الباب الثالث

الديناميكا المستوية
للجسيمات

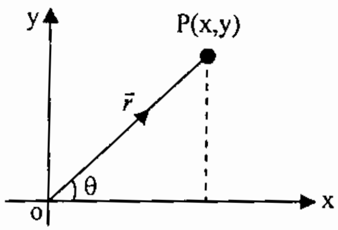
الباب الثالث

الديناميكا المستوية للجسيمات

حركة الجسيم في المستوى

أولاً: الحركة في المستوى بإستخدام الإحداثيات الكرتيزية (x, y)

متجه موضع الجسيم:



هو المتجه الواصل من نقطة الأصل O إلى الجسيم

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \qquad \text{..........(١)}$$

متجه السرعة:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} \qquad \text{........(٢)}$$

حيث: مركبتا السرعة في إتجاهي x, y :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \dot{y} = \frac{dy}{dt}$$

مقداراً :

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

إتجاهاً:

$$\tan\theta = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

متجه العجلة(التسارع):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} \text{ ....(٣)}$$

حيث : $\ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

معادلة المسار الكرتيزية: هي معادلة تحدد مسار الجسيم المتحرك ، وتكتب بالصورة : $y = f(x)$

المعادلات البارامترية للمسار: هما معادلتان تعطيان x, y بدلالة بارامتر t

$$x = f(t) \quad , y = g(t)$$

كمثال:

(١) إذا كان المسار على شكل دائرة

المعادلة الكرتيزية : $x^2 + y^2 = r^2$

المعادلات البارامترية : $x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$

(للبارامتر هنا هو θ)

(٢) إذا كان المسار على شكل قطع ناقص

المعادلة الكرتيزية: $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

المعادلات البارامترية: $x = a\cos\theta \ , \ y = \sin\theta$

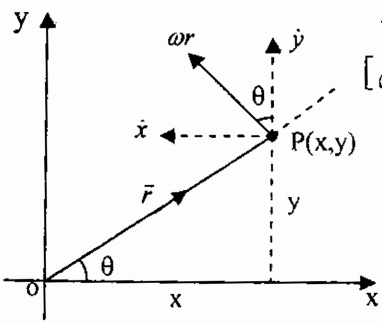
ملحوظة : الدائرة هي حالة خاصة من القطع الناقص عندما $a = b = r$

أمثلة محلولة :

مثال(١) : يتحرك جسيم في مسار ما في المستوى (xy) بحيث كانت سرعته في أي لحظة عمودية على متجه موضعه $\bar{r}$ ومقدارها $(\omega\, r)$ حيث ω ثابت ، أوجد :

(i) مقدار و إتجاه عجلة الجسيم المتحرك .

(ii) معادلة مسار الجسيم .



الحـــل: متجه موضع الجسيم p : $\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$

حيث: $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ [من هندسة الشكل]

$\therefore \bar{r} = r\cos\theta\hat{i} + r\sin\theta\hat{j}$ ....(١)

متجه السرعة :

مقدار السرعة $= \omega\, r$ في إتجاه $\perp \bar{r}$

مركبتا السرعة في إتجاهي x, y :

$$\dot{x} = -\omega r \sin\theta = -\omega y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٢)$$

$$\dot{y} = \omega r \cos\theta = \omega x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٣)$$

ويكون متجه السرعة:

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} = -\omega y\hat{i} + \omega x\hat{j} \ldots\ldots\ldots\ldots(٤)$$

متجه العجلة:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{x}\,\hat{i} + \ddot{y}\,\hat{j} = \left(-\omega \underbrace{\dot{y}}\right)\hat{i} + \left(\omega \underbrace{\dot{x}}\right)\hat{j}$$

$$= \left[-\omega .\underbrace{\omega x}\right]\hat{i} + \left[\omega .\underbrace{(-\omega y)}\right]\hat{j}$$

$$= -\omega^2 x\hat{i} - \omega^2 y\hat{j} = -\omega^2 \underbrace{(x\hat{i} + y\hat{j})}_{\vec{r}} = -\omega^2 \vec{r} \ldots\ldots\ldots(٥)$$

وإذا كان $\hat{r} = \dfrac{\vec{r}}{r}$ هو متجه الوحدة (وحدة المتجهات) في إتجاه $\vec{r}$

$$\therefore\ \vec{r} = r\,\hat{r}$$

وتصبح (٥): $\vec{a} = -\omega^2 r\,\hat{r}$ ، ولكن: $\vec{a} = a\,\hat{r}$

$\therefore$ مقدار العجلة هو: $a = |\vec{a}| = \omega^2 r$

و إتجاهها في عكس إتجاه $\vec{r}$ (الإشارة السالبة) أي أنها نحو المركز O.

<u>**المطلوب الثاني:**</u> معادلة مسار الجسيم المتحرك(المعادلة الكرتيزية)

حيث أن : $y = r\sin\theta$ ، $x = r\cos\theta$

بالتربيع و الجمع :

$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2\underbrace{\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)}_{=1} = r^2$$

وهي معادلة المسار وهي عبارة عن دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها r.

مثال(٢): إذا كانت حركة جسيم في المستوى تتعين بالعلاقتين:

$$x = a\cos wt \qquad , \qquad y = b\sin wt$$

حيث a,b,w ثوابت، أوجد السرعة والعجلة مقداراً واتجاهاً وكذلك المعادلة الكرتيزية للمسار، وإذا كانت $a=b$ فأوجد معادلة المسار وأثبت أن اتجاهي السرعة والعجلة يكونان متعامدان.

الحل:

$$x = a\cos wt \qquad , \qquad y = b\sin wt$$

$$\dot{x} = -aw\sin wt \qquad , \qquad \dot{y} = bw\cos wt$$

$$\ddot{x} = -aw^2\cos wt \qquad , \qquad \ddot{y} = -bw^2\sin wt$$

السرعة: مقداراً : $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = w\sqrt{a^2\sin^2 wt + b^2\cos^2 w^2 t}$

اتجاهاً: $\tan\alpha = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\dfrac{b}{a}\cot wt$

العجلة: مقداراً : $v = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = w^2\sqrt{a^2\cos^2 wt + b^2\sin^2 wt}$

اتجاهاً: $\tan\beta = \dfrac{\ddot{y}}{\ddot{x}} = \dfrac{b}{a}\tan wt$

ولتعيين المعادلة الكرتيزية للمسار: نحذف البارامتر بين x,y، فنحصل على:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

وهي معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل 0 ونصفا محورية a,b،

إذا كانت $a=b$ فإن معادلة المسار تكون: $x^2 + y^2 = a^2$

وهي معادلة دائرة مركزها 0، وفي هذه الحالة فإن:

$$\tan\alpha = -\cot wt \qquad , \qquad \tan\beta = \tan wt$$

$$\therefore \tan\alpha \cdot \tan\beta = -(\cot wt)(\tan wt) = -1$$

وهذا يعني أن اتجاهي السرعة والعجلة متعامدان.

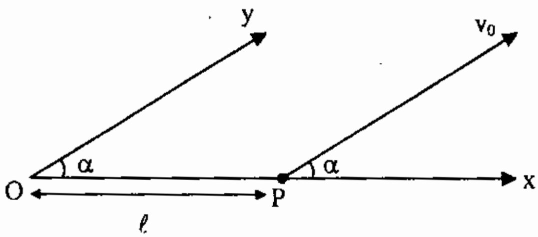
<u>مثال(٣)</u>: يتحرك جسيم في المستوى تحت تأثير قوة مركزية تتناسب مع البعد عن المركز O ، فإذا بدأ الجسيم الحركة بسرعة v_0 من موضع على محور x يبعد مسافة ℓ عن O وفي إتجاه يميل بزاوية α على محور x ، فبأخذ محور y موازياً لاتجاه الحركة الإبتدائية ، عين موضع الجسيم عند أي لحظة وكذلك معادلة المسار.

<u>الحل</u>: حيث أن الحركة تتم بعيداً عن المركز وأن القوة $\vec{F}$ تتناسب مع البعد عن المركز $\vec{r}$ (عند أي لحظة)

$$\therefore\ \vec{F} \propto \vec{r} \rightarrow \vec{F} = -k\ \vec{r} \ \ldots\ldots(١)$$

معادلة الحركة :

قانون نيوتن الثاني $\vec{F} = m\ \ddot{\vec{r}}$



$$\therefore m\ \ddot{\vec{r}} = -k\ \vec{r}$$

$$\therefore \ddot{\vec{r}} = -\frac{k}{m}\vec{r} = -\omega^2\vec{r} \qquad \Big|\ \omega^2 = \frac{k}{m}$$

معادلة العجلة

$$\ddot{\vec{r}} = -\omega^2\vec{r}$$

$$\ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} = -\omega^2\left(x\hat{i} + y\hat{j}\right)$$

بمقارنة معاملات $\hat{i}, \hat{j}$ في الطرفين:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x\ ,\ \ddot{y} = -\omega^2 y$$

هاتان المعادلتان تمثلان ما يعرف بالحركة التوافقية البسيطة[نوع من أنواع الحركة التذبذبية]. الحل العام لهاتين المعادلتين هو:

$$x = a\cos\omega t + b\sin\omega t \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٢)$$

$$y = c\cos\omega t + d\sin\omega t \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٣)$$

حيث: a,b,c,d ثوابت .

هاتان المعادلتان تعطينا موضع الجسيم (x,y) عند أي لحظة t ولكنها بدلالة الثوابت الأربعة a,b,c,d ، والمطلوب إيجاد هذه الثوابت.

ولإيجاد الثوابت a,b,c,d:

يلزمنا ٤ معادلات لدينا منهما معادلتان (٣) ، (٢) ولإيجاد المعادلتين الأخريين:

نفاضل(٣) و (٢) :

$$\dot{x} = -\omega a \sin \omega t + \omega b \cos \omega t \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٤)$$

$$\dot{y} = -\omega c \sin \omega t + \omega d \cos \omega t \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٥)$$

والآن: بإستخدام الشروط الإبتدائية للحركة:

$$x = \ell \quad , \quad y = 0 \quad , \quad t = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{i})$$

$$\dot{x} = 0 \quad , \quad \dot{y} = v_0 \quad , \quad t = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{ii})$$

حيث أن :الحركة بدأت على محور x من على بعد ℓ وبسرعة v_0 موازية لمحور y

بإستخدام الشرط (i) مع المعادلتين (٣) ، (٢) والشرط(ii) مع المعادلتين(٥) ، (٤)

فمن (٢): $\therefore a = \ell$

$$\ell = a \underbrace{\cos 0}_{=1} + b \underbrace{\sin 0}_{=0} = a$$

ومن (٣): $\therefore c = 0$

$$0 = c \underbrace{\cos 0}_{=1} + d \underbrace{\sin 0}_{=0} = c$$

من (٤): $\therefore b = 0$

$$0 = -\omega \ell \sin 0 + \omega b \cos 0 = \omega b$$

من (٥): $\therefore d = \dfrac{v_0}{\omega}$

$$v_0 = -\omega c \sin 0 + \omega d \cos 0 = \omega d$$

وتصبح معادلتا x,y [المعادلتين(٣)،(٢)]

$$x = \ell \cos \omega t \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٦)$$

$$y = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٧)$$

المعادلتان (٧)،(٦) تعطينا موضع الجسيم عند أي لحظة t .

ولإيجاد معادلة المسار الكرتيزية:

المعادلتان(٧)،(٦) تمثلان المعادلتين البارامتريتين للمسار ولإيجاد المعادلة الكرتيزية نحذف t بينهما.

فمن(٦):
$$\cos \omega t = \frac{x}{\ell}$$

ومن(٧):
$$\sin \omega t = y \frac{\omega}{v_0}$$

بالتربيع والجمع:
$$\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = \frac{x^2}{\ell^2} + y^2 \frac{\omega^2}{v_0^2}$$

$$\therefore 1 = \frac{x^2}{\ell^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \qquad \left| \begin{array}{l} \ell = a \\ \frac{v_0}{\omega} = b \end{array} \right.$$

وهي معادلة المسار وتمثل قطعاً ناقصاً.

<u>مثال(٤):</u> جسيم يتحرك في المستوى x, y بحيث أن معادلات مساره البارامترية هي:

$$x = k(1 - \cos \omega t) \quad ، \quad y = k(\omega t - \sin \omega t)$$

حيث: k, ω ثابتان ، t بارامتر ،

أوجد الآتي :

(i) مقدار وإتجاه سرعة وعجلة الجسيم في أي لحظة t ، وأثبت أن العجلة ثابتة القيمة.

(ii) إذا كانت ϕ هي زاوية إتجاه السرعة مع محور x ، ϕ' هي زاوية إتجاه العجلة مع هذا المحور . فأثبت أن : $\phi' = 2\phi$

(iii) طاقة الحركة تعطى بالعلاقة: $T = \max$ حيث m كتلة الجسيم، a مقدار عجلته.

الحـل: أولاً: مقدار وإتجاه كل من السرعة والعجلة

$$x = k(1-\cos\omega t)$$

$$\therefore \dot{x} = \frac{dx}{dt} = k\omega \sin \omega t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(١)$$

$$\ddot{x} = k\,\omega^2 \cos\omega t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٢)$$

أيضا:

$$y = k(\omega t - \sin\omega t)$$

$$\therefore\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = k\,\omega(1-\cos\omega t) \cdots\cdots(٣)$$

$$\ddot{y} = k\,\omega^2 \sin\omega t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٤)$$

السرعة مقداراً:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

$$= \sqrt{\underbrace{k^2\omega^2}\sin^2\omega t + \underbrace{k^2\omega^2}(1-\cos\omega t)^2}$$

$$= k\omega\sqrt{\sin^2\omega + (1 - 2\cos\omega t + \cos^2\omega)}$$

$$= k\omega\sqrt{2-2\cos\omega t} = k\,\omega\sqrt{2(1-\cos\omega t)} = k\,\omega\sqrt{2(2\sin^2\frac{\omega t}{2})}$$

$$= 2k\,\omega \sin\frac{\omega t}{2} \qquad \Big|\ 1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$$

إتجاه السرعة:

$$\tan\phi = {}^{\dot{y}}\!/_{\dot{x}} = \frac{1-\cos\omega t}{\sin\omega t}$$

من حساب المثلثات

$$= \tan\frac{\omega t}{2} \qquad \Big|\tan\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$$

$$\therefore \phi = \frac{\omega t}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٥)$$

العجلة مقداراً:

$$a=|\vec{a}|=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}=\sqrt{k^2\omega^4\underbrace{(\cos^2\omega t+\sin^2\omega t)}_{=1}}=\sqrt{k^2\omega^4}=k\ \omega^2=const.$$

إتجاه العجلة : $\tan\phi'=\ddot{y}/\ddot{x}=\dfrac{\sin\omega t}{\cos\omega t}=\tan\omega t$

$$\therefore \phi'=\omega t$$

<u>المطلوب الثاني:</u> من (٦)، (٥) يتضح أن:

$$\phi=\frac{\phi'}{2}\longrightarrow\phi'=2\phi\ \ldots\ldots\ldots\ldots(٧)$$

<u>المطلوب الثالث:</u> طاقة الحركة T

$$T=\frac{1}{2}mV^2=\frac{1}{2}m\left(2k\ \omega\sin\frac{\omega t}{2}\right)^2=2m\ k^2\omega^2\sin^2\frac{\omega t}{2}$$

$$=m\ k^2\omega^2(1-\cos\ \omega t)=m\left(k\ \omega^2\right)\left[k\left(1-\cos\omega t\right)\right]$$

ولكن: مقدار العجلة $a=k\ \omega^2$

ومن معادلة المسار فإن: $x=k\left(1-\cos\omega t\right)$

$$\therefore T=\max$$

وهو المطلوب .

