الباب الثاني

علم الكينتيكا

(قوانين الحركة)

الباب الثاني

علم الكينتيكا (قوانين الحركة)

تعريفات أساسية:

(١) **الكتلة** m هي مقدار ما يحتويه الجسيم من مادة ، وهي كمية قياسية .

(٢) **كمية الحركة أو الزخم** $(\overline{p})$: هي حاصل ضرب كتلة الجسيم في سرعته .

$\overline{p} = m\overline{v}$ وهي كمية متجهة

(٣) **القوة** $(\overline{F})$: هي: (i) المؤثر الذي يؤثر على الجسيم فيغير من حالته إذا كان ساكناً أو متحركاً حركة منتظمة

أو : (ii) حاصل ضرب كتلة الجسيم في عجلته $\overline{F} = m\overline{a}$ وهي كمية متجهة

(٤) **الوزن** (W): هو مقدار قوة جذب الأرض للجسم. ويساوي: حاصل ضرب كتلة الجسيم في عجلة الجاذبية $W = m\,g$

واتجاهه دائماً إلى أسفل (نحو مركز الأرض).

قوانين الحركة(قوانين نيوتن):

(١) يظل الجسيم على حالته من حيث السكون أو الحركة المنتظمة (أي يكون في حالة قصور ذاتي) ما لم تؤثر عليه قوة خارجية تغير من هذه الحالة.

(٢) القوة المؤثرة على الجسيم تتناسب مع معدل التغير في كمية حركته.

$$\overline{F} \propto \frac{d\,\overline{p}}{d\,t} \longrightarrow \overline{F} = k\,\frac{d\,\overline{p}}{d\,t}$$

فإذا تم إختيار الوحدات (وحدات $\overline{F}, \overline{p}, t$) بحيث يكون $k = 1$

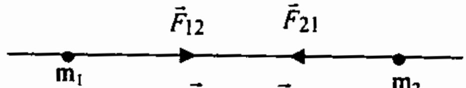
$$\therefore \quad \overline{F} = \frac{d\,\overline{p}}{d\,t}$$

وهي الصورة الرياضية لقانون نيوتن الثاني .

استنتاج : بالتعويض عن $\overline{p} = m\overline{v}$ حيث m كتلة الجسيم (ثابتة)

$$\therefore \ \vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{\vec{a}} = m\vec{a} \ \rightarrow \ \vec{F} = m\vec{a}$$

(٣) لكل فعل رد فعل مساو له في المقدار ومضاد في الإتجاه.



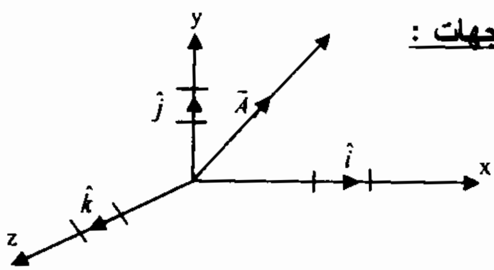
$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

وحدات القوة

النيوتن	الداين
قوة تؤثر على كتلة مقدارها $(1kg)$	قوة تؤثر علي كتلة مقدارها $(1gm)$
فتعطيها عجلة مقدارها $(1m/\sec^2)$	فتعطيها عجلة مقدارها $(1cm/\sec^2)$

$gm =$ جرام ، $kg =$ كيلو جرام ، $cm =$ سنتيمتر ، $m =$ متر ، $\sec =$ ثانية

<u>مراجعة سريعة على المتجهات :</u>



إذا كانت $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ هي متجهات وحدة (وحدة متجهات) أساسية في إتجاهات x, y, z ،

فإن أي متجه $\overline{A}$ يمكن كتابته بدلالة مركباته A_x, A_y, A_z بالصورة:

$$\overline{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

حاصل ضرب متجهين $\overline{B}$, $\overline{A}$:

قياسي

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$$

إتجاهي

$$\vec{A}\wedge\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{A}\wedge\vec{B} = -\vec{B}\wedge\vec{A}$$

<u>حالة خاصة :</u>

حالة المستوى (xy) : $\overline{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$, $\overline{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j}$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y$$

$$\overline{A}\wedge\overline{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & 0 \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(0) - \hat{j}(0) + \hat{k}\left(A_x B_y - A_y B_x\right) = \left(A_x B_y - A_y B_x\right)\hat{k}$$

<u>الشغل</u> (W) : إذا أثرت قوة $\vec{F}$ على جسيم فحركته خلال إزاحة $d\vec{r}$ ، فإن الشغل المبذول بواسطة القوة $\vec{F}$ خلال هذه الإزاحة هو: $dW = \vec{F}\cdot d\vec{r}$

[حاصل الضرب القياسي للقوة في الإزاحة]

ويكون الشغل الكلي المبذول : $W = \int \vec{F}\cdot d\vec{r}$

وحدات الشغل

إرج (erg)

إرج = داين . سم

$erg = dyne.cm$

جول (J)

جول = نيوتن . متر

$J = Neuton.m$

يلاحظ أن: الجول = 10^7 إرج

<u>القدرة</u> (p) : هي الشغل المبذول في الثانية الواحدة أو هي المعدل الزمني للشغل المبذول .

$$\therefore \quad p=\frac{dW}{dt}=\frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt}=\vec{F}\cdot\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}=\vec{F}\cdot\vec{v}$$

$\therefore$ القدرة هي حاصل الضرب القياسي للقوة في السرعة .

