = \frac{u}{w}$

وبالتالى نجد فإن:

$$s = \frac{u}{w}\sin wt = u\sqrt{\frac{4a}{g}}\sin\sqrt{\frac{4a}{g}}t \qquad (6)$$

$$\dot{s} = v = u \cos wt = u \cos\sqrt{\frac{4a}{g}}t \qquad (7)$$

ويكون الزمن اللازم لوصول الجسيم إلى فوهة الأنبوبة (إلى نقطة A) هو [من (6)]:

$$t_{OA} = 2\sqrt{\frac{a}{g}}\sin^{-1}\left[\frac{\sqrt{4ag}}{u}\right] = 2\sqrt{\frac{a}{g}}\sin^{-1}\left[\frac{2}{u}\sqrt{4ag}\right] \qquad (8)$$

بعد خروج الجسيم من فتحة الأنبوبة (A) يتحرك رأسياً لأعلى فى خط مستقيم (تحت تأثير الجاذبية) حتى يصل إلى (B) ثم يتوقف ليعود ويدخل داخل الأنبوبة (حركة مستقيمة من B إلى A)، ويصل إلى رأس المنحنى (O) مرة ثانية:

الحركة من B إلى A: من قوانين الحركة فى خط مستقيم.

$$v_B = v_A - gt_{AB}$$

حيث $v_B=o$، v_A هى السرعة التى يخرج بها الجسيم من فوهة الأنبوبة

$$\therefore \quad o = v_A - gt_{AB}$$

$$\therefore \quad t_{AB} = \frac{v_A}{g} = \frac{\sqrt{u^2 - 4ag}}{g} \qquad (9)$$

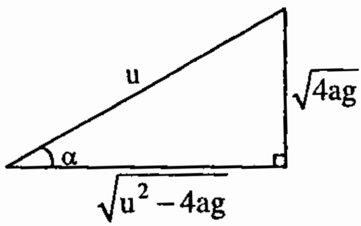
وهو الزمن الذى تحرك فيه الجسيم فى خط مستقيم من B إلى A.

وهو الزمن الذى تحرك فيه الجسيم فى خط مستقيم من B إلى A.

<u>توضيح</u>: حيث أن:

$$V_A = u\cos wt_{OA}$$

$$= u\cos\left[\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{4ag}}{u}\right)\right] = u\cos\alpha$$



وبفرض أن:

$$\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{4ag}}{u}\right) = \alpha$$

$$\therefore\ v_A = \sqrt{u^2-4ag} \qquad (10) \qquad \cos\alpha = \frac{\sqrt{u^2-4ag}}{u}$$

وهى سرعة وصول الجسيم إلى A

ومع ملاحظة أن $t_{BA}=t_{AB}$ ،$t_{AO}=t_{OA}$ فإن زمن الحركة الكلى لكى يعود الجسيم إلى رأس السيكلويد O هو:

$$t = t_{OA} + t_{AB} + t_{BA} + t_{AO} = 2(t_{OA} + t_{AB}) \qquad (11)$$

بالتعويض من (8), (9) فى (11) نحصل على:

$$\therefore \quad t = 2\left[\sqrt{\frac{a}{g}}\sin^{-1}\left(\frac{2}{u}\sqrt{ag}\right) + \frac{\sqrt{u^2-4ag}}{g}\right]$$

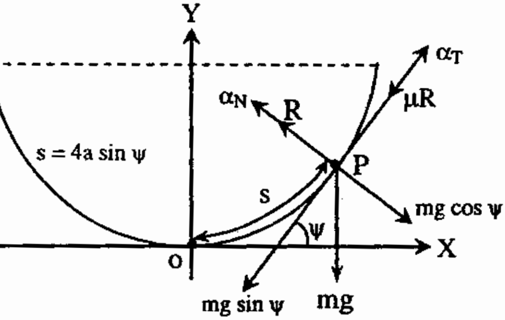
$$= 4\sqrt{\frac{a}{g}}\left[\sin^{-1}\left(\frac{2}{u}\sqrt{ag}\right) + \sqrt{\frac{u^2}{4ag}-1}\right]$$

$$= 4\sqrt{\frac{a}{g}}\left[\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{4ag}}{u}\right) + \sqrt{\frac{u^2}{4ag}-1}\right]$$

وهو المطلوب.