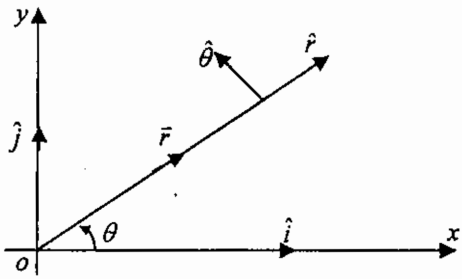
ثانياً: الحركة المستوية منسوبة إلى الإحداثيات القطبية

في الإحداثيات الكرتيزية (x, y):

متجهات الوحدة $\hat{i}, \hat{j}$

في الإحداثيات القطبية (r, θ):

متجهات الوحدة $\hat{r}, \hat{\theta}$



العلاقة بين متجهات الوحدة $(\hat{r}, \hat{\theta}), (\hat{i}, \hat{j})$:

العلاقة هي:

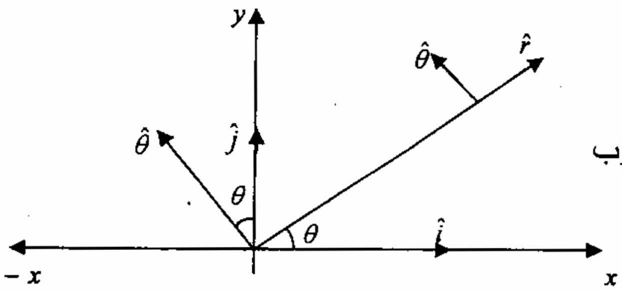
$$\hat{r} = \hat{i} \cos\theta + \hat{j} \sin\theta \qquad \text{(١)}$$

$$\hat{\theta} = -\hat{i} \sin\theta + \hat{j} \cos\theta \qquad \text{(٢)}$$

الإثبات:

بتحليل $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ إلى مركبتيهما

في إتجاهي $\hat{i}, \hat{j}$ ينتج المطلوب



أيضاً يمكن إثبات العلاقتين الآتيتين لكل من $\hat{i}, \hat{j}$ بدلالة $\hat{r}$, $\hat{\theta}$

$$\hat{i} = \hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta \quad , \quad \hat{j} = \hat{r}\sin\theta + \hat{\theta}\cos\theta$$

وذلك: بضرب (١) في $\cos\theta$ و (٢) في $\sin\theta$ والطرح:

$$\therefore \hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta = \hat{i}\,(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \hat{i}$$

وبضرب (١) في $\sin\theta$ و (٢) في $\cos\theta$ والجمع:

$$\therefore \hat{r}\sin\theta + \hat{\theta}\cos\theta = \hat{j}\,(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = \hat{j}$$

أمثلة محلولة:

مثال (١): باستخدام العلاقتين (٢) ، (١) أثبت أن التفاضل الزمني لمتجهي الوحدة $\hat{r},\hat{\theta}$ يعطى بالعلاقتين:

$$\dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\,\hat{\theta} \quad \text{.................................} (i)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}\,\hat{r} \quad \text{.................................} (ii)$$

الحـــل:

$$\hat{r} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta \quad \text{.................................} (١)$$

$$\hat{\theta} = -\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta \quad \text{.................................} (٢)$$

لإيجاد $\dot{\hat{r}}$: بتفاضل (١) بالنسبة للزمن:

$$\dot{\hat{r}} = \frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d\hat{r}}{dr}\frac{dr}{dt} + \frac{d\hat{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \qquad \Big|\, \hat{r} = \hat{r}(r,\theta)$$

$$= \frac{d\hat{r}}{dr}\dot{r} + \frac{d\hat{r}}{r\theta}\dot{\theta} \quad \text{.................................} (٣)$$

ولكن: من (١) :

$$\frac{d\hat{r}}{dr} = 0$$

$$\frac{d\hat{r}}{d\theta} = -\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta$$

بالتعويض في (٣):

$$\dot{\hat{r}} = (0)\dot{r} + \left(-\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta\right)\dot{\theta}$$

$$= \underbrace{\left(-\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta\right)}_{\hat{\theta}=\text{ من }(2)}\dot{\theta} = \dot{\theta}\hat{\theta} \quad \text{....................} (i)$$

لإيجاد $\dot{\hat{\theta}}$: نفاضل (٢) بالنسبة للزمن :

$$\dot{\hat{\theta}} = \frac{d\hat{\theta}}{dt} = \frac{d\hat{\theta}}{dr}\underbrace{\frac{dr}{dt}} + \frac{d\hat{\theta}}{d\theta}\underbrace{\frac{d\theta}{dt}} \qquad \hat{\theta} = \hat{\theta}(r,\theta)$$

$$= \frac{d\hat{\theta}}{dt}\dot{r} + \frac{d\hat{\theta}}{d\theta}\dot{\theta} \quad \text{....................} (٤)$$

ولكن من (٢) :

$$\frac{d\hat{\theta}}{dr}=0 \qquad , \frac{d\hat{\theta}}{d\theta}=-\hat{i}\cos\theta-\hat{j}\sin\theta$$

بالتعويض في (٤) :

$$\dot{\hat{\theta}}=(0)\dot{r}-\left(\hat{i}\cos\theta+\hat{j}\sin\theta\right)\dot{\theta}$$

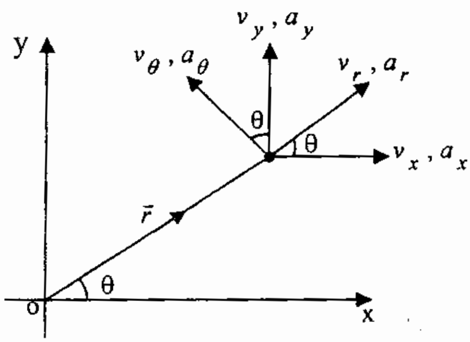
$$=\underbrace{-\left(\hat{i}\cos\theta+\hat{j}\sin\theta\right)}_{\hat{r}= \text{من } (2)}\dot{\theta}=-\dot{\theta}\,\hat{r} \qquad ....(ii)$$

وهو المطلوب.

مثال(٢): بإستخدام نتيجة المثال السابق (١) ، أثبت أن: مركبتي السرعة في الإحداثيات القطبية هي:

$$v_r=\dot{r} \quad , \quad v_\theta=r\dot{\theta}$$

الحل:



في حالة الإحداثيات الكرتيزية: $\vec{v}=v_x\hat{i}+v_y\hat{j}$

في حالة الإحداثيات القطبية: $\vec{v}=v_r\,\hat{r}+v_\theta\,\hat{\theta}$

في الإحداثيات الكرتيزية: $v_x=\dot{x} \; , \; v_y=\dot{y}$

في حالة الإحداثيات القطبية: $v_r=\dot{r} \quad , \quad v_\theta=r\dot{\theta}$

الإثبات: حيث أن: $\vec{r} = r\,\hat{r}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\,\hat{r})$$
$$= r\frac{d\hat{r}}{dt} + \frac{dr}{dt}\hat{r}$$
$$= r\,\dot{\hat{r}} + \dot{r}\,\hat{r} = r(\dot{\theta}\,\hat{\theta}) + \dot{r}\,\hat{r}$$
$$= \underbrace{\dot{r}}\,\underbrace{\hat{r}} + \underbrace{r\,\dot{\theta}}\,\hat{\theta} = \underbrace{v_r}\,\hat{r} + \underbrace{v_\theta}\,\hat{\theta} \qquad \Big|\ \dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\,\hat{\theta}$$

$$\therefore v_r = \dot{r}\ ,\ v_\theta = r\,\dot{\theta}$$

وهو المطلوب.

مثال(٣): باستخدام نتيجة المثال السابق (٢) أثبت أن مركبتي العجلة في الإحداثيات القطبية تعطى من:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad , \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)$$

الحل: مركبتا العجلة في الإحداثيات الكرتيزية هي :

$$a_x = \ddot{x}\ ,\ a_y = \ddot{y}$$

والمطلوب إيجاد المركبتين a_r, a_θ في الإحداثيات القطبية:

حيث أن: (مثال (٢))

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{\theta}\,\hat{\theta}$$

$$\therefore \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta}\right)$$
$$= \frac{d}{dt}(\dot{r}\,\hat{r}) + \frac{d}{dt}\left(r\,\dot{\theta}\,\hat{\theta}\right)$$
$$= \left[\dot{r}\,\dot{\hat{r}} + \ddot{r}\,\hat{r}\right] + \left[r\left(\dot{\theta}\,\dot{\hat{\theta}} + \ddot{\theta}\,\hat{\theta}\right) + \dot{r}\left(\dot{\theta}\,\hat{\theta}\right)\right]$$

ولكن: من:المثال (١) :
$\dot{\hat{r}}=\dot{\theta}\hat{\theta}\ ,\ \dot{\hat{\theta}}=-\dot{\theta}\hat{r}$

$$\therefore \vec{a}=\left[\dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta}+\ddot{r}\hat{r}\right]+\left[r\left(-\dot{\theta}^2\hat{r}+\ddot{\theta}\hat{\theta}\right)+\dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta}\right]=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\hat{r}+\left(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\theta}$$

$$=a_r\hat{r}+a_\theta\hat{\theta}$$

$$\therefore a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\ ,\ a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}$$

ويلاحظ أن: المركبة a_θ يمكن كتابتها بالصورة: $a_\theta=\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)$

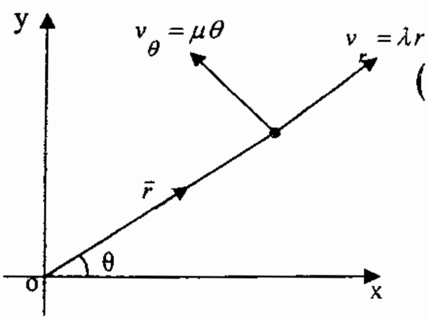
وذلك لأن: $\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}\left(\underbrace{r^2}\,\underbrace{\dot{\theta}}\right)=\dfrac{1}{r}\left[r^2\ddot{\theta}+(2r\dot{r})\dot{\theta}\right]=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}$

<u>مثال(٤)</u> : إذا كانت سرعتا جسيم في إتجاهي طول نصف القطر من نقطة ثابتة والعمودي عليه هما $\lambda r,\mu\theta$ على الترتيب حيث λ,μ ثابتان ، المطلوب :

(١) إيجاد معادلة المسار للجسيم المتحرك بالصورة : $\theta=k\,e^{-\frac{\mu}{\lambda r}}$ حيث k ثابت.

(٢) إثبات أن مركبتي العجلة في إتجاهي طول نصف القطر والعمودي عليه هما:

$$a_r=\lambda^2 r-\frac{\mu^2\theta^2}{r}\quad ،\quad a_\theta=\mu\,\theta\left(\lambda+\frac{\mu}{r}\right)$$



<u>الحـل:</u> $v_r=\lambda r\ ,\ v_\theta=\mu\theta$

والمطلوب: إيجاد معادلة المسار(علاقة بين r,θ)

$$v_r=\lambda r=\dot{r}=\frac{dr}{dt}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(١)$$

$$v_\theta=\mu\theta=r\dot{\theta}=r\frac{d\theta}{dt}\ \ldots\ldots\ldots(٢)$$

من (٢) و (١) بالقسمة:

$$\frac{\lambda r}{\mu\theta}=\frac{\frac{dr}{dt}}{r\frac{d\theta}{dt}}=\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٣)$$

حيث:

$$\frac{dr}{d\theta}=\frac{dr}{dt}\cdot\frac{dt}{d\theta}\quad=\frac{\frac{dr}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}}$$

وبتكامل العلاقة (٣) بعد فصل المتغيرات:

$$\frac{\mu}{\lambda}\int\frac{dr}{r^2}=\int\frac{d\theta}{\theta}$$

$$\frac{\mu}{\lambda}\left(-\frac{1}{r}\right)=\ln\theta+\underbrace{const.}=\ln\theta+\underbrace{\ln\alpha}\longrightarrow\quad \alpha \text{ ثابت}$$

$$\therefore-\frac{\mu}{\lambda r}=\ln(\theta\alpha)\qquad\therefore e^{-\frac{\mu}{\lambda r}}=\theta\alpha$$

$$\therefore\theta=\frac{1}{\alpha}e^{-\frac{\mu}{\lambda r}}=ke^{-\frac{\mu}{\lambda r}}\qquad\left|k=\frac{1}{\alpha}\right.$$

وهي معادلة المسار المطلوبة.

<u>**المطلوب الثاني:**</u>

إيجاد مركبتي العجلة:

من المثال (٣) :

$$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\;.......(٣)$$

$$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}\;....(٤)$$

ولكن من (٢) و (١) :

$$\dot{r}=\lambda r\longrightarrow\ddot{r}=\lambda\dot{r}=\lambda(\lambda r)=\lambda^2 r\;....................(٥)$$

$$r\dot{\theta}=\mu\theta\longrightarrow\dot{\theta}=\frac{\mu\theta}{r}\;..................................(٦)$$

وبتفاضل (٢):

$$r\ddot{\theta}+\dot{r}\dot{\theta}=\mu\dot{\theta}$$

$$\therefore r\ddot{\theta}=\mu\dot{\theta}-\dot{r}\dot{\theta}\qquad\qquad..............................(٧)$$

بالتعويض من (٧) و (٦) و (٥) في (٤) و (٣) نحصل على:

$$a_r = \lambda^2 r - r\left(\frac{\mu\theta}{r}\right)^2 = \lambda^2 r - \frac{\mu^2\theta^2}{r} \quad \text{.......................}(٨)$$

$$a_\theta = \left(\mu\dot{\theta} - \dot{r}\,\dot{\theta}\right) + 2\dot{r}\,\dot{\theta} = \mu\dot{\theta} + \dot{r}\,\dot{\theta} = \underbrace{\dot{\theta}}\left(\mu + \underbrace{\dot{r}}\right)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\mu\theta}{r}\right)}\left(\mu + \underbrace{\lambda r}\right) \qquad \left|\begin{array}{l} \dot{r} = \lambda r \\ \dot{\theta} = \dfrac{\mu\theta}{r} \end{array}\right.$$

$$= \mu\theta\left[\lambda + \frac{\mu}{r}\right] \qquad \text{...........................}(٩)$$

المعادلتان (٩) و (٨) هما مركبتا العجلة المطلوبتان.

<u>مثال(٥):</u> يتحرك جسيم حركة مستوية بحيث كانت مركبتا سرعته في الاتجاهين المركزي والمستعرض ثابتتان وكل منهما تساوي b، أوجد المركبتين القطبيتين للعجلة وكذلك العجلة المحصلة بدلالة البعد القطبي r وأثبت أنها عمودية دائماً على اتجاه السرعة المحصلة، وإذا علم أنه عند $t = 0$ كانت $r = a, \theta = 0$، فأثبت أن معادلة المسار هي الحلزون $r = ae^{\theta}$.

<u>الحل:</u> <u>مركبتا السرعة:</u>

$$v_r = \dot{r} = b \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(1)$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} = b \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(2)$$

<u>السرعة المحصلة</u>: <u>مقداراً</u>:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = b\sqrt{2}$$

<u>اتجاهاً</u>:

$$\tan\alpha = \frac{v_\theta}{v_r} = 1 \quad \therefore \ \alpha = 45^\circ$$

العجلة: من (2),(1) بالتفاضل:

$$\ddot{r}=0$$
$$r\ddot{\theta}+r\dot{\theta}=0$$

مركبتا العجلة:

$$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-\frac{b^2}{r}$$

[إشارة – تعني أن العجلة a_r متجه نحو 0].

$$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=\frac{b^2}{r}$$

مقدار العجلة المحصلة:

$$a=\sqrt{a_r^2+a_\theta^2}=\frac{b^2}{r}\sqrt{2}$$

اتجاه العجلة المحصلة:

$$\tan\beta=\frac{a_\theta}{a_r}=-1\quad\therefore\beta=135^\circ$$

ومن ذلك نجد أن:

$$\tan\alpha\cdot\tan\beta=-1$$

وهذا يعني أن اتجاه العجلة المحصلة يكون عمودياً على اتجاه السرعة المحصلة.

ولإيجاد معادلة المسار: من (2),(1) بالقسمة:

$$\frac{\dot{r}}{r\dot{\theta}}=\frac{dr}{r\,d\theta}=1$$

وبفصل المتغيرات والتكامل نحصل على:

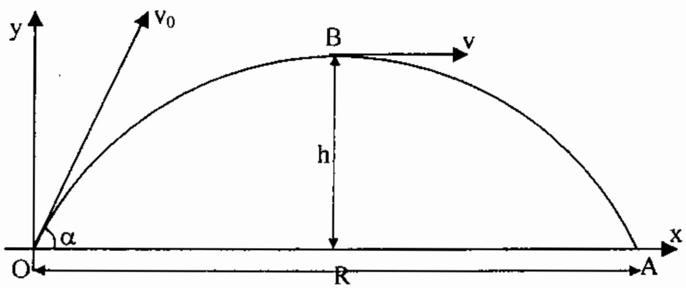
$$\int_a^r\frac{dr}{r}=\int_0^\theta d\theta\qquad\therefore[\ln r]_a^r=[\theta]_0^\theta$$

$$\therefore\ln\frac{r}{a}=\theta\quad\rightarrow\quad\frac{r}{a}=e^\theta\quad\therefore r=ae^\theta$$

وهي المعادلة المطلوبة.

تطبيقات على الحركة المستوية للجسيمات

تطبيق(١) : حركة المقذوفات:



المقذوف هو جسيم كتلته m يتحرك تحت تأثير الجاذبية مبتدئاً من O (نقطة القذف) بسرعة إبتدائية v_0 في إتجاه يصنع زاوية α (زاوية القذف) مع الأفقي (محور x). فيصنع المقذوف المسار المبين بالشكل .

تعريفات:

(١) المدى (R) : هي المسافة OA

(٢) زمن الطيران (T) : هو الزمن الكلي لحركة المقذوف، أي الزمن من O إلى A.

(٣) أقصى إرتفاع (h) : هي المسافة بين أعلى نقطة في المسار ومحور x .

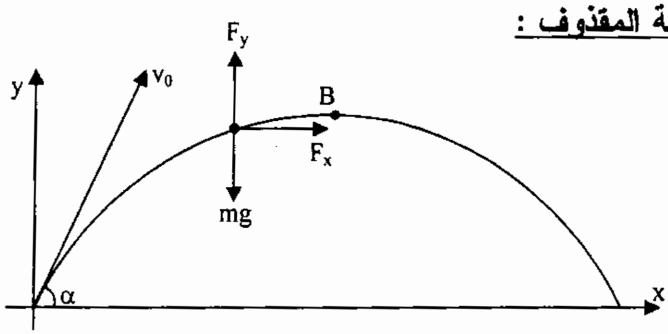
(٤) زمن أقصى إرتفاع (t_B) : هو زمن الوصول من O إلى B

ملاحظات:

(١) عند أقصى إرتفاع (نقطة B) : تكون الحركة كلها أفقية أي لا توجد مركبة رأسية للسرعة.