<u>وحدات القدرة:</u>

القدرة = شغل / زمن

إرج / ث

$(erg/\sec.)$

جول / ث (وات)

$J/\sec.\ [watt]$

<u>الطاقة</u> : هي مقدرة الجسيم على بذل شغل ، أي أنها عبارة عن: شغل مبذول وتوجد أنواع كثيرة من الطاقة أهمها الطاقة الميكانيكية

الطاقة الميكانيكية

طاقة الحركة (T)

هي الشغل المبذول في تحريك الجسيم من حالة السكون حتى يصل إلى سرعة معينة v .

$$T=\frac{1}{2}mv^2$$

طاقة الجهد أو طاقة الوضع (U)

هي الشغل المبذول ضد القوة المؤثرة على الجسيم في تحريكه بين نقطتين A,B .

$$U=-W_{A\to B}=-\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

<u>إثبات العلاقة</u> $T=\frac{1}{2}mv^2$: من تعريف طاقة الحركة :

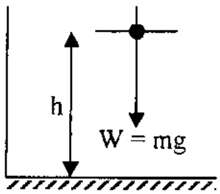
$$T=\int \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int \frac{d\vec{p}}{dt}\cdot d\vec{r}=\int \underbrace{d\vec{p}}\cdot\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}=\int \underbrace{d\left(m\vec{v}\right)}\cdot\underbrace{v}$$

$$=m\int \vec{v}\cdot d\vec{v}=m\int_0^v v\,dv=m\left[\frac{v^2}{2}\right]_0^v=\frac{1}{2}mv^2$$ وهو المطلوب .

<u>طاقة الجهد (أو الوضع) في حالة الحركة الرأسية:</u>

إذا هبط جسيم وزنه mg من إرتفاع h عن سطح الأرض

فإن طاقة جهده (أو طاقة الوضع) هي:



$$\underset{\text{الشغل}}{U}=\underset{\text{قوة الوزن}}{\underbrace{m\ g}}\ \underset{\text{مسافة}}{\underbrace{h}}$$

<u>قاعدة الشغل والطاقة:</u> الشغل المبذول في تحريك جسيم = التغير في طاقة حركته

أي أن: $W=T_2-T_1$ ،

حيث : T_1 = طاقة الحركة الإبتدائية ، T_2 = طاقة الحركة النهائية

<u>الإثبات :</u>

$$W=\int\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int\frac{d\vec{p}}{dt}\cdot d\vec{r}=\int\underbrace{d\vec{p}}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}=\int d\left(m\vec{v}\right)\cdot\vec{v}=m\int\underbrace{\vec{v}\cdot d\vec{v}}$$

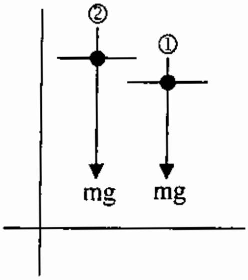
$$=m\int_{v_1}^{v_2}\underbrace{v\ \ dv}=m\left[\frac{v^2}{2}\right]_{v_2}^{v_2}=\frac{1}{2}m\left[v_2^2-v_1^2\right]=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2=T_2-T_1$$

حيث بدأ الجسيم حركته بسرعة v_1 وطاقة حركة T_1 وأنتهي بسرعة v_2 وطاقة حركة T_2

∴ قاعدة الشغل والطاقة هي: $W=T_2-T_1$ ∴

<u>مبدأ ثبوت (أو حفظ أو بقاء) الطاقة:</u> ينص هذا المبدأ على أن:

" مجموع طاقتي الحركة والجهد عند نقطة ما يساوي مجموعهما عند أي نقطة أخرى يساوي مقداراً ثابتاً "



عند النقطة (١): مجموع طاقتي الحركة والجهد = $T_1 + U_1$

عند النقطة (٢): مجموع طاقتي الحركة والجهد = $T_2 + U_2$

∴ مبدأ ثبوت الطاقة: $T_1 + U_1 = T_2 + U_2 = const.$

<u>الإثبات:</u>

طاقتي الحركة والجهد عند نقطة $A(2)$: $T_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 \quad , \quad U_2 = m\, g\, y_2$

طاقتي الحركة والجهد عند نقطة $B(1)$: $T_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 \quad , \quad U_1 = m\, g\, y_1$

المسافة التي تحركها الجسيم من A إلي B هي: $h = y_2 - y_1$

الشغل المبذول في إزاحة الجسيم من A إلى B (أي للمسافة h) هو:

$$W = mgh = mg(y_2 - y_1)$$

$$= mgy_2 - mgy_1 = U_2 - U_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (١)$$

أيضاً: هذا الشغل يساوي :

$$W = \int F\, dy = \int (ma) dy = m \int \left(v \frac{dv}{dy} \right) dy$$

$$= m \int_{v_2}^{v_1} v\, dv = m \left[\frac{1}{2} v^2 \right]_{v_2}^{v_1} = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_2^2 = T_1 - T_2 \ldots\ldots\ldots\ldots (٢)$$

بمساواة (٢) و (١): $\therefore U_2 - U_1 = T_1 - T_2 \therefore T_1 + U_1 = T_2 + U_2$

وهو المطلوب

نظريات علم الديناميكا

نظرية(١): القوة المؤثرة علي جسيم تساوي معدل التغير في كمية الحركة الخطية.