<u>مسألة (10):</u>

معادلات الحركة فى اتجاهى المماس والعمودى هما:



$$ma_T = -mg\sin\psi - \mu R \quad (1)$$
$$ma_N = R - mg\cos\psi \quad (2)$$

ولكن:
$$a_T = \ddot{s} = v\frac{dv}{ds} = \frac{1}{2\rho}\frac{dv^2}{d\psi}$$
$$a_N = \frac{v^2}{\rho}$$

ونصف قطر الانحناء:
$$\rho = 4a\cos\psi$$

وتصبح المعادلتين (1), (2) بالصورة:
$$m\frac{1}{2\rho}\frac{dv^2}{d\psi} = -mg\sin\psi - \mu R \quad (3)$$
$$m\frac{v^2}{\rho} = R - mg\cos\psi \quad (4)$$

بضرب (4) فى μ والجمع مع (3) نحصل على:
$$\frac{1}{2\rho}\frac{dv^2}{d\psi} + \frac{v^2}{\rho} = -g\sin\psi - \mu g\cos\psi$$

وبالتعويض عن قيمة ρ:
$$\frac{1}{2}\frac{dv^2}{d\psi} + \mu v^2 = -4ag[\sin\psi\cos\psi + \mu\cos^2\psi]$$
$$\therefore \quad \frac{dv^2}{d\psi} + 2\mu v^2 = -4ag[\sin 2\psi + \mu(1+\cos 2\psi] \quad (5)$$

ولحل هذه المعادلة التفاضلية نضرب الطرفين فى عامل التكامل $e^{2\mu\psi}$.
$$\therefore \quad \frac{d}{d\psi}(v^2 e^{2\mu\psi}) = -4ag\, e^{2\mu\psi}[\sin\psi + \mu(1+\cos 2\psi]$$

وبفصل المتغيرات والتكامل نحصل على:
$$\therefore \; v^2 e^{2\mu\psi} = -4ag\int e^{2\mu\psi}\,[\sin 2\psi + \mu + \mu\cos 2\psi]d\psi$$

$$= -4ag\left[\frac{e^{2\mu\psi}}{4+4\mu^2}(2\mu\sin 2\psi - 2\cos 2\psi)\right.$$

$$\left. + \frac{e^{2\mu\psi}}{2} + \frac{\mu e^{2\mu\psi}}{4+4\mu^2}(2\sin 2\psi + 2\mu\cos 2\psi)\right] + C \qquad (6)$$

وباستخدام الشروط الابتدائية: t=o، v=u، ψ=o نجد أن:

$$C = \frac{4ag\mu^2 + (1+\mu^2)\mu^2}{1+\mu^2}$$

بالتعويض فى (6) نحصل على:

$$v^2 e^{2\mu\psi} = -4ag\left[\frac{e^{2\mu\psi}}{4+4\mu^2}(2\mu\sin 2\psi - 2\cos 2\psi) + \frac{e^{2\mu\psi}}{2}\right.$$

$$\left. + \frac{\mu e^{2\mu\psi}}{4+4\mu^2}(2\sin 2\psi + 2\mu\cos 2\psi)\right] + \frac{4ag\mu^2 + (1+\mu^2)\mu^2}{1+\mu^2} \qquad (7)$$

وحيث أن السرعة الابتدائية تكفى لوصول الجسيم إلى الناب فهذا يعنى أن السرعة تنعدم عند الناب وكذلك $\psi = \frac{\pi}{2}$، وتصبح المعادلة (7):

$$O = -4ag\left[\frac{2e^{\mu\pi}}{4+4\mu^2} + \frac{e^{\mu\pi}}{2} - \frac{2\mu^2 e^{\mu\pi}}{4+4\mu^2}\right] + \frac{4ag\mu^2 + (1+\mu^2)\mu^2}{1+\mu^2}$$

$$\therefore \qquad 2age^{\mu\pi}\left[\frac{2}{1+\mu^2}\right] = \frac{4ag\mu^2 + (1+\mu^2)\mu^2}{1+\mu^2}$$

$$\therefore \qquad e^{\mu\pi} = \mu^2 + \frac{\mu^2}{4ag} = (1+\mu^2)$$

وهو المطلوب.

مسألة (11): يترك حلها للطالب (بنفس طريقة المسألة 10).