(٢) عند نهاية المسار(نقطة A): فإن $y = 0$ أي أن إحداثيات A هي: $(R,0)$

معادلات حركة المقذوف :



القوى المؤثرة على المقذوف أثناء حركته:

(١) وزنه إلى أسفل = mg

(٢) قوة الحركة: لها مركبتان: $F_x = m\ddot{x} \quad , \quad F_y = m\ddot{y}$

معادلات الحركة:

(١) في إتجاه محور x : $m\ddot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(١)$

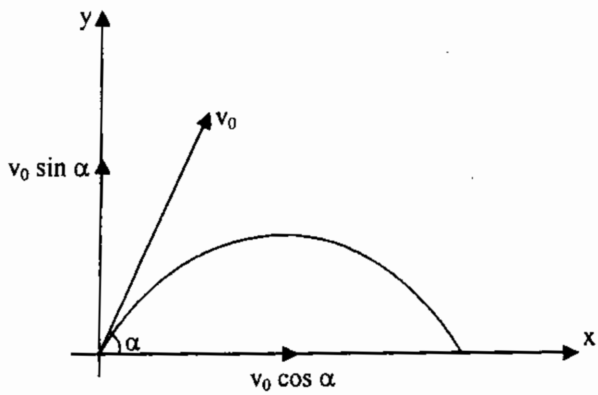
(٢) في إتجاه محور y : $m\ddot{y} = -mg \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٢)$

من (١) بالقسمة على m : $\ddot{x} = 0$

بالتكامل بالنسبة للزمن t : $\frac{d\dot{x}}{dt} = 0 \qquad \therefore \dot{x} = C_1$

و<u>لإيجاد</u> C_1 : في البداية: مركبة السرعة في إتجاه x

$\dot{x} = v_0 \cos\alpha \qquad \therefore C_1 = v_0 \cos\alpha$



$$\therefore \dot{x} = v_0 \cos\alpha \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٣)$$

وهي مركبة السرعة في إتجاه x

بالتكامل مرة ثانية: $x = (v_0 \cos\alpha)t + C_2$

<u>لإيجاد</u> C_2 : في البداية: $t = 0, x = 0 \longrightarrow C_2 = 0$

$$\therefore x = t\, v_0 \cos\alpha \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٤)$$

وهي المسافة المقطوعة في إتجاه x .

أيضاً: من (٢) بالقسمة على m :

$$\ddot{y} = -g \longrightarrow \frac{d\dot{y}}{dt} = -g$$

بالتكامل بالنسبة للزمن: $\dot{y} = -gt + C_3$

<u>لإيجاد</u> C_3 : في البداية: مركبة السرعة في إتجاه y هي $v_0 \sin\alpha$

$$t = 0, \dot{y}_0 = v_0 \sin\alpha$$

$$\therefore C_3 = v_0 \sin\alpha$$

$$\therefore \dot{y} = -gt + v_0 \sin\alpha \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٥)$$

وهي مركبة السرعة في إتجاه y

بالتكامل مرة ثانية:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)t + C_4$$

<u>لإيجاد</u> C_4 : في البداية: $t = 0, y = 0 \longrightarrow C_4 = 0$

$$y = t v_0 \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٦)$$

وهي المسافة المقطوعة في إتجاة y

ملحوظة: المعادلتان (٦) و (٤) :

$$x = t\,v_0 \cos\alpha \quad \text{و} \quad y = t v_0 \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

هما المعادلتان البارامتريتان لمسار المقذوف (بدلالة للبارامتر t).

المعادلة الكرتيزية للمسار: هي معادلة بالصورة : $y = f(x)$ ونحصل عليها من المعادلات البارامترية بحذف البارامتر وذلك لإيجاد العلاقة بين y, x .

فمن (٤) :

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

بالتعويض في (٦) :

$$\therefore\ y = \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right) v_0 \sin\alpha - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2$$

$$= x \tan\alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha}$$

وهي معادلة المسار المطلوبة .

$$y = x \tan\alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (٧)$$

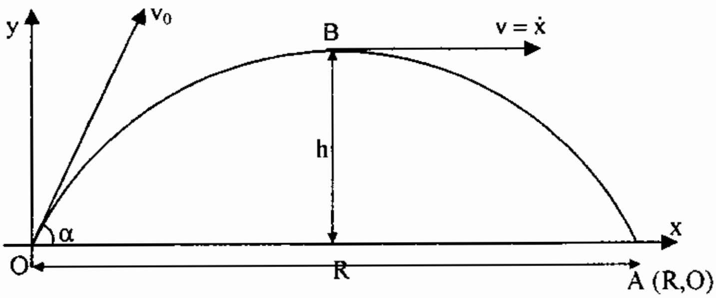
وتستخدم هذه المعادلة كثيراً في حل المسائل .

أمثلة محلولة:

مثال(١): أوجد أقصى ارتفاع (h) للمقذوف وزمن أقصى ارتفاع (t_B) ، وكذلك المدى (R) وزمن الطيران (T) ومن ذلك أثبت أن:

زمن الطيران= ضعف زمن أقضى ارتفاع

الحـــل:



أولاً: إيجاد أقصى إرتفاع وزمن أقصى إرتفاع

عند نقطة B (أقصى إرتفاع) : لا توجد مركبة رأسية للسرعة $\dot{y}\,\big|_{B\text{ عند}} = 0$

من المعادلة (٥): $0 = -gt_B + v_0 \sin\alpha \;\therefore\; t_B = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$

وهو زمن أقصى إرتفاع

ولإيجاد (h): نضع $t = t_B$ في (٦) فنحصل على $y_B = h$

$$h = t_B v_0 \sin\alpha - \frac{1}{2} g\, t_B^2$$

$$= \left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right) v_0 \sin\alpha - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2$$

$$= \frac{v_0^2}{g}\sin^2\alpha - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}\sin^2\alpha = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}\sin^2\alpha$$

وهو أقصى إرتفاع $\qquad \therefore h = \dfrac{1}{2}\dfrac{v_0^2}{g}\sin^2\alpha$

ثانياً: إيجاد المدى (R) وزمن الطيران (T) :

عند نقطة A (نهاية المسار) فإن $y = 0$

فبوضع $y = 0$ في (٦) نوجد الزمن الكلي للمسار(من O إلى A) أي زمن الطيران T.

$$0 = Tv_0 \sin\alpha - \frac{1}{2}gT^2 = \underset{\ne}{T}\underbrace{\left(v_0 \sin\alpha - \frac{1}{2}gT\right)}_{=0}$$

$$\therefore \frac{1}{2}gT = v_0 \sin\alpha \longrightarrow \qquad \therefore T = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$$

وهو زمن الطيران .

<u>ولإيجاد المدى</u> (R): $x = R$ عندما $t = T$

فبالتعويض في معادلة x (المعادلة (٤)):

$$\therefore R = Tv_0 \cos\alpha = \left(\frac{2v_0 \sin\alpha}{g}\right)v_0 \cos\alpha = \frac{2v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$$

وهي معادلة المدى.

<u>ملخص للعلاقات:</u>

$$\text{(i)}\ h = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}\sin^2\alpha \qquad \text{(ii)}\ t_B = \frac{v_0}{g}\sin\alpha$$

$$\text{(iii)}\ R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha \qquad \text{(iv)}\ T = 2\frac{v_0}{g}\sin\alpha$$

واضح من (iv) و (ii) أن: $T = 2t_B$

أي أن زمن الطيران = ضعف زمن أقصى إرتفاع. وهو المطلوب .

<u>مثال(٢):</u> أثبت أن أقصى مدى يمكن الحصول عليه يكون عند زاوية قذف تساوي $\left(\frac{\pi}{4}\right)$، وأن أقصى إرتفاع في هذه الحالة يساوي $\frac{1}{4}$ المدى.

<u>الحـل:</u> المدى:

$$R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(١)$$

عند الوصول إلى أقصى مدى يكون المدى أكبر ما يمكن

فمن (١) : يكون R أكبر ما يمكن عندما تكون $\sin 2\alpha$ أكبر ما يمكن ، أي عندما تكون: $\sin 2\alpha = 1$

أي عندما: $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ أي عندما $\alpha = \frac{\pi}{4}$

ويكون المدى في هذه الحالة (من (١)) :

$$R_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \qquad \text{(٢)}$$

وفي هذه الحالة: يكون أقصى إرتفاع:

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{v_0^2}{2g}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\therefore h_{\max} = \frac{1}{4}\frac{v_0^2}{g} \qquad \text{(٣)}$$

من (٣) و (٢) ينتج أن: $h_{\max} = \frac{1}{4}R_{\max}$

وهو المطلوب.

__مثال(٣):__ أوجد مقدار و إتجاه سرعة المقذوف عند أي لحظة.

__الحل:__ لإيجاد مقدار سرعة المقذوف :

$$\dot{x} = v_0 \cos\alpha = v_x$$

$$\dot{y} = v_0 \sin\alpha - g\,t = v_y$$

__مقدار السرعة:__

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2$$

$$\therefore v^2 = (v_0\cos\alpha)^2 + (v_0\sin\alpha - g\,t)^2$$

$$= \underbrace{v_0^2\cos^2\alpha + v_0^2\sin^2\alpha} - 2v_0 g\,t\sin\alpha + g^2t^2$$

$$= v_0^2 - 2g\underbrace{\left(v_0\,t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2\right)}_{=y} = v_0^2 - 2g\,y$$

$\therefore v = \sqrt{v_0^2 - 2g\,y}$

<u>إتجاه السرعة:</u>

إذا كانت θ هي زاوية ميل السرعة على الأفقي عند أي لحظة، فإن إتجاه السرعة يكون:

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_0 \sin\alpha - g\,t}{v_0 \cos\alpha}$$

$$= \tan\alpha - \frac{g\,t}{v_0 \cos\alpha} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (١)$$

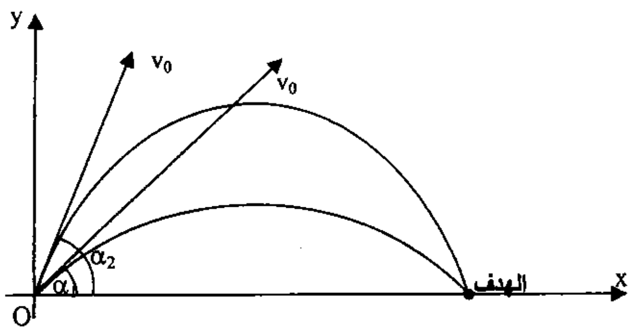
ولكن : $x = t\,v_0 \cos\alpha \rightarrow t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$

$$\therefore \tan\theta = \tan\alpha - \frac{g\,x}{v_0^2 \cos^2\alpha} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (٢)$$

المعادلة (١) أو (٢) تعطي إتجاه السرعة المطلوبة .

<u>مثال(٤):</u> أثبت أنه لسرعة قذف ثابتة v_0 يوجد إتجاهين مختلفين لإصابة هدف ما.

<u>الحــل:</u>



من معادلة المسار: $y = x\,\tan\alpha - \dfrac{g\,x^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}$

$$= x\,\tan\alpha - \frac{1}{2} g\,\frac{x^2}{v_0^2} \underbrace{\sec^2\alpha} = x\,\tan\alpha - \frac{1}{2} g\,\frac{x^2}{v_0^2}\left(1 + \tan^2\alpha\right)$$

بالضرب في: $\frac{2v_0^2}{g\,x^2}$

$$\therefore\ \frac{2v_0^2}{g\,x^2}\,y=\frac{2v_0^2}{g\,x}\tan\alpha-\left(1+\tan^2\alpha\right)$$

$$\therefore \tan^2\alpha-\frac{2v_0^2}{g\,x}\tan\alpha+\left(1+\frac{2v_0^2}{g\,x^2}\,y\right)=0$$

$$\therefore \tan^2\alpha+b\tan\alpha+c=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(١)$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية في $\tan\alpha$ ، حيث:

$$a=1\quad,\quad b=-\frac{2v_0^2}{g\,x}\quad,\quad C=1+\frac{2v_0^2}{gx^2}\,y$$

وصورتها العامة: $\alpha x^2+b\,x+c=0$

وحلها هو: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

وبذلك فإن حل المعادلة(١) يكون:

$$\tan\alpha=\frac{v_0^2}{g\,x}\pm\sqrt{\left(\frac{v_0^2}{g\,x}\right)^2-\left(1+\frac{2v_0^2}{g\,x^2}\,y\right)}$$

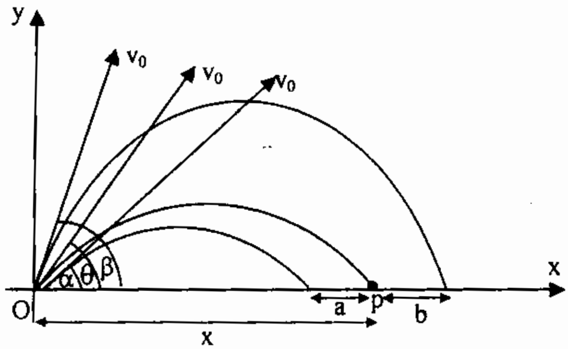
وهذا يعني وجود قيمتين مختلفتين للزاوية α هما α_1 ، α_2 وهو المطلوب.

<u>مثال(٥):</u> أطلقت قذيفة بسرعة معينة v_0 على هدف p في مستوى أفقي يمر بنقطة القذف، فسقطت القذيفة قبل الهدف بمسافة a عندما كانت زاوية القذف هي α، وعندما قذفت بنفس السرعة وبزاوية قذف β سقطت بعد الهدف بمسافة b أثبت أن زاوية القذف الصحيحة لإصابة الهدف هي:

$$\theta=\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{a\sin 2\beta+b\sin 2\alpha}{a+b}\right)$$

وأن بعد القذيفة عن الهدف(مدى القذيفة) هو: $x=\dfrac{a\sin 2\beta+b\sin 2\alpha}{\sin 2\beta-\sin 2\alpha}$

الحـــل:



الزاوية α ← قبل الهدف بمسافة a

الزاوية β ← بعد الهدف بمسافة b

الزاوية θ ← الزاوية الصحيحة لإصابة الهدف.

بتطبيق معادلة المدى :

$$R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$$

على الحالات الثلاثة نحصل على:

$$x = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(١) \quad \text{(عند الهدف)}$$

[المدى x يقابل الزاوية θ]

$$x - a = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots(٢) \quad \text{(قبل الهدف)}$$

[المدى $x - a$ يقابل الزاوية α]

$$x + b = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\beta \ldots\ldots\ldots\ldots(٣) \quad \text{(بعد الهدف)}$$

[المدى $x + b$ يقابل الزاوية β]

من (٣)،(٢) بالقسمة:

$$\therefore \frac{x - a}{x + b} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta}$$

$$\therefore x\sin 2\alpha + b\sin 2\alpha = x\sin 2\beta - a\sin 2\beta$$

$$\therefore x(\sin 2\beta - \sin 2\alpha) = a\sin 2\beta + b\sin 2\alpha$$

$$\therefore x = \frac{a\sin 2\beta + b\sin 2\alpha}{\sin 2\beta - \sin 2\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٤)$$

وهي معادلة المدى الخاص بالإصابة الصحيحة للهدف p.

ولإيجاد زاوية القذف الصحيحة (θ) لإصابة الهدف:

من (٤)،(١):

$$\sin 2\theta = \frac{g}{v_0^2}x$$

$$= \frac{g}{v_0^2}\frac{a\sin 2\beta + b\sin 2\alpha}{\sin 2\beta - \sin 2\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(٥)$$

ولكن: من (٣)،(٢) بالطرح:

$$a + b = \frac{v_0^2}{g}(\sin 2\beta - \sin 2\alpha)$$

$$\therefore \frac{g}{v_0^2}\frac{1}{\sin 2\beta - \sin 2\alpha} = \frac{1}{a+b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(٦)$$

بالتعويض من(٦) في(٥):

$$\sin 2\theta = \frac{a\sin 2\beta + b\sin 2\alpha}{a+b}$$

$$\therefore 2\theta = \sin^{-1}\left(\frac{a\sin 2\beta + b\sin 2\alpha}{a+b}\right)$$

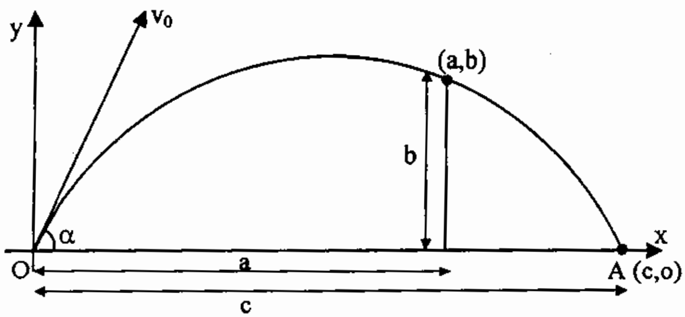
$$\therefore \theta = \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{a\sin 2\beta + b\sin 2\alpha}{a+b}\right)$$

وهو المطلوب.

<u>مثال (٦):</u> قذف جسيم من نقطة O بسرعة v_0 وبزاوية قذف α ، فإذا مر الجسيم أثناء حركته ملامساً قمة حائط إرتفاعه b على بعد α من O وأصطدم بالأرض عند نقطة A التي تبعد مسافة c عن O ، أثبت أن زاوية القذف α تعطى بالعلاقة: $\alpha = \tan^{-1}\dfrac{bc}{a(c-a)}$

وأن سرعة القذف تعطى بالعلاقة: $v_0^2 = \dfrac{g}{2}\left[\dfrac{b^2c^2 + a^2(c-a)^2}{ba(c-a)}\right]$

<u>الحـل:</u>



معادلة المسار للمقذوف:

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} \quad\text{............................}(١)$$

وحيث أن النقطتان $(a,b),(c,0)$ تقعان على المسار فهما يحققان معادلته.