الإثبات: هذه النظرية هي عبارة عن قانون نيوتن الثاني الذي ينص على أن:

القوة المؤثرة= معدل التغير في كمية الحركة الخطية

$$\therefore \ \overline{F} = \frac{d\overline{p}}{dt}$$

نظرية(٢): عزم القوة المؤثرة علي جسيم $(\overline{M})$ يساوي معدل التغير في كمية الحركة الزاوية $(\overline{G})$. أي أن:

$$\overline{M} = \frac{d\overline{G}}{dt}$$

الإثبات: حيث أن:

$$\overline{M} = \vec{r} \wedge \overline{F} = \vec{r} \wedge \frac{d\overline{p}}{dt} \ ....(١)$$

أيضاً فإن:

$$\overline{G} = \vec{r} \wedge \overline{p}$$

$$\therefore \ \frac{d\overline{G}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\bar{r} \wedge \overline{p}\right] = \bar{r} \wedge \frac{d\overline{p}}{dt} + \frac{d\bar{r}}{dt} \wedge \overline{p} \ ....(٢)$$

ولكن:

$$\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}} \wedge \underbrace{\overline{p}} = \overline{V} \wedge \left(m\overline{V}\right) = m\left(\overline{V} \wedge \overline{V}\right) = 0$$

وتصبح المعادلة (٢):

$$\frac{d\overline{G}}{dt} = \bar{r} \wedge \frac{d\overline{p}}{dt} \ ....(٣)$$

من (٣) و (١) نجد أن:

$$\overline{M} = \frac{d\overline{G}}{dt}$$

وهو المطلوب

نظرية(٣): مبدأ ثبوت (أو حفظ) كمية الحركة الخطية: ينص هذا المبدأ على الآتي:

"إذا كانت القوة المؤثرة علي جسيم تساوي صفراً (أي كان الجسم متزنا) فـــإن كمية حركته الخطية تكون ثابتة " .

الإثبات: حيث أن:

$$\overline{F} = \frac{d\,\overline{p}}{dt}$$

فإذا كانت $\overline{F} = 0$ فإن: $\frac{d\,\overline{p}}{dt} = 0$ ، ومنها: $\overline{p} = const.$

نظرية(٤): مبدأ ثبوت (أو حفظ) كمية الحركة الزاوية :ينص هذا المبدأ علي الآتي:

" إذا كان العزم المؤثر علي جسيم يساوي صفراً فإن كمية حركته الزاوية تكون ثابتة " .

الإثبات: حيث أن:

$$\overline{M} = \frac{d\overline{G}}{dt}$$

فإذا كانت $\overline{M} = 0$ فإن: $\frac{d\overline{G}}{dt} = 0$ ، ومنها: $\overline{G} = const.$

الدفع $(\bar{I})$: يعرف دفع قوة خلال زمن معين بأنه: التكامل الزمني للقوة ، أي :

$\bar{I} = \int \overline{F}\, dt$ وهو كمية متجهة.

نظرية(٥): الدفع يساوي التغير في كمية الحركة الخطية ، أي أن: $\bar{I} = \overline{p_2} - \overline{p_1}$

الإثبات:

$$\bar{I} = \int \overline{F}\, dt = \int \frac{d\,\overline{p}}{dt}\, dt = \int d\,\overline{p} = \int d\left(m\,\bar{v}\right)$$

$$= m \int_{\overline{v_1}}^{\overline{v_2}} d\bar{v} = m\left[\bar{v}\right]_{\overline{v_1}}^{\overline{v_2}} = m\left[\overline{v_2} - \overline{v_1}\right] = m\,\overline{v_2} - m\,\overline{v_1} = \overline{p_2} - \overline{p_1}$$

وهو المطلوب.

<u>مثال</u>: يتحرك جسيم كتلته 2 وحدة تحت تأثير قوة تعطي من العلاقة:

$$\vec{F} = 24t^2\,\hat{i} + (36t - 16)\,\hat{j} - 12t\,\hat{k}$$

فـــإذا تحـــرك الجـــسيم فـــي البدايـــة بـــسرعة $\vec{v}_0 = 6\hat{i} + 15\,\hat{j} - 8\hat{k}$

فأوجد الآتي:

١) سرعة الجسيم عند أي لحظة وكذلك عجلته.

٢) كمية الحركة عند الزمنين $t = 1$، $t = 2$.