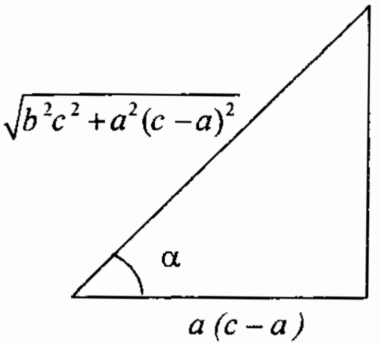
$$b = a\tan\alpha - \frac{g\,a^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} \quad\text{............................}(٢)$$

$$0 = c\tan\alpha - \frac{g\,c^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} \quad\text{............................}(٣)$$

بضرب (٢) في c^2 و (٣) في a^2 والطرح :

$$b\,c^2 = \left(a\,c^2 - c\,a^2\right)\tan\alpha = a\,c\,(c-a)\tan\alpha$$

$$\therefore \tan\alpha = \frac{bc}{a(c-a)} \qquad \therefore \alpha = \tan^{-1}\frac{b\,c}{a(c-a)}$$



$$\tan\alpha = \frac{bc}{a(c-a)}$$

$$\cos\alpha = \frac{a(c-a)}{\sqrt{b^2c^2+a^2(c-a)^2}}$$

ولإيجاد السرعة v_0 :

من (٢):

$$\frac{ga^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} = a\tan\alpha - b \qquad \therefore \frac{2v_0^2\cos^2\alpha}{g\,a^2} = \frac{1}{a\tan\alpha - b}$$

$$\therefore v_0^2 = \frac{g\,a^2}{2\cos^2\alpha}\left[\frac{1}{a\tan\alpha - b}\right] = \frac{g\,a^2}{2}\left[\frac{b^2c^2+a^2(c-a)^2}{a^2(c-a)^2}\right]\left[\frac{1}{\frac{b\,c}{c-a}-b}\right]$$

$$= \frac{g}{2}\left[\frac{b^2c^2+a^2(c-a)^2}{(c-a)^2}\right]\left[\frac{1}{\frac{b\,c-b\,(c-a)}{c-a}}\right] = \frac{g}{2}\left[\frac{b^2c^2+a^2(c-a)^2}{b\,a(c-a)}\right]$$

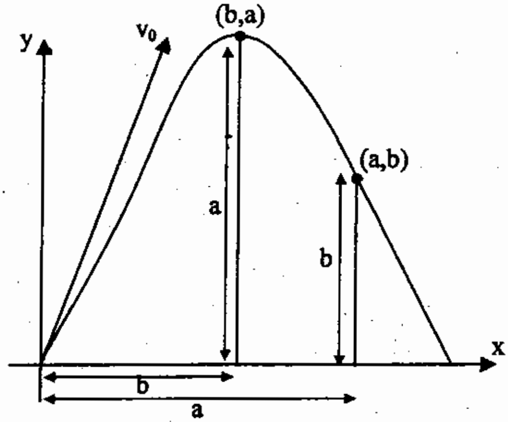
وهو المطلوب.

مثال (٧): إذا قذفت كرة بسرعة تكفي لأن تجعلها تمر فوق قمتي حائطين ، الأول ارتفاعه a ويبعد مسافة b عن نقطة القذف ، والثاني ارتفاعه b ويبعد مسافة a عن نقطة القذف ، أثبت أن المدى على المستوى الأفقي هو:

$$R = \frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$$

وأن زاوية القذف تكون دائماً: $\alpha > \tan^{-1} 3$

الحـــل :



معادلة المسار للمقذوف:

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$$

حيث (x,y) أي نقطة تقع على المسار ، وحيث أن النقطتان $(a,b),(b,a)$ تقعـــان على المسار فهما يحققان معادلته.

$$\therefore a = b\tan\alpha - \frac{gb^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(١)$$

$$b = a\tan\alpha - \frac{ga^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٢)$$

بضرب(١) في a^2 و(٢) في b^2 والطرح:

$$\therefore \underbrace{a^3 - b^3} = a^2 b\tan\alpha - a b^2\tan\alpha$$

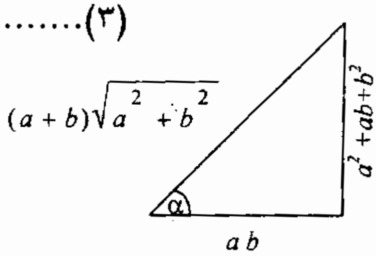
$$\therefore \underbrace{(a-b)(a^2 + ab + b^2)} = (a-b)\,ab\tan\alpha$$

$$\therefore a^2 + ab + b^2 = ab\tan\alpha$$

$$\therefore \tan\alpha = \frac{a^2+ab+b^2}{ab} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٣)$$

$$\sin\alpha = \frac{a^2+ab+b^2}{(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{ab}{(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}$$



المدى على المستوى الأفقي هو:

$$R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha = \frac{2v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha$$

$$= \frac{2v_0^2}{g}\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{(a+b)^2(a^2+b^2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٤)$$

ولكن: من(١) بالضرب في b ومن(٢) بالضرب في a ثم الطرح:

$$0 = (b^2-a^2)\tan\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}(b^3-a^3)$$

$$\therefore (b^2-a^2)\tan\alpha = \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}(b^3-a^3)$$

$$\therefore (b-a)(b+a)\tan\alpha = \frac{g}{2v_0^2\cos_2\alpha}(b-a)\left(a^2+ab+b^2\right)$$

$$\therefore (b+a)\quad \frac{a^2+ab+b^2}{ab} = \frac{g}{2v_0^2}\frac{(a+b)^2\left(a^2+b^2\right)}{a^2+b^2}\left(a^2+ab+b^2\right)$$

$$\therefore 1 = \frac{g}{2v_0^2}\frac{(a+b)(a^2+b^2)}{ab}$$

$$\therefore \frac{2v_0^2}{g} = \frac{(a+b)(a^2+b^2)}{ab} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٥)$$

بالتعويض من(٥) في(٤):

$$\therefore \quad R = \frac{(a+b)(a^2+b^2)}{ab}\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{(a+b)^2(a^2+b^2)} = \frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$$

وهو المطلوب أولاً.

<u>المطلوب الثاني:</u>

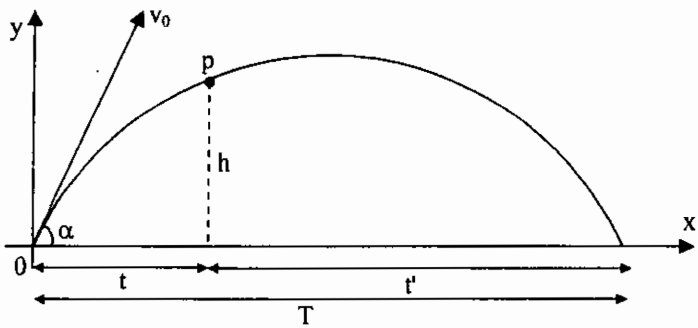
$$\tan\alpha = \frac{a^2+ab+b^2}{a+b} = \frac{a^2+3ab-2ab+b}{ab}$$
$$= \frac{3ab+(a-b)^2}{ab} = 3+\frac{(a-b)^2}{ab}$$

$$\therefore \tan\alpha > 3 \therefore \alpha > \tan^{-1} 3$$

وهو المطلوب

<u>مثال(٨):</u> إذا كان t هو الزمن الذي يأخذ ه مقذوف من لحظة القذف حتى الوصول إلى نقطة p على المسار وكان t' هو الزمن الذي يأخذه المقذوف من p حتى الوصول إلى الأفقي المار بنقطة القذف، أثبت أن ارتفاع نقطة p عن الأفقي يساوي $\frac{1}{2}gtt'$ حيث g عجلة الجاذبية الأرضية.

<u>الحل:</u>



نفرض أن h هو ارتفاع p عن الأفقي، زمن الطيران: $T=t+t'$

حيث أن زمن الطيران يعطي بالعلاقة:

$$T=\frac{2v_0\sin\alpha}{g} \rightarrow t+t'=\frac{2v_0\sin\alpha}{g} \qquad (1)$$

أيضاً فإن الأحداثي الرأسي عند أي لحظة زمنية يعطي بالعلاقة:

$$y=t(v_0\sin\alpha)-\frac{1}{2}gt^2$$

ومنها:

$$h = t(v_0 \sin\alpha) - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (2)$$

وبالتعويض عن $v_0 \sin\alpha$ من (1) حيث: $v_0 \sin\alpha = \frac{g}{2}(t+t')$

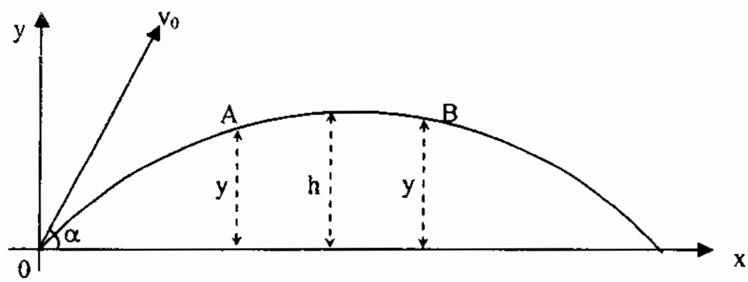
$$\therefore h = t\,[\frac{g}{2}(t+t')] - \frac{1}{2}gt^2 = [\frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{2}gtt'] - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}gtt'$$

وهو المطلوب.

مثال(٩): قذف جسيم بسرعة ابتدائية v_0 تميل بزاوية α على الأفقي، وأثناء حركته مر بالنقطتين A, B اللذين ارتفاعهما عن المستوى الأفقي هو $h\sin^2\alpha$ حيث h هو أقصى ارتفاع للمقذوف.

فإذا كان الزمن الذي يأخذه المقذوف حتى يصل إلى نقطة A هو t وكان الزمن الذي يأخذه المقذوف حتى يصل إلى نقطة B هو t' فأثبت أن الفترة الزمنية التي يأخذها المقذوف في الحركة من A إلى B هي: $t' - t = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}\cos\alpha$.

الحل:



حيث أن أقصى ارتفاع يصل إليه المقذوف يعطي بالعلاقة:

$$h = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha \qquad (1)$$

وأن ارتفاع المقذوف عن الأفقي عند أي لحظة يعطي بالعلاقة:

$$y = t(v_0 \sin\alpha) - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (2)$$

ومن رأسي المسألة فإن:

$$y = h\sin^2\alpha \qquad (3)$$

ومن (1):

$$v_0 \sin\alpha = \sqrt{2gh} \qquad (4)$$

بالتعويض من (4) ,(3) في (2):

$$h \sin^2 \alpha = t(\sqrt{2gh}) - \frac{1}{2} g t^2$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية في t يمكن كتابتها بالصورة:

$$t^2 - 2\sqrt{\frac{2h}{g}}\, t + \frac{2h}{g} \sin^2 \alpha = 0 \qquad (5)$$

نفرض أن جذري هذه المعادلة هما t, t'، فمن خواص جذور المعادلة من الدرجة الثانية:

(i) حاصل جمع الجذرين = − معامل t

$$\therefore t + t' = 2\sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad (6)$$

(ii) حاصل ضرب الجذرين = الحد المطلق:

$$\therefore t\, t' = \frac{2h}{g} \sin^2 \alpha \qquad (7)$$

وحيث أن:

$$(t'-t)^2 = t'^2 - 2tt' + t^2 = t'^2 - 2tt' + t^2 + (2tt' - 2tt')$$

$$= (t+t')^2 - 4tt' \qquad (8)$$

بالتعويض من (7) ,(6) في (8):

$$(t'-t)^2 = (2\sqrt{\frac{2h}{g}})^2 - 4(\frac{2h}{g} \sin^2 \alpha) = 4(\frac{2h}{g}) - 4(\frac{2h}{g} \sin^2 \alpha)$$

$$= 4[\frac{2h}{g}(1 - \sin^2 \alpha)] = 4[\frac{2h}{g} \sin^2 \alpha]$$

وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين:

$$\therefore t' - t = 2\sqrt{\frac{2h}{g}} \cos\alpha$$

وهو المطلوب.

تطبيق(٢): الحركة في دائرة (الحركة الدائرية)

(١) إيجاد سرعة وعجلة جسيم يتحرك في دائرة:

إذا تحرك الجسيم $p(x,y)$ على محيط دائرة نصف قطرها r بسرعة V في إتجاه المماس للدائرة عند p فإن:

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta \ldots\ldots\ldots\ldots(١)$$

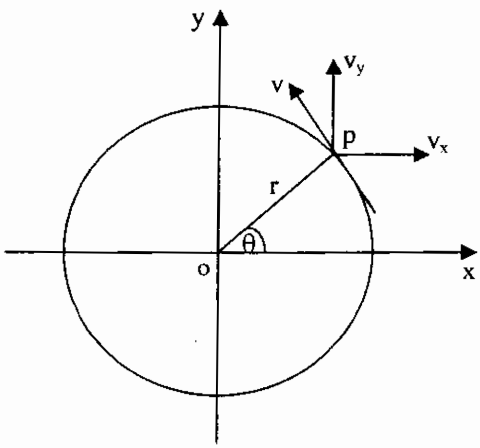
مركبتا السرعة في إتجاه تزايد x , y: $v_x = \dot{x}, v_y = \dot{y}$

بتفاضل (١) بالنسبة للزمن:

$$\dot{x} = v_x = r(-\sin\theta.\dot{\theta}) = -r\sin\theta.\dot{\theta} \ldots\ldots\ldots\ldots(٢)$$

$$\dot{y} = v_y = r(\cos\theta.\dot{\theta}) = r\cos\theta.\dot{\theta} \ldots\ldots\ldots\ldots(٣)$$

مركبتا العجلة: $a_x = \ddot{x}, a_y = \ddot{y}$



في إتجاه تزايد x, y

بتفاضل (٣)، (٢)بالنسبة للزمن:

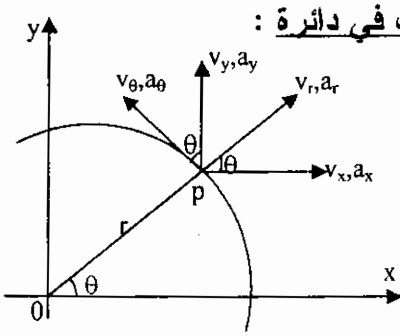
$$\ddot{x} = a_x = -r\left[\sin\theta.\ddot{\theta} + (\cos\theta.\dot{\theta})\dot{\theta}\right]$$

$$= -r\left[\sin\theta.\ddot{\theta} + \cos\theta.\dot{\theta}^2\right] \ldots(٤)$$

$$\ddot{y} = a_y = r\left[\cos\theta.\ddot{\theta} + (-\sin\theta.\dot{\theta})\dot{\theta}\right]$$

$$= r\left[\cos\theta.\ddot{\theta} - \sin\theta.\dot{\theta}^2\right] \ldots\ldots(٥)$$

المركبات القطبية للسرعة والعجلة لجسيم يتحرك في دائرة :



(١) المركبات القطبية للسرعة (v_r, v_θ)

من الشكل:

$$v_r = v_x\cos\theta + v_y\sin\theta \ldots\ldots\ldots\ldots(٦)$$

$$v_\theta = v_y\cos\theta - v_x\sin\theta \ldots\ldots\ldots\ldots(٧)$$

بالتعويض من(٣) ، (٢) في (٧) ، (٦) نحصل على:

$$v_r = (-r\sin\theta.\dot\theta)\cos\theta + (r\cos\theta.\dot\theta)\sin\theta$$
$$= -r\sin\theta\cos\theta\dot\theta + r\cos\theta\sin\theta\dot\theta = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٨)$$

أي أنه لا توجد مركبة للسرعة في إتجاه تزايد r وهذا طبيعي لأنه لو وجدت هذه المركبة لتحرك الجسيم بعيداً عن الدائرة، وفي هذه الحالة لا توجد حركة دائرية.

$$v_0 = \left(r\cos\theta\cdot\dot\theta\right)\cos\theta - \left(-r\sin\theta\cdot\dot\theta\right)\sin\theta = r\cos^2\theta.\dot\theta + r\sin^2\theta.\dot\theta$$
$$= r\dot\theta\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{=1} = r\dot\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٩)$$

أي أن مركبة السرعة في إتجاه تزايد θ (العمودي على r) أي في إتجاه المماس للدائرة، تكون موجودة وقيمتها $r\dot\theta$ وتسمى بالسرعة المماسيه.

وإذا كانت $\omega = \dot\theta = \dfrac{d\theta}{dt}$ هي السرعة الزاوية، فإن السرعة المماسيه (v) تكون:

$$v = v_\theta = r\dot\theta = r\omega$$

(٢) <u>المركبات القطبية للعجلة</u> : من الشكل:

$$a_r = a_x\cos\theta + a_y\sin\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (١٠)$$

$$a_\theta = a_y\cos\theta - a_x\sin\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (١١)$$

بالتعويض من(٥) ، (٤) في(١١) ، (١٠) :

$$a_r = -r(\sin\theta.\ddot\theta + \cos\theta.\dot\theta^2)\cos\theta + r(\cos\theta.\ddot\theta - \sin\theta.\dot\theta^2)\sin\theta$$

$$= -r\sin\theta\cos\theta.\ddot\theta - r\cos^2\theta.\dot\theta^2 + r\cos\theta\sin\theta.\ddot\theta - r\sin^2\theta.\dot\theta^2$$
$$= -r\dot\theta^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta) = -r\dot\theta^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (١٢)$$

$$a_\theta = r(\cos\theta.\ddot\theta - \sin\theta.\dot\theta^2)\cos\theta + r(\sin\theta.\ddot\theta + \cos\theta.\dot\theta^2)\sin\theta$$

$$= r\cos^2\theta.\ddot\theta - r\sin\theta\cos\theta.\dot\theta^2 + r\sin^2\theta.\ddot\theta + r\cos\theta\sin\theta.\dot\theta^2$$
$$= r\ddot\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta) = r\ddot\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (١٣)$$

من(١٣) و(١٢) نجد أن : العجلة لها مركبتان:

(i) مركبة في إتجاه r وتتجه نحو المركز 0 (الإشارة السالبة) وقيمتها $r\dot{\theta}^2$

(ii) مركبة في إتجاه θ (إتجاه المماس أي العمودي على r) وقيمتها $r\ddot{\theta}$.

القوة المؤثرة على جسيم يتحرك في دائرة :

حيث أن $F = ma$ فيكون لدينا قوتان

(i) قوة في إتجاه نصف القطر r ولكن نحو المركز مقدارها:

$$F_r = ma_r = mr\dot{\theta}^2 = mr\omega^2$$

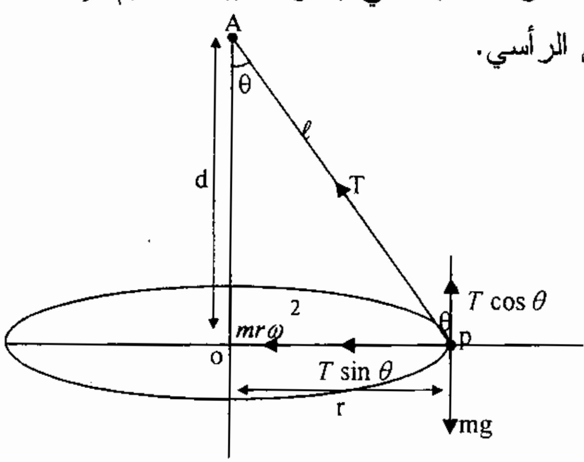
وتسمى بالقوة المركزية الجاذبة(لأنها تجذب الجسيم نحو المركز).

(ii) قوة في إتجاه المماس(عمودية على r) وقيمتها: $F_\theta = ma_\theta = mr\ddot{\theta}$

وتسمى بالقوة المماسيه.

(٢) الحركة في دائرة أفقية(البندول المخروطي):

جسيم كتلته m مربوط بخيط طوله ℓ مثبت طرفه الآخر في نقطة A التي تبعد مسافة d عن مركز الدائرة الأفقية التي يتحرك فيها الجسيم فإذا كانت θ هي زاوية ميل الخيط على الرأسي.



فالمطلوب إثبات الآتي:

(١) الزاوية θ تعطى بالعلاقة: $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{g}{\ell\omega^2}\right)$

(٢) المسافة الرأسية d تعطى بالعلاقة: $d = g/\omega^2$

(٣) زمن دورة واحدة للجسيم في حالة الزاوية θ صغيرة هو: $t = 2\pi\sqrt{\ell/g}$

(٤) الشد في الخيط يكون: $T = 4\pi^2 n^2 m\ell$ ، حيث n هو تردد الحركة (عدد الدورات في الثانية) g هي عجلة الجانبية، ω هي السرعة الزاوية

<u>الحـــل:</u> **القوة المؤثرة على الجسيم:**

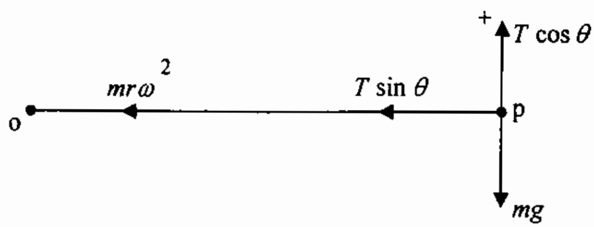
(١) وزنه mg إلى أسفل

(٢) قوة مركزية قيمتها $(mr\omega^2)$ نحو المركز ناتجة عن الحركة الدائرية

(٣) قوة شد في الخيط T في إتجاه الخيط، ولها مركبتان:

$T\cos\theta$ رأسياً إلى أعلى

$T\sin\theta$ أفقياً نحو المركز



<u>**معادلات الحركة :**</u>

(١) <u>في الإتجاه الأفقي</u>:

$$\underbrace{mr\omega^2} = T\sin\theta \text{ ....(١)}$$

حيث mrw^2 هنا هي القوة الأساسية (قوة الحركة).

(٢) <u>في الإتجاه الرأسي</u>: لا توجد قوة حركة(قوة أساسية)

$$\therefore T\cos\theta - mg = 0$$

$$\therefore T\cos\theta = mg \text{ ....(٢)}$$

ومن هندسة الشكل:

$$d = \ell \cos\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٣)$$

$$r = \ell \sin\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٤)$$

من(٤)،(١):

$$m \underbrace{(\ell \sin\theta)}\omega^2 = T \sin\theta$$

$$\therefore T = m\ell\omega^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٥)$$

بالتعويض من(٥) في(٢):

$$(m\ell\omega^2)\cos\theta = mg$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{g}{\ell\omega^2} \rightarrow \therefore \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{g}{\ell\omega^2}\right) \ldots\ldots(٦)$$

ولإيجاد المسافة d: حيث أن : $\cos\theta = \dfrac{g}{\ell\omega^2}$

بالتعويض في (٣):

$$\therefore \quad d = \ell\cos\theta = \ell\left(\frac{g}{\ell\omega^2}\right) = \frac{g}{\omega^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٧)$$

وهو المطلوب ثانياً .

<u>الزمن الدوري للحركة:</u> هو زمن دورة واحدة أي الزمن الذي يتم فيه الجسيم دورة كاملة (أي يقطع محيط الدائرة):

$$t = \frac{\text{المسافة المقطوعة}}{\text{السرعة}} = \frac{2\pi r}{\omega r} = \frac{2\pi}{\omega}$$

أيضاً: تردد الحركة: هو عدد الدورات الكاملة التي يعملها الجسيم في الثانية الواحدة .

$$n = \frac{1}{t} = \frac{\omega}{2\pi} \rightarrow \omega = 2\pi n$$

في المسألة: الزمن الدوري $t = \frac{2\pi}{\omega}$ ، حيث(من(٧)): $\omega^2 = g/d$

$$\therefore t = \frac{2\pi}{\sqrt{g/d}} = 2\pi\sqrt{d/g}$$

في حالة الزاوية θ صغيرة: $d \simeq \ell$

$$\therefore t = 2\pi\sqrt{\ell/g}$$

وهو المطلوب ثالثاً :

المطلوب الرابع: بالتعويض عن $\omega = 2\pi n$ في(٥) نحصل على:

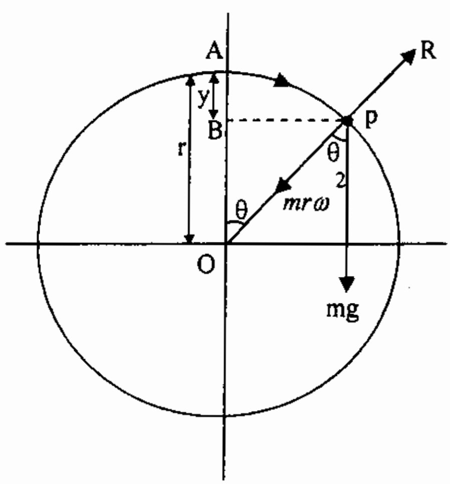
$$T = m\ell(2\pi n)^2 = 4\pi^2 n^2 m\ell$$

حيث n هو تردد الحركة.

وهو المطلوب .

(٣) الحركة في دائرة رأسية:

الحالة الأولى : حركة جسيم على السطح الخارجي للدائرة الرأسية:



جسيم ينزلق من السكون من أعلى نقطة A على السطح الخارجي لدائرة رأسية فوصل بعد زمن t إلى نقطة p ، وتكون المسافة الرأسية التي تحركها الجسيم هي :

$$y = AB = AO - BO$$

$$= r - r\cos\theta = r(1-\cos\theta) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(١)$$

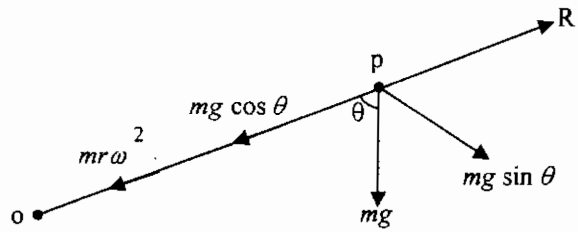
<u>القوي المؤثرة علي الجسيم :</u>

(١) وزن الجسيم mg إلى أسفل.

(٢) القوة الأساسية للحركة وهي القوة الناتجة عن الحركة في دائرة وقيمتها $mr\omega^2$ نحو المركز.

(٣) رد فعل سطح الدائرة على الجسيم (R).

<u>معادلات الحركة:</u>



في إتجاه المركز:

$$mr\omega^2 = mg\cos\theta - R \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٢)$$

حيث : $mr\omega^2$ هي القوة الأساسية للحركة .

<u>ملحوظة :</u> حيث أن

$$\therefore \omega = \frac{v}{r} \longleftarrow v = r\omega$$

وتصبح القوة المركزية:

$$F = mr\omega^2 = mr\left(\frac{v^2}{r^2}\right) = \frac{mv^2}{r}$$

وتصبح العلاقة (٢) :

$$\frac{mv^2}{r} = mg\cos\theta - R \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٣)$$

المطلوب في المسألة :

(i) رد فعل السلك الدائري (سطح الدائرة) على الجسيم .

(ii) متى يترك الجسيم المتحرك سطح الدائرة.

الحــل: المطلوب الأول: رد فعل الدائرة R

من (٣) :

$$R = mg\cos\theta - \frac{mv^2}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٤)$$

ولإيجاد v : حيث أن v هي سرعة الجسيم عند p

$$v^2 = v_0^2 + 2gy = 0 + 2g\cdot r(1-\cos\theta) = 2gr(1-\cos\theta)$$

بالتعويض في (٤) :

$$R = mg\cos\theta - \frac{m}{r}\left[2gr(1-\cos\theta)\right] = mg\cos\theta - 2mg\left[(1-\cos\theta)\right]$$

$$= \underbrace{mg\cos\theta} - 2mg + \underbrace{2mg\cos\theta} = 3mg\cos\theta - 2mg$$

$$= mg(\ 3\cos\theta - 2\ ) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٥)$$

وهو المطلوب أولاً .

المطلوب الثاني: متى يترك الجسيم سطح الدائرة ؟

يستمر الجسيم في حركته (أي يظل ملامساً لسطح الدائرة) طالما $R > 0$ ، وإذا ترك الجسيم سطح الدائرة فإن: $R = 0$

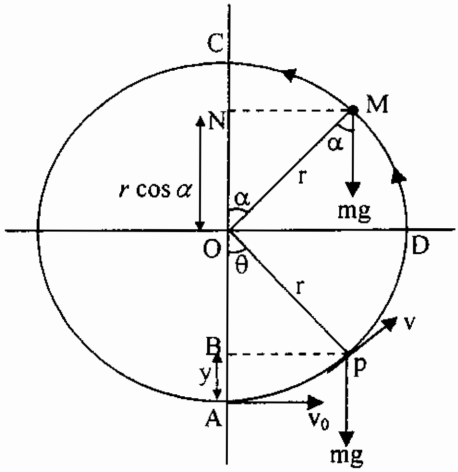
وبإستخدام (٥) :

$$\because 3\cos\theta - 2 = 0 \qquad \therefore \underbrace{mg}_{0\neq}\underbrace{(3-\cos\theta)}_{0=} = 0$$

$$\because 3\cos\theta = 2 \longrightarrow \cos\theta = \frac{2}{3} \because \theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

$\therefore$ يترك الجسيم سطح الدائرة عندما $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$.

<u>الحالة الثانية :</u> <u>حركة جسيم على السطح الداخلي لدائرة رأسية</u> :



قذف جسيم من أسفل نقطة في دائرة رأسية بسرعة v_0 متحركاً علــى الــسطح الداخلي للدائرة . والمطلوب هو :

(١) إثبات أن الجسيم يصل إلى المستوى الأفقي المار بمركز الدائرة عندما تكون سرعة القذف $v_0 \geq \sqrt{2g\,r}$

حيث r نصف قطر الدائرة.

(٢) إثبات أن شرط وصول الجسيم إلى أعلى نقطة في الدائرة هو: $v_0 \geq \sqrt{5g\,r}$

<u>الحــل:</u> <u>أولاً</u>: <u>ندرس الحركة في النصف السفلي من الدائرة</u>

سرعة الجسيم عند p : $v^2 = v_0^2 - 2gy$ [الحركة من أسفل إلى أعلى]

حيث y المسافة الرأسية التي تحركها الجسيم

$$y = AB = AO - BO = r - r\cos\theta = r\left(1-\cos\theta\right)$$

$$\therefore \quad v^2 = v_0^2 - 2g\,r\left(1-\cos\theta\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(١)$$

عندما يصل الجسيم إلى نقطة D فإن: $\theta = 90^\circ$ ، وحتى يصل الجسيم إلى D فإن سرعته $v \geq 0$

فمن (١) :

$$v_0^2 - 2g\,r\left(1 - \underbrace{\cos 90^\circ}_{0=}\right) \geq 0$$

$$\therefore v_0^2 - 2g\,r\,(1-0) \geq 0 \qquad \therefore v_0^2 \geq 2g\,r \qquad \therefore v_0 \geq \sqrt{2g\,r}$$

وهو المطلوب الأول .

<u>المطلوب الثاني:</u> ندرس الحركة في النصف العلوي من الدائرة:

سرعة الجسيم عند نقطة M : $\qquad v^2 = v_0^2 - 2g \cdot AN$

حيث المسافة الرأسية التي تحركها الجسيم هي

$$AN = AO + ON = r + r\cos\alpha = r\left(1+\cos\alpha\right)$$

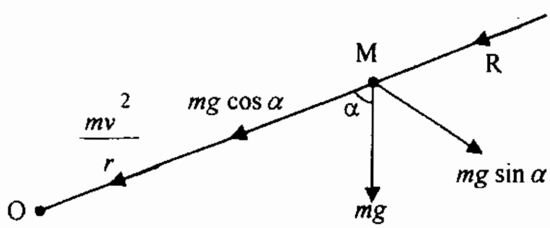
$$\therefore\ v^2 = v_0^2 - 2\,g\,r\,(1+\cos\alpha) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٢)$$

<u>ولإيجاد شرط إستمرار الجسيم في حركته فوق نقطة</u> M:

لكي يستمر الجسيم في حركتة في النصف العلوي للدائرة يجب أن يكون ملامساً للسطح الداخلي لها أي يجب أن يضغط على هذا السطح ، ويقابل ذلك رد فعل R من السطح على الجسيم (أي إلى الداخل)

ويكون شرط استمرار الحركة هو: $R \geq 0$

<u>ولإيجاد</u> R :



معادلة الحركة في إتجاه المركز O :

$$\frac{mv^2}{r} = mg\cos\alpha + R$$

$$\therefore R = \frac{mv^2}{r} - mg\cos\alpha$$

وحيث أن: $R \geq 0$

$$\therefore \frac{mv^2}{r} \geq mg\cos\alpha$$

$$\therefore \frac{v^2}{r} \geq g\cos\alpha \qquad \therefore\ v^2 \geq r\,g\cos\alpha$$

ولكن: من (٢) :

$$v^2 = v_0^2 - 2gr(1+\cos\alpha)$$

$$\therefore\ v_0^2 - 2gr(1+\cos\alpha) \geq rg\cos\alpha$$

$$\therefore\ v_0^2 \geq rg\cos\alpha + 2gr(1+\cos\alpha)$$

$$\therefore\ v_0^2 \geq 3gr\cos\alpha + 2gr$$

$$\geq gr(\ 3\cos\alpha + 2\ )\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٣)$$

وهو شرط استمرار الحركة فوق نقطة M .

ولإيجاد شرط وصول الجسيم إلى نقطة c (أعلى نقطة في الدائرة):

عند c : $\alpha = 0$

فمن (٣) :

$$v_0^2 \geq r\,g\left(3\underbrace{\cos 0}_{1=} + 2\right)$$

$$\geq rg(3+2) \geq 5rg$$

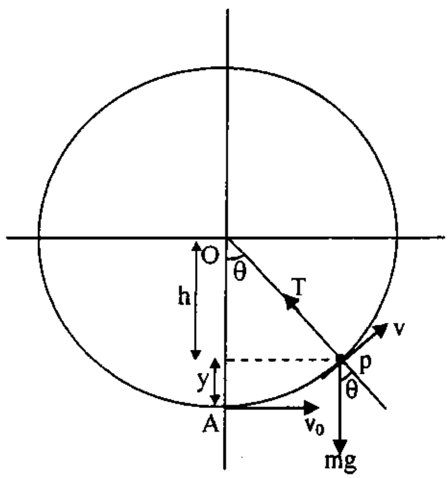
$$\therefore\ v_0 \geq \sqrt{5rg}$$

ومعنى هذا أنه لكي يصل الجسيم إلى أعلى نقطة في الدائرة يجب أن تكون سرعة قذفه الابتدائية $v_0 \geq \sqrt{5rg}$. وهو المطلوب.

أمثلة محلولة:

مثال(١): جسيم كتلته m معلق من نقطة ثابتة O بواسطة خيط طوله a . قذف الجسيم أفقياً بسرعة $2\sqrt{ag}$ من أسفل نقطة A في دائرة رأسية مركزها O. أوجد الإرتفاع الذي يصل إليه الجسيم فوق مركز الدائرة O عندما يرتخي الخيط ، وأثبت أن الشد في الخيط عندما يكون الجسيم على عمق $\left(\frac{1}{2}a\right)$ أسفل O هو $\frac{7}{2}m\,g$

الحل:



نفرض أن p هو وضع الجسيم عند أي لحظة بحيث أن $P\hat{O}A = \theta$

القوى المؤثرة:

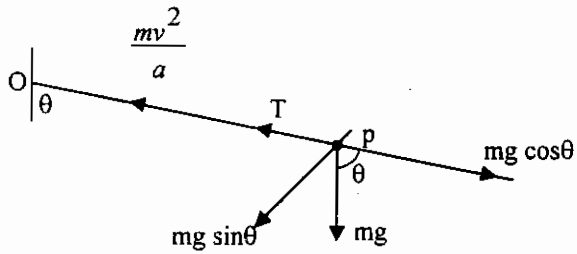
(١) وزن الجسيم mg إلى أسفل

(٢) الشد في الخيط T نحو المركز O

(٣) قوة الحركة (الناتجة عن الحركة في دائرة) $\frac{mv^2}{a}$ نحو المركز O

<u>معادلة الحركة</u>: في إتجاه المركز O

$$\frac{mv^2}{a} = T - mg\cos\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (١)$$



<u>السرعة عند</u> p :

$$v^2 = v_0^2 - 2gy$$

حيث: $y = a(1-\cos\theta)$

$$\therefore \quad v^2 = v_0^2 - 2ga(1-\cos\theta)$$

$$= 4ag - 2ga + 2ga\cos\theta$$

$$= 2ag + 2ag\cos\theta$$

$$= 2ag(1+\cos\theta) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٢)$$

وإذا كانت h هي عمق p أسفل O فإن : $h = a\cos\theta \longrightarrow \cos\theta = \frac{h}{a}$

بالتعويض في (٢) : $v^2 = 2ag + 2ag\left(\frac{h}{a}\right)$

$$= 2ag + 2gh = 2g(a+h) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٣)$$

وبالتعويض في (١) نوجد الشد في الخيط T

$$\therefore \quad T = \frac{mv^2}{a} + mg\cos\theta = \frac{m}{a}\left[2g(a+h)\right] + mg\left[\frac{h}{a}\right] = \frac{m}{a}\left[2ag + 3hg\right]$$

$$= \frac{mg}{a}\left[2a + 3h\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٤)$$

عندما يرتخي الخيط (أي يكون غير مشدود) $T=0 \longleftarrow$

$$\therefore \frac{mg}{a}[2a+3h]=0$$

$$[2a+3h]=0$$

$$\therefore 2a=-3h \longrightarrow h=-\frac{2}{3}a$$

أي أن الخيط يرتخي عند ارتفاع $\frac{2a}{3}$ فوق O (نتيجةً لإشارة السالب ــ)

وهو المطلوب الأول.