٣) القدرة عند $t = 1$، $t = 2$.

٤) طاقة الحركة عند $t = 1$، $t = 2$.

٥) الشغل المبذول في الفترة من $t = 1$ إلى $t = 2$.

٦) دفع القوة في الفترة الزمنية من $t = 1$ إلى $t = 2$.

٧) إثبات مبدأي: (i) الشغل والطاقة، (ii) الدفع وكمية الحركة.

<u>الحل</u>: <u>أولاً</u>: حيث أن

$$\vec{F} = 24t^2\,\hat{i} + (36t - 16)\,\hat{j} - 12t\,\hat{k} \qquad (1)$$

ولكن: $\vec{F} = m\vec{a} = 2\vec{a}$

$$\therefore\ \vec{a} = \frac{\vec{F}}{2} = 12t^2\,\hat{i} + (18t - 8)\,\hat{j} - 6t\,\hat{k} \qquad (2)$$

وهي عجلة الجسيم.

أيضاً بوضع $a = \dfrac{d\bar{v}}{dt}$ وبإجراء التكامل بعد فصل المتغيرات:

$$\therefore \int d\bar{v} = \int [12t^2\,\hat{i} + (18t - 8)\,\hat{j} - 6t\,\hat{k}]\,dt$$

$$\therefore\ \vec{v} = 4t^3\hat{i} + (9t^2 - 8t)\,\hat{j} - 3t^2\hat{k} + \vec{c}$$

حيث $\vec{c}$ ثابت التكامل ولإيجاده:

في البداية: $t=0$ ، $\vec{v}=\vec{v}_0=6\hat{i}+15\hat{j}-8\hat{k}$ ، ومنها

$$\vec{c}=\vec{v}_0=6\hat{i}+15\hat{j}-8\hat{k}$$

$$\therefore \vec{v}=4t^3\hat{i}+(9t^2-8t)\hat{j}-3t^2\hat{k}+(6\hat{i}+15\hat{j}-8\hat{k})$$

$$=(4t^3+6)\hat{i}+(9t^2-8t+15)\hat{j}-(3t^2+8)\hat{k} \qquad (3)$$

وهي سرعة الجسيم.

ثانياً: كمية الحركة:

$$\vec{p}=m\vec{v}=2\vec{v}=(8t^3+12)\hat{i}+(18t^2-16t+30)\hat{j}-(6t^2+16)\hat{k} \qquad (4)$$

عند $t=1$: بالتعويض عن $t=1$ في (4) نحصل على:

$$\vec{p}_1=20\hat{i}+32\hat{j}-22\hat{k} \qquad (5)$$

عند $t=2$: بالتعويض عن $t=2$ في (4) نحصل على:

$$\vec{p}_2=76\hat{i}+70\hat{j}-40\hat{k} \qquad (6)$$

ثالثاً: القدرة: من التعريف:

$$P=\vec{F}\cdot\vec{v}=[24t^2\hat{i}+(36t-16)\hat{j}-12t\hat{k}]\cdot[(4t^3+6)\hat{i}+ (9t^2-8t+15)\hat{j}-(3t^2+8)\hat{k}]$$

$$=(24t^2)(4t^3+6)+(36t-16)(9t^2-8t+15)+(12t)(3t^2+8)$$

$$=96t^5+360t^3-288t^2+764t-240 \qquad (7)$$

عند $t=1$: بالتعويض في (7) نحصل على:

$$P_1=692$$

عند $t=2$: بالتعويض في (7) نحصل على:

$$P_2=6088$$

رابعاً: طاقة الحركة:

$$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\times2\times(\vec{v}\cdot\vec{v})=(\vec{v}\cdot\vec{v})$$

عند $t=1$:

$$\therefore T_1=(\vec{v}\cdot\vec{v})_{t=1}=[(10\hat{i}+16\hat{j}-11\hat{k})\cdot(10\hat{i}+16\hat{j}-11\hat{k})]$$
$$=100+256+121=477 \qquad (8)$$

عند $t=2$:

$$\therefore T_2=(\vec{v}\cdot\vec{v})_{t=2}=[(38\hat{i}+35\hat{j}-20\hat{k})\cdot(38\hat{i}+35\hat{j}-20\hat{k})]$$
$$=1444+1225+400=3069 \qquad (9)$$

خامساً: الشغل المبذول في الفترة من $t=1$ إلى $t=2$

$$W=\int_1^2\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_1^2\vec{F}\cdot\vec{v}\,dt \qquad \left|\ \frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}\ \rightarrow d\vec{r}=\vec{v}\,dt\right.$$
$$=\int_1^2[(24t^2)(4t^3+6)+(36t-16)(9t^2-8t+15)+(12t)(3t^2+8)]dt$$
$$=\int_1^2[96t^5+360t^3-288t^2+764t-240]dt=2592 \qquad (10)$$

سادساً: الدفع: من التعريف:

$$\vec{I}=\int_1^2\vec{F}\,dt=\int_1^2[24t^2\hat{i}+(36t-16)\hat{j}-12t\hat{k}]dt$$
$$=[8t^3\hat{i}+(18t^2-16t)\hat{j}-6t^2\hat{k}]_1^2=56\hat{i}+38\hat{j}-18\hat{k} \qquad (11)$$

سابعاً: (i) إثبات مبدأ الشغل و الطاقة:

من (9), (8) نجد أن التغير في طاقة الحركة:

$$\Delta T=T_2-T_1=3069-477=2592 \qquad (12)$$

من (12), (10) نجد أن: $W=\Delta T$

أي أن الشغل المبذول خلال فترة معينة = التغير في طاقة الحركة.