<u>المطلوب الثاني:</u> عندما يكون الجسيم على عمق $\frac{a}{2}$ أسفل $O \longleftarrow h=\frac{a}{2}$

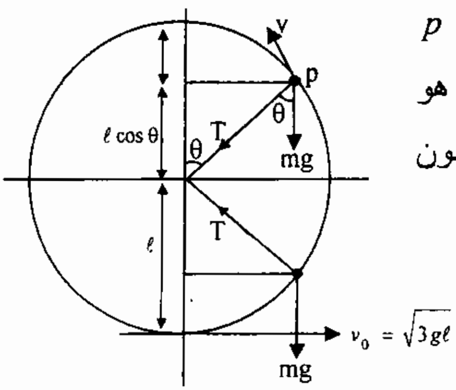
فبالتعويض في (٤) :

$$T=\frac{mg}{a}\left[2a+3\left(\frac{a}{2}\right)\right]=\frac{mg}{a}\left[\frac{7}{2}a\right]=\frac{7}{2}mg$$

وهو المطلوب .

<u>مثال(٢):</u> جسيم كتلته m معلق من نقطة ثابتة بواسطة خيط خفيف غير مرن طوله ℓ، فإذا بدأ الجسيم حركته بسرعته ابتدائية أفقية قدرها $\sqrt{3g\ell}$، أوجد الموضع الذي يرتخي عنده الخيط وأثبت أن سرعته حينئذ تساوي $\sqrt{\frac{1}{3}g\ell}$.

<u>الحل:</u> نفرض أن الجسيم كان عند الموضع p عندما انعدم الشد في الخيط [أي أن p هو الموضع الذي عنده ارتخى الخيط] فتكون معادلة الحركة



$$\frac{mv^2}{\ell}=T+mg\cos\theta$$

$$\therefore T=-mg\cos\theta+\frac{mv^2}{\ell} \qquad \_\_\_\_ (1)$$

السرعة عند نقطة p تعطي من:

$$v^2 = v_0^2 - 2g \cdot \ell(1+\cos\theta)$$
$$= 3g\ell - 2g\ell(1+\cos\theta) = g\ell(1-2\cos\theta) \qquad \_\_\_\_\_ (2)$$

بالتعويض من (2) في (1) نحصل على:

$$T = -mg\cos\theta + \frac{m}{\ell}\cdot g\ell(1-2\cos\theta) = mg(1-3\cos\theta) \qquad \_\_\_ (3)$$

ينعدم الشد في الخيط عندما $T = 0$ فمن (3) نجد أن:

$$mg(1-3\cos\theta) = 0 \ \rightarrow \ 1-3\cos\theta = 0 \ \rightarrow \ \cos\theta = \frac{1}{3}$$

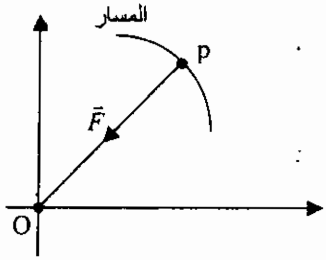
وهو الموضع الذي يرتخي عنده الخيط، وتكون سرعة الجسيم عندئذ هي [من (2)]

$$v^2 = g\ell\left[1-2(\tfrac{1}{3})\right] = \frac{1}{3}g\ell \ \rightarrow \ v = \sqrt{\frac{1}{3}g\ell}$$

على طول المماس عند p. وهو المطلوب.

تطبيق (٣) : المسارات المركزية

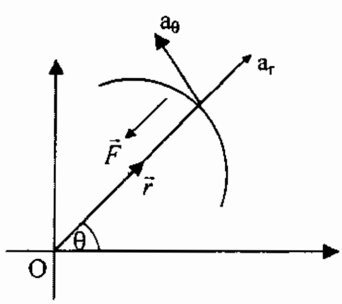
(١) تعريف المسار المركزي:



يعرف المسار المركزي بأنه المسار الذي يتحرك فيه جسيم p تحت تأثير قوة مركزية تتجه نحو مركز جذب ثابت O.

كمثال: حركة الكواكب (ومنها **الأرض**) حول الشمس في مسارات مركزية تحت تأثير قوة جذب تتجه نحو الشمس وتعرف هذه الحركة بالحركة الكوكبية.

(٢) ثابت المسارات المركزية (h) :



مركبتا العجلة في الإحداثيات القطبية:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(١)$$

$$a_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٢)$$

وحيث أن القوة المركزية دائماً في إتجاه المركز (r)

$$\therefore F_r = m\, a_r \quad \neq 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٣)$$

$$F_\theta = m a_\theta = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٤)$$

من (٤) و (٢) : $\frac{m}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)=0$

بالقسمة على $\left(\frac{m}{r}\right)$:

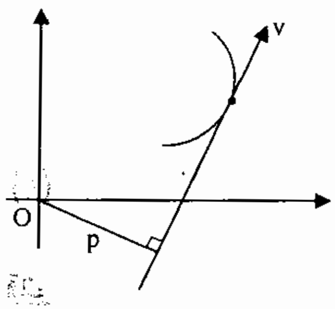
$$\therefore \frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)=0$$

$$\therefore r^2\dot{\theta}=const.\longrightarrow r^2\dot{\theta}=h \quad ....(٥)$$

حيث h ثابت يعرف بثابت المسارات المركزية.

(٣) <u>المعنى الطبيعي للثابت</u> h [عزم السرعة]: السرعة v دائماً تكون في إتجاه المماس للمسار .

بإسقاط العمود p من مركز الجذب O على إتجاه السرعة ويسمى p ذراع السرعة [العمود الساقط من نقطة الأصل على إتجاه السرعة]. ويعرف عزم السرعة بأنه حاصل ضرب السرعة في ذراعها $\therefore M=vp$



وقد أصطلح على أن يكون الثابت h مساوياً لعزم السرعة

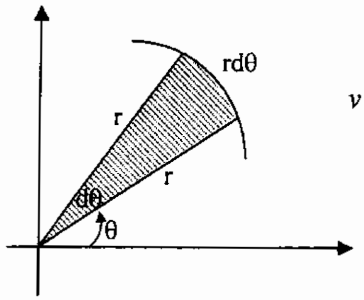
$$\therefore \quad h=v\,p \quad ....(٦)$$

وهذا هو المعنى الطبيعي للثابت الطبيعي للثابت h .

(٤) <u>السرعة المساحية</u> : تعرف السرعة المساحية بأنها معدل تغير المساحة بالنسبة للزمن ، أي المساحة المقطوعة في وحدة الزمن $\longrightarrow v_S=\frac{dS}{dt}$

<u>قانون ثبوت السرعة المساحية</u>: نأخذ عنصر مساحة على شكل مثلث قاعدته $(r\,d\theta)$ وارتفاعه r فتكون مساحته : $dS=\frac{1}{2}(r\,d\theta)(r)=\frac{1}{2}r^2d\theta$

السرعة المساحية :



$$v_S=\frac{dS}{dt}=\frac{\frac{1}{2}r^2d\theta}{dt}=\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}\;....(٧)$$

ولكن: من $\quad (0) \quad r^2\dot{\theta}=h$

$$\therefore v_S=\frac{1}{2}h=const.$$

حيث: h ثابت، ويعرف هذا بقانون ثبوت السرعة المساحية .

<u>ملخص:</u>

(١) المسار المركزي هو المسار الذي يتخذه جسيم يتحرك في المستوى تحت تأثير قوة مركزية تتجه دائماً نحو مركز جذب ثابت.

(٢) القوة المركزية تعرف بالعلاقة : $F=F_r=ma_r=m\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)$

(٣) ثابت المسارات المركزية (h) يعرف بالعلاقات الآتية :

(i) $h=r^2\dot{\theta}$

(ii) $h=vp=$ عزم السرعة

(iii) $h=2v_S=$ ضعف السرعة المساحية

(٤) السرعة المساحية ثابتة $\longleftarrow v_S=const.$ (قانون ثبوت السرعة المساحية)

<u>قانون السرعة في المسارات المركزية</u> : السرعة في الإحداثيات القطبية:

$$\because \vec{v}=v_r\hat{r}+v_\theta\hat{\theta} \qquad v_r=\dot{r},v_\theta=r\dot{\theta}$$

$$\therefore v^2=v_r^2+v_\theta^2=(\dot{r})^2+(r\dot{\theta})^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\dot{\theta}^2=\left(\frac{dr}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt}\right)^2+r^2\dot{\theta}^2$$

$$=\left(\frac{dr}{d\theta}.\dot{\theta}\right)^2+r^2\dot{\theta}^2=\dot{\theta}^2\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]$$

ولكن:

$$\dot{\theta}^2=\frac{h^2}{r^4}\longleftarrow\dot{\theta}=\frac{h}{r^2}\longleftarrow h=r^2\dot{\theta}$$

$$\therefore v^2=\frac{h^2}{r^4}\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]$$

$$=h^2\left[\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]\text{..........................}(١)$$

وبإستخدام المتغير الجديد u حيث : $u=\frac{1}{r}$

$$\therefore\quad \frac{du}{d\theta}=-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$$

وبالتربيع :

$$\therefore\ \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2=\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

وبالتعويض في (١) :

$$\therefore\quad v^2=h^2\left[u^2+\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right]$$

وبكتابة $u'=\frac{du}{d\theta}$

$$\therefore\quad v^2=h^2\left[u^2+u'^2\right]\text{...............}(٢)$$

وهو قانون السرعة في المسارات المركزية

وهو يعطي سرعة الجسيم المتحرك في مسار مركزي عند أي لحظة .

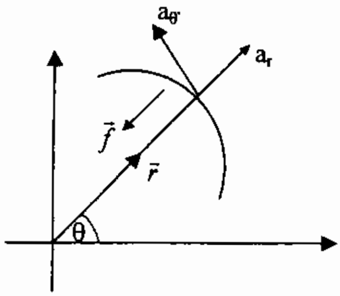
قانون القوة في المسارات المركزية : [المعادلة التفاضلية للمسار المركزي]

إذا كانت F هي القوة المؤثرة على وحدة الكتلة من جسيم يتحرك في مسار مركزي ، فإن قانون القوة هو :

$$F=h^2u^2\left[u+u''\right]$$

حيث h ثابت المسارات المركزية

$$u=\frac{1}{r},u''=\frac{d^2u}{d\theta^2}$$



<u>الإثبات</u> : إذا كانت $\vec{f}$ هي القوة المؤثرة على الجسيم المتحرك في مسار مركزي ، فإن:

معادلة الحركة في إتجاه $\vec{r}$: $ma_r = -f$

(f متجة دائماً نحو المركز O.)

بالقسمة على m : $a_r = -\dfrac{f}{m} = -F$

حيث $F = \dfrac{f}{m}$ هي القوة لوحدة الكتل في إتجاة المركز

ولكن : $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -F \;......(١)$ $\quad \therefore \quad a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$

وبإستخدام المتغير u حيث: $u = \dfrac{1}{r}$ ، والثابت h حيث: $h = r^2\dot{\theta}$

$$\therefore \quad \dot{\theta} = \frac{h}{r^2} = hu^2 \qquad \therefore \dot{\theta}^2 = h^2u^4$$

$$\therefore r\dot{\theta}^2 = \frac{1}{u}(h^2u^4) = h^2u^3 \;..................(٢)$$

أيضاً: حيث أن: $r = \dfrac{1}{u}$, $\dfrac{dr}{du} = -\dfrac{1}{u^2}$

$$\therefore \quad \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du}\cdot\frac{du}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

$$= \left(-\frac{1}{u^2}\right)\left(\frac{du}{d\theta}\right)(\dot{\theta}) = \left(-\frac{1}{u^2}\right)\left(\frac{du}{d\theta}\right)(hu^2) = -h\frac{du}{d\theta}$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta}\left(-h\frac{du}{d\theta}\right)\cdot\left(\dot{\theta}\right)$$

$$= -h\dot{\theta}\frac{d^2u}{d\theta^2} = -h\left(hu^2\right)\left(u''\right) = -h^2u^2u'' \;..........(٣)$$

بالتعويض من (٣) و (٢) في (١) : $\therefore \quad -h^2u^2u'' - h^2u^3 = -F$

$$\therefore \quad F = h^2u^2\left[u + u''\right] \;........................(٤)$$

وهو قانون القوة المطلوب .

أمثلة محلولة:

مثال(١): إذا كان الجسيم يتحرك في مسار مركزي على شكل دائرة معادلتها القطبية هي $r = a\cos\theta$ حيث a ثابت ، أثبت أن القوة المؤثرة على الجسيم نحو المركز تتناسب عكسياً مع $\left(r^5\right)$

الحل: المطلوب إثباته أنه إذا تحرك جسيم في مسار مركزي على شكل دائرة فإن $F \propto \dfrac{1}{r^5}$

نستخدم قانون القوة :

$$F = h^2u^2\left[u + u''\right]\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(١)$$

$$r = a\cos\theta$$

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{a\cos\theta} = \frac{1}{a}\sec\theta$$

$$D\left(\sec\theta\right) = \sec\theta\tan\theta$$

$$D\left(\tan\theta\right) = \sec^2\theta$$

$$u' = \frac{du}{d\theta} = \frac{1}{a}\underbrace{\sec\theta\tan\theta}$$

$$u'' = \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{1}{a}\left[\sec\theta\cdot\sec^2\theta + \tan\theta\cdot\sec\theta\tan\theta\right]$$

$$= \underbrace{\frac{1}{a}\sec\theta}\left[\sec^2\theta + \tan^2\theta\right] = u\left[\sec^2\theta + \tan\theta^2\right]$$

بالتعويض في قانون القوة (١) :

$$F = h^2u^2\left[u + u\left(\sec^2\theta + \tan^2\theta\right)\right]$$

$$= h^2u^2\left[u\left(\underbrace{1 + \tan^2\theta}_{=\sec^2\theta} + \sec^2\theta\right)\right] = h^2u^2\left[u\left(2\sec^2\theta\right)\right]$$

$$= 2h^2u^3\sec^2\theta\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٢)$$

ولكن : من معادلة المسار: $r = a\cos\theta$

$$\therefore \quad \sec\theta = \frac{a}{r} = au \longrightarrow \sec^2\theta = a^2u^2$$

بالتعويض في (٢) :

$$\therefore \quad F = 2h^2u^3\left(a^2u^2\right)$$

$$= \underbrace{2a^2h^2}u^5$$

$$= ku^5 = \frac{k}{r^5}$$

حيث : $k = 2a^2h^2$

$$\therefore F \propto \frac{1}{r^5}$$

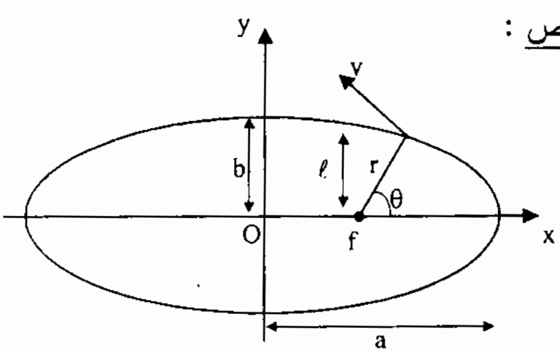
وهو قانون القوة إذا كان المسار المركزي على شكل دائرة .

مثال (٢) : إذا تحرك جسيم في مسار مركزي على شكل قطع ناقص معادلته القطبية هي :

$$r = \frac{\ell}{1 + e\ \cos\theta}$$

حيث ℓ نصف الوتر البؤري العمودي ، e الاختلاف المركزي وذلك تحت تأثير قوة F تتجه دائماً نحو البؤرة أثبت أن قانون القوة هو قانون التربيع العكسي أي أن $F \propto \frac{1}{r^2}$

الحل: الخواص الأساسية للقطع الناقص :



المعادلة الكرتيزية:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

المعادلة القطبية :

$$r = \frac{\ell}{1 + e\ \cos\theta}$$

المعادلات البارامترية: $x = a\cos\theta, y = b\sin\theta$

(١) العلاقة بين ℓ, a, b: $\ell = \dfrac{b^2}{a}$

(٢) العلاقة بين ℓ, e: $\ell = a\left(1-e^2\right)$

<u>ولحل المسألة</u> : نستخدم قانون القوة :

$$F = h^2u^2\left[u + u''\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(١)$$

ومن معادلة المسار:

$$r = \frac{\ell}{1+e\cos\theta}$$

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1+e\cos\theta}{\ell} = \frac{1}{\ell} + \frac{e}{\ell}\cos\theta \ldots\ldots\ldots\ldots(٢)$$

$$u' = \frac{du}{d\theta} = -\frac{e}{\ell}\sin\theta$$

$$u'' = \frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{e}{\ell}\cos\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٣)$$

بالتعويض من (٣) و (٢) في (١) :

$$\therefore\quad F = h^2u^2\left[\frac{1}{\ell} + \frac{e}{\ell}\cos\theta - \frac{e}{\ell}\cos\theta\right]$$

$$= \frac{h^2}{\ell}u^2 = ku^2 = \frac{k}{r^2}$$

حيث : $k = \dfrac{h^2}{\ell}$

$$\therefore F \propto \frac{1}{r^2}$$

∴ قانون القوة للمسار على شكل قطع ناقص هو قانون التربيع العكسي .