(ii) أثبات مبدأ الدفع وكمية الحركة:

من (6) ,(5) نجد أن التغير في كمية الحركة:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = 56\hat{i} + 38\hat{j} - 18\hat{k} \qquad (13)$$

من (13) ,(11) نجد أن:

$$\vec{I} = \Delta \vec{p}$$

أي أن الدفع = التغير في كمية الحركة.

وهو المطلوب.

أمثلة محلولة على قوانين الحركة:

مثال(١): يتحرك جسيم كتلته $2kg$ في المستوى (xy) تحت تأثير القوة $\overline{F}=6\hat{i}+8\hat{j}$ مقدرة بالنيوتن ، فإذا كان متجه إزاحة الجسيم هو: $\vec{r}=at^2\hat{i}-b\left(t^2-t\right)\hat{j}$ حيث a,b ثابتان ، والإزاحة مقاسه بالمتر، أوجد:

(i) كل من a,b

(ii) الشغل المبذول بواسطة القوة $\overline{F}$ خلال زمن قدره $2\sec.$

(iii) طاقة حركة الجسيم عند الزمن $t=2\sec.$.

الحـــل:

$$\overline{F}=6\hat{i}+8\hat{j}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(١)$$

$$\vec{r}=at^2\hat{i}-b\left(t^2-t\right)\hat{j}\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots(٢)$$

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=2at\,\hat{i}-b\,(2t-1)\,\hat{j}\qquad\ldots.(٣)$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=2a\,\hat{i}-2b\,\hat{j}\ \ \ldots\ldots\ldots\ldots(٤)$$

ومن قانون نيوتن الثاني :

$$\overline{F}=m\,\vec{a}\quad\therefore\ 6\hat{i}+8\hat{j}=2\left(2a\hat{i}-2b\,\hat{j}\right)=4a\hat{i}-4b\hat{j}$$

بمقارنة معاملات $\hat{i},\hat{j}$ في الطرفين :

$$6=4a\longrightarrow a=\frac{3}{2}$$

$$8=-4b\longrightarrow b=-2$$

وهو المطلوب أولاً.

المطلوب الثاني: $W=\int\overline{F}\cdot d\vec{r}$

فمن (١) $\longleftarrow$ $\overline{F}=6\hat{i}+8\hat{j}$

ومن (٢) $\longleftarrow \quad d\vec{r} = \left[2at\hat{i} - b(2t-1)\hat{j}\right]dt$

$$\therefore W = \int_0^2 \left[(6)\cdot(2at) - (8)\cdot b(2t-1)\right]dt = \int_0^2 \left[12at - 8b(2t-1)\right]dt$$

$$= \left[6at^2 - 8b(t^2 - t)\right]_0^2 = \left[6\left(\frac{3}{2}\right)(2)^2 - 8(-2)(4-2)\right]$$

$$= [36 + 32] = 68\ J$$ جول

<u>**المطلوب الثالث:**</u> $T = \frac{1}{2} m v^2$

حيث : $v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v}$

$$\therefore v^2 = (2at)^2 + b^2(2t-1)^2 \qquad \therefore \quad T = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\left[(2at)^2 + b^2(2t-1)^2\right]$$

وتكون طاقة الحركة بعد $t = 2$ sec. هي :

$$a = \frac{3}{2}, \quad b = -2 \qquad \therefore \quad T = \left[(4a)^2 + b^2(3)^2\right]$$

$$= 72\ J$$

<u>**مثال(٢):**</u> يتحرك جسيم كتلته $2\ kg$ في مستوى رأسي بحيث كانت المركبتان الجبريتان للإزاحة في الاتجاهين الأفقي والرأسي بعد مرور زمن t من بدء الحركة هما: $x = 7t \quad , \quad y = 7t - 4.9\,t^2$

مقاسة بالمتر. أوجد الآتي:

(i) متجه كمية الحركة للجسيم.

(ii) متجه القوة المؤثرة على الجسيم.

(iii) التغير في طاقة حركة الجسيم في الفترة من $t = 0$ إلي $t = 10$.

(iv) الشغل المبذول من القوة المذكورة خلال نفس الفترة.

(v) إثبات قاعدة الشغل و الطاقة في الفترة المذكورة.