<u>مثال (٣):</u> أوجد قانون القوة تجاه المركز في حالة مجموعة المنحنيات

$$r^n = a^n\cos n\theta$$

ثم أدرس الحالات الخاصة عندما: $n = 1, n = \dfrac{1}{2}$

الحل: قانون القوة :

$$F = h^2u^2\left[u + u''\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (١)$$

مجموعة المنحنيات المعطاة: $r^n = a^n \cos n\theta$

وبإستخدام $u = \frac{1}{r}$

$$\frac{1}{u^n} = a^n \cos n\theta$$

$$\therefore u^n \cos n\theta = \frac{1}{a^n}$$

بتفاضل الطرفين بالنسبة إلى θ [حيث α ثابت] :

$$u^n\left(-n\sin n\theta\right) + nu^{n-1}\frac{du}{d\theta}\cdot\left(\cos n\theta\right) = 0$$

بقسمة الطرفين على nu^n :

$$-\sin n\theta + u^{-1}\underbrace{\frac{du}{d\theta}}\cos n\theta = 0$$

$$\therefore \frac{du}{d\theta} = u' = u\tan n\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٢)$$

بالتفاضل مرة ثانية:

$$u'' = \frac{d^2u}{d\theta^2} = u\left(n\sec^2 n\theta\right) + \frac{du}{d\theta}.\left(\tan n\theta\right)$$

$$= u\left(n\sec^2 n\theta\right) + \left(u\tan n\theta\right)\left(\tan n\theta\right)$$

$$= u\left[n\sec^2 n\theta + \tan^2 n\theta\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٣)$$

بالتعويض في قانون القوة (١) :

$$F = h^2u^2\left[u + u\left(\ n\sec^2 n\theta + \tan^2 n\theta\ \right)\right]$$

$$= h^2u^2\left[u\left(\ 1 + \tan^2 n\theta + n\sec^2 n\theta\ \right)\right]$$

$$= h^2u^2\left[u\left(\ \sec^2 n\theta + n\sec^2 n\theta\ \right)\right]$$

$$= h^2u^3\left[\left(1+n\right)\sec^2 n\theta\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٤)$$

ولكن: من معادلة المسار:

$$r^n = a^n \cos n\theta$$

$$\therefore \quad \sec n\theta = \frac{a^n}{r^n} = a^n u^n$$

$$\therefore \sec^2 n\theta = a^{2n} u^{2n}$$

وتصبح (٤) :

$$F = h^2 u^3 \left[(1+n) a^{2n} u^{2n} \right] = (1+n) h^2 a^{2n} u^{2n+3}$$
$$= (1+n) h^2 a^{2n} \left(\frac{1}{r^{2n+3}} \right)$$

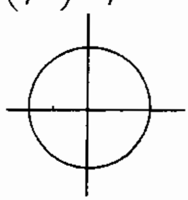
وهو قانون القوة المطلوب .

الحالات الخاصة:

(١) عندما $n=1$: معادلة المنحني: $r = a\cos\theta$ (وهو منحنى الدائرة)

قانون القوة :

$$F = \underbrace{2h^2a^2}\left(\frac{1}{r^5}\right) = \frac{k}{r^5}$$



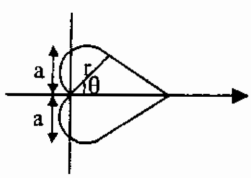
$\therefore F \propto \dfrac{1}{r^5}$ $\quad$ $k = 2h^2a^2$ حيث

(٢) عندما $n = \frac{1}{2}$:

معادلة المنحى : $r^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \cos\frac{\theta}{2}$ ومنها : $r = a\cos^2\frac{\theta}{2}$

وهي معادلة منحني الكاردويد (المنحني القلبي) $= \frac{1}{2}a(1+\cos\theta)$

حيث : $\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos\theta)$



قانون القوة :

$$F=\left(1+\frac{1}{2}\right)h^2a\frac{1}{r^{1+3}}=\frac{3}{2}ah^2\left(\frac{1}{r^4}\right)=\frac{3}{2}ah^2\left(\frac{1}{r^4}\right)=\frac{\alpha}{r^4}$$

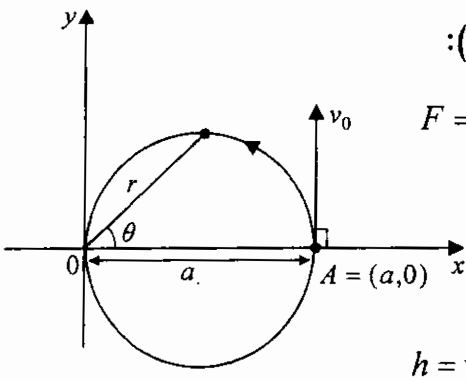
حيث : $\left|\alpha=\frac{3}{2}ah^2\right.$ $\qquad \therefore F\propto\frac{1}{r^4}$

مثال(٤): يتحرك جسيم في مسار دائري معادلته $r=a\cos\theta$ متأثراً بقوة مركزية تجذبه نحو مركز ثابت 0 ، فإذا بدأ الجسيم الحركة بسرعة ابتدائية $v_0=\frac{1}{a^2}\sqrt{\frac{k}{2}}$ من نقطة $A(a,0)$ في اتجاه عمودي على الخط الابتدائي $0x$، حيث k,a ثابتان.

المطلوب: (i) القوة المركزية المؤثرة على الجسيم عند أي نقطة في المسار .

(ii) سرعة الجسيم عند أي نقطة.

(iii) زمن مرور الجسيم بنقطة الأصل 0.



الحل: المعادلة التفاضلية للمسار (قانون القوة):

$$F=h^2u^2\left[u+\frac{du^2}{d\theta^2}\right] \quad \dots\dots\dots (١)$$

حيث: $h=$ عزم السرعة:

$$h=v_0a=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{k}{2}} \quad \dots\dots\dots(٢) \qquad \left|v_0=\frac{1}{a^2}\sqrt{\frac{k}{2}}\right.$$

$$u=\frac{1}{r}=\frac{1}{a\cos\theta}=\frac{1}{a}\sec\theta \qquad \dots\dots\dots(٣)$$

$$\therefore \frac{du}{d\theta}=\frac{1}{a}\sec\theta\tan\theta \qquad \dots\dots\dots(٤)$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}=\frac{1}{a}\sec\theta\left[2\sec^2\theta-1\right] \quad \dots\dots\dots (٥) \qquad \left|\tan^2\theta=\sec^2\theta-1\right.$$

بالتعويض من (5),(3),(2) في (1):

$$F=\frac{k}{2a^2}\left(\frac{\sec\theta}{a}\right)^2\left[\frac{1}{a}\sec\theta+\frac{1}{a}\sec\theta\left(2\sec^2\theta-1\right)\right]$$

$$=\frac{k\sec^2\theta}{2a^5}\left[2\sec^3\theta\right]=\frac{k}{a^2}\sec^5\theta=ku^5=\frac{k}{r^5}$$

وهو قانون القوة في حالة المسار الدائري. $\therefore\quad \boxed{F\propto\frac{1}{r^5}}$

وهو المطلوب أولاً.

<u>المطلوب الثاني:</u> سرعة الجسيم عند أي موضع:

نستخدم قانون السرعة: $v^2=h^2\left[u^2+\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right]$

فمن (4),(3),(2) نحصل على:

$$v^2=\frac{k}{2a^2}\left[\frac{\sec^2\theta}{a^2}+\frac{1}{a^2}\sec^2\theta\tan^2\theta\right]$$

$$=\frac{k}{2a^4}\left[\sec^2\theta+\sec^2\theta\,(\sec^2\theta-1)\right]=\frac{k}{2a^4}\left[\sec^4\theta\right]=\frac{k}{2}u^4$$

حيث $u=\frac{1}{a}\sec\theta$.

$$\therefore\ v=\sqrt{\frac{k}{2}}\,u^2=\sqrt{\frac{k}{2}}\left(\frac{1}{r^2}\right)\ \ldots\ldots\ldots\ldots(٦)$$

وهو المطلوب ثانياً.

<u>المطلوب الثالث:</u> حساب الزمن اللازم للوصول إلى 0 [حيث $\theta=\frac{\pi}{2}$]

حيث أن: $h=r^2\dot\theta$ فإن : $r^2\dot\theta=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{k}{2}}$

ولكن: $r=a\cos\theta\ \leftarrow$ $a^2\cos^2\theta\cdot\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{k}{2}}$

بفصل المتغيرات والتكامل:

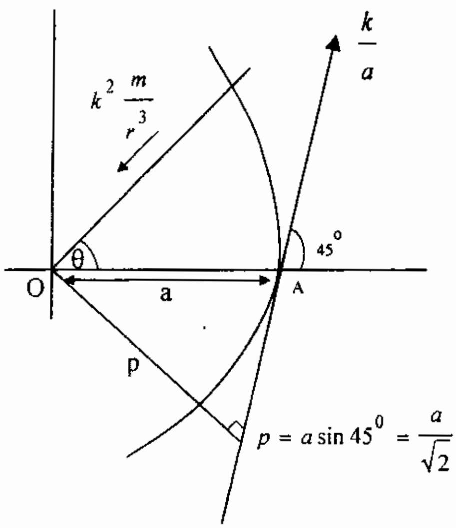
$$\int_0^t dt = \frac{a^3}{\sqrt{\frac{k}{2}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \, d\theta$$

$$\therefore t = \frac{a^3}{\sqrt{\frac{k}{2}}}\left[\frac{\pi}{4}\right] = \frac{a^3\sqrt{2}}{\sqrt{k}}\left[\frac{\pi}{4}\right] = \frac{2a^3}{\sqrt{2k}}\left[\frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi a^3}{2\sqrt{2k}}$$

وهو المطلوب ثالثاً.

<u>**مثال(٥):**</u> يتحرك جسيم تحت تأثير قوة مركزية تتجه دائماً نحو مركز ثابت O ومقدارها $\left(k^2 \frac{m}{r^3}\right)$ حيث m كتلة الجسيم ، k ثابت.

فإذا قذف الجسيم من نقطة A التي تبعد مسافة a من O بسرعة تساوي $\left(\frac{k}{a}\right)$ في إتجاه يميل بزاوية $\frac{\pi}{4}$ مع OA ، أثبت أن مسار الجسيم هو المنحنى: $r = ae^{\theta}$ حيث θ مقاسه من OA .



<u>**الحل :**</u>

القوة F لوحدة الكتل هي: $F = \frac{k^2}{r^3} = k^2u^3$

قانون القوة: $u = \frac{1}{r}$, $F = h^2u^2\left[u + u''\right]$

$$\therefore u + u'' = \frac{F}{h^2u^2} = \frac{k^2u^3}{h^2u^2} = \frac{k^2}{h^2}u$$

ولحل هذه المعادلة التفاضلية نضرب كلاً من الطرفين في $2u'$ ونكامل بالنسبة إلى θ .

فإذا كان:

$$u'=\frac{du}{d\theta}\ .\ u''=\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

$$2uu'+2u'u''=2\frac{k^2}{h^2}uu'$$

$$\therefore h^2(\ 2uu'+2u'u''\ )=2k^2uu'$$

وبالتكامل:

$$\therefore h^2(\ u^2+u'^2\ )=k^2u^2+C_1\ldots\ldots(١)$$

ولإيجاد C_1 : نستخدم قانون السرعة :

$$v^2=h^2\left[u^2+u'^2\right]$$

في البداية: $u=\frac{1}{a}\quad,\quad v=\frac{k}{a}$

من (١):

$$\frac{k^2}{a^2}=k^2\left(\frac{1}{a}\right)^2+C_1\qquad\qquad \therefore C_1=0$$

وتصبح العلاقة (١) :

$$\therefore h^2(\ u^2+u'^2\ )=k^2u^2\ldots\ldots\ldots\ldots(٢)$$

ولإيجاد h : عزم السرعة في بداية الحركة:

$$h=vp=\left(\frac{k}{a}\right)\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=\frac{k}{\sqrt{2}}$$

حيث p هي عزم السرعة :

$$p=a\sin 45^0=\frac{a}{\sqrt{2}}$$

بالتعويض في (٢) :

$$\frac{k^2}{2}\left[u^2+u'^2\right]=k^2u^2\quad \therefore u'^2=2u^2-u^2=u^2\quad \therefore\quad u'=\pm u=\frac{du}{d\theta}$$

وحيث أن الجسيم يتحرك في البداية بعيداً عن المركز فـــإن r تزيـــد بزيـــادة θ وبالتالي فإن u تقل بزيادة θ ولذلك نأخذ الإشارة السالبة.

$$\therefore \frac{du}{d\theta} = -u \qquad \text{.........................(٣)}$$

ولكن :

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} \quad , \quad \frac{1}{r} = u$$

وتصبح (٣) :

$$\therefore -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{r}$$

$$\therefore \frac{dr}{d\theta} = r \longrightarrow \frac{dr}{r} = d\theta$$

وبالتكامل :

$$\therefore \ln r = \theta + C_2$$

<u>ولإيجاد</u> C_2 : في البداية : $r = a \;,\; \theta = 0$

$$\therefore \ln r = \theta + \ln a$$

$$\therefore \ln\frac{r}{a} = \theta \qquad \therefore \frac{r}{a} = e^{\theta} \qquad \therefore r = a e^{\theta}$$

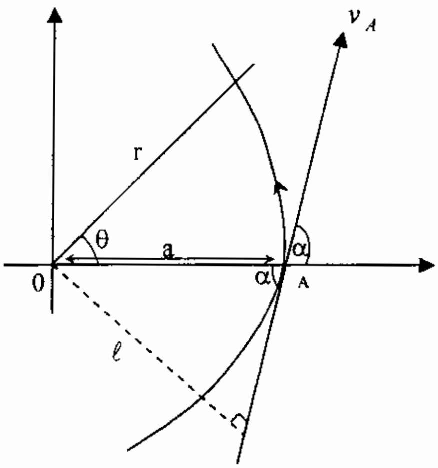
وهو المطلوب.

<u>مثال (٦)</u> : يتحرك جسيم كتلته m في مسار مركزي تحت تأثير قوة جذب مقدارها

$$f = mk\left(\frac{1}{r^4} + \frac{2a}{r^5}\right)$$

حيث a,k ثابتان.

فإذا قذف الجسيم من عند النقطة $A(a,0)$ بسرعة $v_A = \sqrt{\dfrac{5k}{3a^3}}$ وبزاوية ميـــل $\alpha = \tan^{-1}\dfrac{1}{2}$ مع الأفقي، أثبت أن معادلة المسار للجسيم هي: $r = a(1 + 2\sin\theta)$



<u>الحل</u>: المعادلة التفاضلية للمسار:

$$F = h^2 u^2 (u + u'') \qquad (1)$$

ومنها:

$$u'' + u = \frac{F}{h^2 u^2} \qquad (2)$$

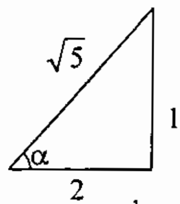
حيث F هي القوة لوحدة الكتل

فمن رأس المسألة نجد أن:

$$F = k(u^4 + 2au^5) \qquad (3)$$

أيضاً: فحيث أن h تمثل عزم السرعة:

$$\therefore h = v_A \cdot \ell = v_A \cdot a \sin\alpha = \sqrt{\frac{5k}{3a^3}} \cdot a\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \sqrt{\frac{k}{3a}}$$



$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore h^2 = \frac{k}{3a}$$

$$\therefore \frac{F}{h^2 u^2} = \frac{k(u^4 + 2a^2 u^5)}{\frac{k}{3a} u^2} = 3a(u^2 + 2au^3)$$

بالتعويض في (2):

$$u'' + u = 3a(u^2 + 2au^3) \qquad (4)$$

ولكي نكامل هذه المعادلة: نضرب في $2u' = 2\frac{du}{d\theta}$ ونكامل:

$$\int 2u'u'' + \int 2uu' = 3a\left[\int 2u^2 u' + 2a \int 2u^3 u'\right]$$

$$\therefore \int 2\frac{du}{d\theta}\frac{d^2u}{d\theta^2} + \int 2u\frac{du}{d\theta} = 3a\left[\int 2u^2 \frac{du}{d\theta} + 2a\int 2u^3 \frac{du}{d\theta}\right]$$

$$\therefore \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = 3a\left[2\frac{u^3}{3} + au^4\right] + c_1$$

ولإيجاد c_1: في البداية: $v_A=\sqrt{\frac{5k}{3a^3}}\ ,\ u=\frac{1}{a}\ ,\ h^2=\frac{k}{3a}$

$$\therefore c_1=0$$

$$\therefore \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2=2au^3+3a^2u^4$$

$$\therefore \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2=2au^3+3a^2u^4-u^2=u^2\left[3a^2u^2+2au-1\right]$$

$$\therefore \frac{du}{d\theta}=\pm\sqrt{3a^2u^2+2au-1}=\pm\sqrt{(3au-1)(au+1)}$$

نختار الإشارة $(-)$ حيث أن الجسيم عند بدء الحركة يبتعد عن مركز الجذب أي أن r تزيد بزيادة θ وبالتالي فإن u تقل بزيادة θ أي أن $\frac{du}{d\theta}$ يكون سالباً.

$$\therefore \frac{du}{d\theta}=-u\sqrt{(3au-1)(au+1)} \qquad (5)$$

وحيث أن $u=\frac{1}{r}$ فإن:

$$\frac{du}{d\theta}=-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$$

وبالتعويض في (5):

$$-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}=-\frac{1}{r^2}\sqrt{(\frac{3a}{r}-1)(\frac{a}{r}+1)}=-\frac{1}{r^2}\sqrt{(3a-r)(a+r)}$$

$$\therefore \frac{dr}{d\theta}=\sqrt{(3a-r)(a+r)}$$

ولإجراء هذا التكامل: نضع: $r=a+z$

$$\therefore \frac{dz}{d\theta}=\sqrt{(2a-z)(2a+z)}=\sqrt{4a^2-z^2}$$

$$\therefore \int\frac{dz}{\sqrt{4a^2-z^2}}=\int d\theta \quad \rightarrow \quad \sin^{-1}(\frac{z}{2a})=\theta+c_2$$

$\therefore z = 2a\sin(\theta + c_2)$

$\therefore r - a = 2a\sin\theta + c_2$

ولإيجاد c_2: في البداية $r = a \ , \theta = 0$

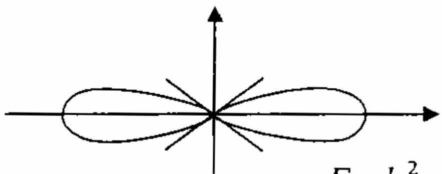
$\therefore 0 = 2a\ \sin(c_2) \quad \rightarrow \quad \sin c_2 = 0 \rightarrow c_2 = 0$

$\therefore r - a = 2a\ \sin\theta$

$\therefore r = a + 2a\sin\theta \ \rightarrow \ r = a(1 + 2\sin\theta)$

وهي معادلة المسار المطلوبة.