الحـــل:

متجه الإزاحة للجسيم: $\vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j}$

$$= 7t\,\hat{i} + (7t - 4.9\,t^2)\,\hat{j} \quad \text{..........................}(١)$$

متجه السرعة:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 7\hat{i} + (7 - 9.8t)\,\hat{j} \quad \text{..........................}(٢)$$

متجه العجلة:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 + (0 - 9.8)\,\hat{j}$$

$$= -9.8\,\hat{j} \quad \text{..........................}(٣)$$

المطلوب الأول:

متجه كمية الحركة : $\vec{p} = m\vec{v} = 2\left[7\hat{i} + (7 - 9.8t)\,\hat{j}\right]$

$$= 14\hat{i} + 2(7 - 9.8t)\,\hat{j} \quad \text{..........................}(٤)$$

المطلوب الثاني :

متجه القوة : $\vec{F} = m\,\vec{a} = 2\left(-9.8\hat{j}\right) = -19.6\,\hat{j}$

المطلوب الثالث:

طاقة الحركة: $E = \frac{1}{2} m\,v^2$

عند $t = 0$: من (٢):

$$\vec{v}\,\Big|_{t=0} = 7\hat{i} + 7\hat{j}$$

$$\therefore\ v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = (49) + (49) = 98$$

$$\therefore E\,\Big|_{t=0} = E_1 = \frac{1}{2}\cdot(2)\cdot(98) = 98\,J$$ جول

عند $t=10$: من (٢) :
$$\vec{v}\Big|_{t=10}=7\hat{i}+(7-98)\hat{j}=7\hat{i}-91\hat{j}$$
$$v^2=(7)^2+(91)^2$$
$$\therefore\quad E\Big|_{t=10}=E_2=\frac{1}{2}\cdot(2)\cdot\left[(7)^2+(91)^2\right]=8330\,J$$ جول

∴ التغير في طاقة الحركة:
$$E_2-E_1=8330-98=8232\,J\,.........(٦)$$

<u>**المطلوب الرابع:**</u>

الشغل المبذول في الفترة من $t=0$ إلي $t=10$
$$W=\int \underbrace{F}\cdot\underbrace{d\vec{r}}$$
$$=\int \underbrace{\left[0\hat{i}-19.6\,\hat{j}\right]}_{\downarrow\ \vec{F}\ (\text{من } (٥))}\cdot\underbrace{\left[7\hat{i}+(7-9.8\,t)\hat{j}\right]dt}_{\downarrow\ d\vec{r}\ (\text{من } (١))}$$
$$=-19.6\int_0^{10}(7-9.8\,t)dt=-19.6\left[7t-9.8\frac{t^2}{2}\right]_0^{10}$$
$$=-19.6\left[4.9\,t^2-7t\right]_0^{10}=19.6\left[490-70\right]=19.6\left[420\right]=8232\,J\,....(٧)$$

<u>المطلوب الخامس:</u> إثبات قاعدة الشغل والطاقة:

[الشغل المبذول خلال فترة معينة= التغير في طاقة الحركة خلال نفس الفترة]

من (٧) و (٦) : نجد أن: $W=E_2-E_1$ وهي قاعدة الشغل والطاقة.

<u>مثال(٣):</u> يتحرك جسيم كتلته $2kg$ تحت تأثير قوة مستوية $\vec{F}=a\hat{i}+b\hat{j}$

حيث a,b ثابتان. فإذا كان متجه الإزاحة للجسيم في المستوى (xy) هو:
$$\vec{r}=\left(\frac{3}{2}t^2-t\right)\hat{i}+\left(2t^2+t\right)\hat{j}$$

المطلوب: (i) إيجاد قيمتي a,b في القوة $\overline{F}$

(ii) تحقيق قاعدة الشغل والطاقة في الفترة من $t=1$ إلى $t=4$

(iii) إيجاد قدرة هذه القوة عند الزمن $t=3$

الحـــل:

$$\bar{r}=\left(\frac{3}{2}t^2-t\right)\hat{i}+\left(2t^2+t\right)\hat{j} \qquad \ldots\ldots\ldots(١)$$

$$\bar{v}=\frac{d\bar{r}}{dt}=(3t-1)\hat{i}+(4t+1)\hat{j} \ldots\ldots\ldots\ldots(٢)$$

$$\bar{\alpha}=\frac{d\bar{v}}{dt}=3\hat{i}+4\hat{j} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٣)$$

متجه القوة:

$$\overline{F}=m\bar{\alpha}=2\left(3\hat{i}+4\hat{j}\right)=6\hat{i}+8\hat{j} \quad \ldots\ldots(٤)$$

المطلوب الأول: من رأس المسألة:

$$\overline{F}=a\hat{i}+b\hat{j} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٥)$$

بمقارنة (٥) و (٤) :

$$a=6 \quad , \quad b=8$$

المطلوب الثاني: تحقيق قاعدة الشغل والطاقة:

نوجد أولاً: الشغل المبذول خلال الفترة من $t=1$ إلى $t=4$

$$W=\int \overline{F}\cdot d\bar{r}$$

$$=\int \underbrace{\left[6\hat{i}+8\hat{j}\right]}_{\overline{F}\ \text{(من (٤))}}\cdot\underbrace{\left[(3t-1)\hat{i}+(4t+1)\hat{j}\right]}_{d\bar{r}\ \text{(من (١))}}\,dt$$

$$=\int_1^4 \left[6(3t-1)+8(4t+1)\right]dt=\left[6\left(\frac{3}{2}t^2-t\right)+8\left(2t^2+t\right)\right]_1^4$$

$$=\left\{\underbrace{\left[6(24-4)+8(32+4)\right]}-\underbrace{\left[6\left(\frac{3}{2}-1\right)+8(2+1)\right]}\right\}$$

$$=\{408-27\}=381\,J \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٦)$$

ثم نوجد: التغير في طاقة الحركة خلال الفترة المذكورة $E=\frac{1}{2}m\,v^2$.

عند $t=1$:

$$\therefore\ \vec{v}\ \big|_{t=1}=(3-1)\hat{i}+(4+1)\hat{j}=2\hat{i}+5\hat{j}$$

$$\therefore\ v^2=\vec{v}\cdot\vec{v}=(2)^2+(5)^2=29 \qquad \therefore\ E\big|_{t=1}=E_1=\frac{1}{2}\cdot(2)\cdot(29)=29\,J$$

عند $t=4$:

$$\vec{v}\big|_{t=4}=(12-1)\hat{i}+(16+1)\hat{j}=11\hat{i}+17\hat{j}$$

$$\therefore\ v^2=\vec{v}\cdot\vec{v}=(11)^2+(17)^2=410$$

$$\therefore\ E\big|_{t=4}=E_2=\frac{1}{2}\cdot(2)\cdot(410)=410\ J$$

$\therefore$ التغير في طاقة الحركة:

$$E_2-E_1=410-29=381\ J\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٧)$$

من (٧) و (٦) يتضح أن : $W=E_2-E_1$

وهي قاعدة الشغل والطاقة .

<u>المطلوب الثالث</u>: إيجاد القدرة : حيث أن القدرة: $p=\vec{F}\cdot\vec{v}$

فمن: (٤) و (٢) :

$$p=\left[6\hat{i}+8\hat{j}\right]\cdot\left[(3t-1)\hat{i}+(4t+1)\hat{j}\right]$$

$$=6(3t-1)+8(4t+1)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٨)$$

هذه العلاقة تعطينا القدرة عن أي زمن t .

عندما $t=3$: $p=6(8)+8(13)=152\quad J/\sec.$

<u>مثال(٤)</u>: إذا كان متجه الموضع لجسيم كتلته m يعطي بدلالة الزمن t بالعلاقة

$$\vec{x}=(\frac{2t^3}{27}+\frac{2}{t+2}+5)\hat{e}$$

حيث $\hat{e}$ متجه وحدة ثابت، فأوجد متجه القوة المؤثرة على الجسيم عند أي لحظة وإذا كانت كتلة الجسيم m متغيرة وتعطي بدلالة الزمن بالعلاقـــة $m=\frac{(t+2)^2}{10}$ فأوجد متجه القوة في هذه الحالة، وكذلك مقدار تلك القوة عند اللحظة التي يسكن فيها الجسيم.

<u>**الحل:**</u> متجه الإزاحة يعرف بأنه الفرق الإتجاهي بين متجهي الموضع عند الزمنين $t=0, t=t$ ، أي أن $\vec{r}=\vec{x}-\vec{x}_0$، حيث

$$\vec{x}=(\frac{2t^3}{27}+\frac{2}{t+2}+5)\hat{e}$$

$$\vec{x}_0=(0+\frac{2}{2+0}+5)\hat{e}=6\hat{e}$$

$$\therefore\ \vec{r}=(\frac{2t^3}{27}+\frac{2}{t+2}+5-6)\hat{e}=(\frac{2t^3}{27}-\frac{t}{t+2})=\hat{e}$$

السرعة:

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\left[\frac{2t^2}{9}-\frac{(t+2)(1)-(t)(1)}{(t+2)^2}\right]\hat{e}=(\frac{2t^2}{9}-\frac{2}{(t+2)^2})\hat{e}$$

العجلة:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\left[\frac{4t}{9}+4(t+2)^{-3}\right]\hat{e}$$

القوة: (في حالة ثبوت الكتلة):

$$\vec{F}=m\vec{a}=m\left[\frac{4t}{9}+4(t+2)^{-3}\right]\hat{e}$$

وإذا كانت $m=\frac{(t+2)^2}{10}$، فإن القوة (في حالة تغير الكتلة):

$$F=\frac{d}{dt}(m\vec{v})=\frac{d}{dt}\left[\frac{(t+2)^2}{10}\left\{\frac{2t^2}{9}-\frac{2}{(t+2)^2}\right\}\right]\hat{e}$$

$$=\frac{d}{dt}\left[\frac{2}{90}t^2(t+2)^2-\frac{1}{5}\right]\hat{e}=\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{45}(t^4+4t^3+4t^2)-\frac{1}{5}\right]\hat{e}$$

$$=\frac{1}{45}\left[4t^3+12t^2+8t\right]\hat{e}$$

عندما يسكن الجسيم فإن $v=0$:

$$\frac{t}{3}=\frac{1}{t+2} \leftarrow \frac{2t^2}{9}=\frac{2}{(t+2)^2}$$

$$\therefore\ t^2+2t-3=0 \ \rightarrow\ t=1$$

وفي هذه اللحظة يكون مقدار القوة

$$F=\left|\bar{F}\right|=\frac{1}{45}[4+12+8]=\frac{24}{45}=\frac{8}{15}=0.53$$

وهو المطلوب.