مثال(٧): أثبت أن القوة المؤثرة على جسيم يتحرك على المنحنى الذي معادلته القطبية $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ (ويعرف بمنحنى الليمنسكيت أو الوردة ذات العروتين) تتناسب عكسياً مع r^7.



الحل: من قانون القوة:

$$F = h^2 u^2 [u + u''] \quad , \quad u = \frac{1}{r} \quad , \quad u'' = \frac{d^2u}{d\theta^2}$$

ومن معادلة المنحنى:

$$r = a\sqrt{\cos 2\theta} \qquad \therefore \ u = \frac{1}{r} = \frac{1}{a\sqrt{\cos 2\theta}}$$

$$u' = \frac{du}{d\theta} = \frac{1}{a}\,\frac{\dfrac{1}{a\sqrt{\cos 2\theta}}(2\sin 2\theta)}{\cos 2\theta} = \frac{\sin 2\theta}{a(\cos 2\theta)^{3/2}}$$

$$u'' = \frac{d^2u}{d\theta^2}$$

$$= \frac{1}{a}\,\frac{(\cos 2\theta)^{3/2}\cdot\cos 2\theta\cdot(2) - (\sin 2\theta)\cdot(\frac{3}{2})(\cos 2\theta)^{1/2}\cdot(-\sin 2\theta)\cdot(2)}{(\cos 2\theta)^3}$$

$$=\frac{1}{a}\frac{2(\cos2\theta)^{3/2}\cos2\theta+3(\sin2\theta)^2(\cos2\theta)^{1/2}}{(\cos2\theta)^3}$$

$$=\frac{1}{a}\left[2(\cos2\theta)^{-1/2}+3(\sin2\theta)^2(\cos2\theta)^{-5/2}\right]$$

$$=\frac{1}{a}\left[2(\cos2\theta)^{-1/2}+3\left\{1-(\cos2\theta)^2\right\}(\cos2\theta)^{-5/2}\right]$$

$$=\frac{1}{a}\left[2(\cos2\theta)^{-1/2}+3(\cos2\theta)^{-5/2}\left\{1-(\cos2\theta)^2\right\}\right] \qquad (1)$$

ومن معادلة المنحنى:

$$\cos2\theta=\frac{r^2}{a^2}=\frac{1}{a^2u^2}\rightarrow(\cos2\theta)^2=\frac{1}{a^4u^4}$$

$$\therefore(\cos2\theta)^{1/2}=\frac{1}{au}\rightarrow(\cos2\theta)^{-1/2}=au\ ,\ (\cos2\theta)^{-5/2}=a^5u^5$$

بالتعويض في (1):

$$u''=\frac{1}{a}[2au+3a^5u^5\{1-\frac{1}{a^4u^4}\}]$$

$$=2u+3a^4u^5-3u=3a^4u^4-u \qquad (2)$$

بالتعويض في قانون القوة:

$$F=h^2u^2[u+u'']=h^2u^2[3a^4u^5]=(3h^2a^4)u^7$$

وبكتابة

$$k=3h^2a^4=cons.$$

$$u=\frac{1}{r}\rightarrow u^7=\frac{1}{r^7}$$

$$\therefore F=\frac{k}{r^7}\rightarrow F\propto\frac{1}{r^7}$$

وهو المطلوب.

مثال (٨) : **حركة الكواكب** [تطبيق على المسارات المركزية]

يعرف الكوكب بأنه جسم بارد معتم يستمد حرارته وضوءه من الشمس ، وهو يتحرك في مسار مركزي على شكل قطع ناقص تقع الشمس في إحدى بؤرتيه وتكون القوة المركزية المؤثرة على الكوكب خاضعة لقانون التربيع العكسي .

ومن أمثلة الكواكب : الأرض ، الزهرة ، المريخ ، المشترى، زحل ....

المطلوب :

(i) القوانين المنظمة لحركة الكواكب (وتعرف بقوانين كبلر).

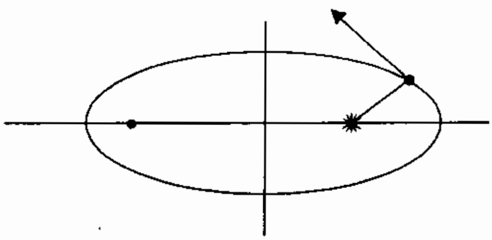
(ii) إثبات أن سرعة الكوكب عند أي نقطة في مساره هي:

$$v^2 = k\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

حيث $2a$ هي طول المحور الأكبر للقطع الذي يتحرك فيه الكوكب.

(iii) إثبات أن المتوسط الهندسي للسرعتين عند نهاية قطرين في القطع(المسار) يكون مقداراً ثابتاً.

الحل: (i) **قوانين كبلر (القوانين المنظمة لحركة الكواكب):**



القانون الأول:

تتحرك الكواكب حول الشمس في مسارات مركزية على شكل قطع ناقص، تقع الشمس في إحدى بؤرتيه.

نتيجة : حيث أن المسار هو قطع ناقص فتكون القوة المركزية المؤثرة على الكوكب خاضعة لقانون التربيع العكسي (مثال سابق). $F \propto \frac{1}{r^2}$

حيث r هي بعد الكوكب عن الشمس.

القانون الثاني: السرعة المساحية للكوكب تكون ثابتة أثناء الحركة .

" أي أن الكوكب يقطع في حركته مساحات متساوية في أزمنة متساوية "

الإثبات: حيث أن : السرعة المساحية $v_s = \frac{1}{2}h$

وأن $h = const.$ فإن : $v_s = const.$

القانون الثالث: مربع الزمن الدوري للكوكب يتناسب مع مكعب نصف المحــور الأكبر للمسار

الإثبات: الزمن الدوري هو الزمن الذي يقطع فيه الكوكب المسار كله (مسار القطع الناقص).

$$t = \text{المساحة}/\text{السرعة} = \frac{S}{V_s} \qquad \text{.......................(١)}$$

ولكن : S هي مساحة القطع الناقص

$$S = \pi ab \qquad \text{.......................(٢)}$$

أيضاً :

$$V_S = \frac{1}{2}h$$

ومن مثال الحركة في قطع ناقص(مثال سابق):

$$k = \frac{h^2}{\ell} \longrightarrow h^2 = k\,\ell \longrightarrow h = \sqrt{k\,\ell}$$

ومن خواص القطع :

$$\ell = \frac{b^2}{a}$$

$$\therefore \quad h = \sqrt{\frac{kb^2}{a}} = b\sqrt{\frac{k}{a}}$$

$$\therefore \quad V_S = \frac{1}{2}b\sqrt{\frac{k}{a}} \qquad \text{.......................(٣)}$$

وبالتعويض من (٣) و (٢) في (١) :

$$t = \frac{\pi ab}{\frac{1}{2}b\sqrt{\frac{k}{a}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{k}} \cdot a\sqrt{a} = \frac{2\pi}{\sqrt{k}} a^{\frac{3}{2}}$$

وبالتربيع:

$$\therefore \quad t^2 = \frac{4\pi^2}{k} a^3 = \lambda a^3$$

حيث : $\lambda = \frac{4\pi^2}{k} \leftarrow$

$$\therefore \quad t^2 \propto a^3$$

وهو المطلوب .

(ii) <u>إيجاد سرعة الكوكب عند أي نقطة في مساره</u> :

من قانون السرعة:

$$v^2 = h^2\left[u^2 + u'^2\right] \quad \text{.........................}(٤)$$

من معادلة القطع الناقص:

$$r = \frac{\ell}{1 + e\cos\theta}$$

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos\theta}{\ell} = \frac{1}{\ell} + \frac{e}{\ell}\cos\theta$$

$$u' = \frac{du}{d\theta} = -\frac{e}{\ell}\sin\theta$$

أيضاً:

$$h = \sqrt{k\ell} \longrightarrow h^2 = k\ell$$

وبالتعويض في (٤) :

$$v^2 = k\ell\left[\underbrace{\left(\frac{1}{\ell} + \frac{e}{\ell}\cos\theta\right)^2} + \left(-\frac{e}{\ell}\sin\theta\right)^2\right]$$

$$= k\,\ell\left[\underbrace{\frac{1}{\ell^2}+\frac{2e}{\ell^2}\cos\theta+\frac{e^2}{\ell^2}\cos^2\theta}+\frac{e^2}{\ell^2}\sin^2\theta\right]=\frac{k}{\ell}\left[1+2e\cos\theta+e^2\right]\ldots(٥)$$

ومن خواص القطع الهندسية:

$$\ell=a\left(1-e^2\right)\longrightarrow 1-e^2=\frac{\ell}{a}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٦)$$

ومن معادلة القطع:

$$u=\frac{1+e\ \cos\theta}{\ell}\longrightarrow e\ \cos\theta=u\ell-1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٧)$$

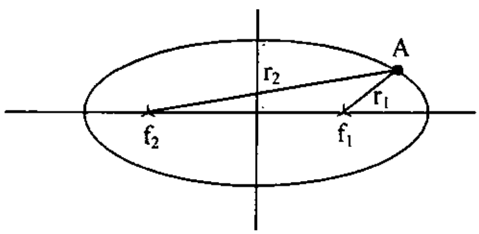
بالتعويض من (٧) و (٦) في (٥) :

$$v^2=\frac{k}{\ell}\left[1+2\left(u\ell-1\right)+e^2\right]=\frac{k}{\ell}\left[2u\ell-\left(\ 1-e^2\ \right)\right]$$

$$=\frac{k}{\ell}\left[2u\ell-\frac{\ell}{a}\right]=k\left[2u-\frac{1}{a}\right]=k\left[\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right]$$

وهي سرعة الكوكب عند أي نقطة في المسار.

(iii) <u>إثبات أن المتوسط الهندسي للسرعتين عند نهاية قطرين في المسار يكون ثابتاً.</u>



القطر هو المستقيم الواصل من البؤرة إلى أي نقطة على القطع

ومن خواص القطع الهندسية :

$r_1+r_2=2a$ [مجموع القطرين = طول المحور الأكبر]

السرعتان عند نهاية القطرين(عند A) هما:

$$v_1^2=k\left(\frac{2}{r_1}-\frac{1}{a}\right)\quad ، \quad v_2^2=k\left(\frac{2}{r_2}-\frac{1}{a}\right)$$

المتوسط الهندسي للسرعتين هو $\sqrt{v_1 v_2}$

$$\therefore \quad v_1^2 v_2^2 = k^2\left(\frac{2}{r_1}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{2}{r_2}-\frac{1}{a}\right) = k^2\left[\frac{4}{r_1 r_2}-\frac{2}{r_1 a}-\frac{2}{r_2 a}+\frac{1}{a^2}\right]$$

$$= k^2\left[\frac{4}{r_1 r_2}-\frac{2}{a}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)+\frac{1}{a^2}\right] = k^2\left[\frac{4}{r_1 r_2}-\frac{2}{a}\left(\frac{r_1+r_2}{r_1 r_2}\right)+\frac{1}{a^2}\right]$$

$$= k^2\left[\frac{4}{r_1 r_2}-\frac{2}{a}\left(\frac{2a}{r_1 r_2}\right)+\frac{1}{a^2}\right] = k^2\left[\frac{4}{r_1 r_2}-\frac{4}{r_1 r_2}+\frac{1}{a^2}\right] = \frac{k^2}{a^2}$$

$$\therefore \quad v_1 v_2 = \frac{k}{a} \longrightarrow \sqrt{v_1 v_2} = \sqrt{\frac{k}{a}} = const.$$

وهو المطلوب .

مسائل على الباب الثالث

(١) جسيم يتحرك في المستوى (xy) بحيث كان متجه موضعه هو $\vec{r} = \omega t\hat{i} + k\sin\omega t\hat{j}$ حيث k, ω ثابتان. أوجد :

(i) معادلة المسار الكرتيزية للجسيم.

(ii) سرعة وعجلة الجسيم مقداراً واتجاها.

(٢) اثبت أن الحركة المستوية الوحيدة التي ينطبق فيها اتجاها السرعة والعجلة هي الحركة الخطية (في خط مستقيم).

(٣) إذا بدأ جسيم الحركة من نقطة الأصل 0 بسرعة v_0 تميل على محور $0x$ بزاوية α وكانت مركبتا عجلة الحركة للجسيم هما $\ddot{x} = -k\dot{x}$, $\ddot{y} = -k\dot{y}$ حيث k ثابت ، أوجد المعادلات البارامترية للمسار وكذلك المعادلة الكرتيزية له ، وأثبت أن الجسيم يتحرك في خط مستقيم.

(٤) يتحرك جسيم من النقطة $(0,c)$ بسرعة مقدارها (αc) في الاتجاه الموجب لمحور x، حيث α, c ثابتان ، فإذا كانت مركبتا العجلة للجسيم هما $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = \alpha^2 y$ ، فأثبت أن معادلة المسار للجسيم هي المنحنى $y = c\cosh\frac{x}{c}$.

(٥) بدأ جسيم الحركة من السكون عند $t = 0$ من نقطة الأصل O على القطع المكافئ $y^2 = 2x$ الذي رأسه عند O ، فإذا كان مقدار السرعة ثابتاً ويساوي الوحدة وتحرك الجسيم على نصف القطع العلوي فأثبت أن الزمن الذي يأخذه الجسيم حتى يصل إلى نقطة $p(x, y)$ على القطع هو:

$$t = \frac{1}{2}\left[\sinh^{-1} y + y\sqrt{1+2x}\right]$$

أوجد كذلك مركبتي عجلة الجسيم عند أي موضع.

(٦) يتحرك جسيم في المستوى ، بحيث كانت مركبتا العجلة في إتجاهي θ ، r هما :
$\frac{2b}{r^3}\cos\theta, \frac{b}{r^3}\sin\theta$

فأثبت العلاقة الآتية: $\left(r^2\dot{\theta}\right)^2 = A - 2b\cos\theta$ ، حيث A, b ثابتان.

وإذا كانت $r = a$ عندما $t = 0$ فأثبت أن : $r^2 = a^2 + n^2t^2$ ، حيث $n = \frac{\sqrt{A}}{a}$

(٧) يتحرك جسيم p في المستوى بحيث كانت مركبتا سرعته ثابتتان وأحدهما في اتجاه الخط الثابت OX والأخرى في اتجاه عمودي على OP ، أوجد معادلة مسار الجسيم ، وإذا أثرت قوة تعمل دائماً في إتجاه PO فاثبت أن هذه القوة تتناسب عكسياً مع مربع بعدها عن O حيث O نقطة الأصل.

(٨) يتحرك جسيم بعجلة مركبتاها في إتجاهي محوري x, y هما:
$ae^{-\omega t}, \frac{1}{2}a\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right)$

حيث a, ω ثابتان ، فإذا قذف الجسيم من الموضع $\left(\frac{a}{\omega^2}, \frac{a}{\omega^2}\right)$ بسرعة $\left(\frac{a}{\omega}\right)$ في إتجاه مواز للاتجاه السالب لمحور x ، أوجد سرعة الجسيم في أية لحظة وكذلك معادلة المسار.

(٩) في مسار مركزي كانت القوة لوحدة الكتل هي : $F = ku^3\left(3 + 2a^2u^2\right)$

حيث k, a ثابتان ، $u = \frac{1}{r}$ ، فإذا قذف الجسيم من على بعد a من مركز الجذب بسرعة $\frac{\sqrt{5k}}{a}$ في اتجاه يصنع زاوية $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ مع نصف القطر المتجه r ، أثبت أن مسار الجسيم هو المنحنى $r = a\tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$.

(١٠) في مسار مركزها كانت القوة لوحدة الكتل التي تجذب الجسيم نحو المركز هي $F=k^2u^3(3+a^2u^2)$ حيث k,a ثابتان، $u=\frac{1}{r}$، فإذا قذف الجسيم من النقطة $A(a,0)$ في اتجاه يصنع زاوية 135° مع الخط الابتدائي بسرعة $v_V=\frac{2k}{a}$ ، أوجد معادلة المسار وسرعة الجسيم عند أي موضع وزمن الوصول إلى مركز الجذب.