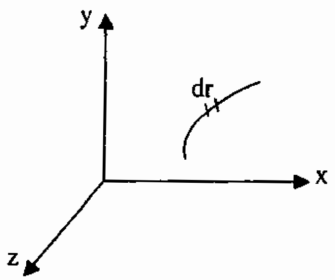
<u>مثال(٥):</u> أوجد الشغل المبذول في تحريك جسيم تحت تأثير القوة الفراغية:

$$\bar{F}=3x\ y\ \hat{i}-5z\ \hat{j}+10x\ \hat{k}$$

على طول المنحنى الفراغي الذي يتحدد بالمعادلات البارامترية

$$x=t^2+1\quad ,y=2t^2\quad ,\quad z=t^3$$

وذلك في الفترة من $t=1$ إلى $t=2$



<u>الحل:</u>

متجه الإزاحة للجسيم في الفراغ (xyz):

$$\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$$

$$\therefore\quad \vec{r}=\left(t^2+1\right)\hat{i}+2t^2\hat{j}+t^3\hat{k}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(١)$$

ويكون عنصر الطول في الفراغ :

$$d\vec{r}=dx\hat{i}+dy\hat{j}+dz\hat{k}$$

$$=\left[2t\,\hat{i}+4t\,\hat{j}+3t^2\,\hat{k}\right]\ dt\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٢)$$

المعادلة (٢) تعرف بالمعادلة الإتجاهية للمنحنى الفراغي المحدد بالمعادلات البارامترية المعطاة :

$$x=f_1(t),y=f_2(t),z=f_3(t)$$

ولإيجاد الشغل المبذول خلال زمن معين: $W = \int \overline{F} \cdot d\overline{r}$

يجب الحصول على $\overline{F}$ بدلالة الزمن t :

$$\overline{F} = 3xy\,\hat{i} - 5z\,\hat{j} + 10x\,\hat{k}$$
$$= 3\left(t^2+1\right)\left(2t^2\right)\hat{i} - 5t^3\,\hat{j} + 10\left(t^2+1\right)\hat{k}$$
$$= 6t^2\left(t^2+1\right)\hat{i} - 5t^3\hat{j} + 10\left(t^2+1\right)\hat{k} \;\ldots\ldots\ldots(٣)$$

ويكون الشغل المبذول على طول المنحى الفراغي المعطى :

$$W = \int \overline{F} \cdot d\overline{r}$$
$$= \int \left[12t^3\left(t^2+1\right) - 20t^4 + 30t^2\left(t^2+1\right)\right]dt$$
$$= \int_1^2 \left[12t^5 + 10t^4 + 12t^3 + 30t^2\right]dt$$
$$= \left[2t^6 + 2t^5 + 3t^4 + 10t^3\right]_1^2 = 303 \;\; J$$

وهو المطلوب.

<u>مثال(٦):</u> جسيم كتلته $2kg$ يتحرك في مجال قوة فراغية تعتمد على الزمن t وتعطى بالعلاقة: $\overline{F} = 24t^2\hat{i} + (36t - 16)\hat{j} - 12t\hat{k}$

فبفرض أن الجسيم بدأ حركته من الوضع $\overline{r_0} = 3\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ وبسرعة إبتدائية: $\overline{v_0} = 6\hat{i} + 15\hat{j} - 8\hat{k}$

أوجد: (i) سرعة الجسيم عند أي لحظة t

(ii) الموضع عند اللحظة t .

<u>الحــل:</u>

<u>أولاً: لإيجاد السرعة:</u>

$$\overline{F} = m\overline{a} = 2\frac{d\overline{v}}{dt} \longrightarrow \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{1}{2}\overline{F}$$

وبالتعويض عن $\vec{F}$:

$$\therefore \frac{d\vec{v}}{dt} = 12t^2\hat{i} + (18t - 8)\hat{j} - 6t\hat{k}$$

وبفصل المتغيرات والتكامل :

$$\int d\vec{v} = \int [12t^2\hat{i} + (18t - 8)\hat{j} - 6t\,\hat{k}]dt$$

$$\therefore \vec{v} = 4t^3\,\hat{i} + (9t^2 - 8t)\hat{j} - 3t^2\,\hat{k} + \vec{C}_1 \,\ldots\ldots\ldots (١)$$

ولإيجاد $\overline{C_1}$: في البداية $t = 0$ ، $\vec{v} = \overrightarrow{v_0} = 6\hat{i} + 15\hat{j} - 8\hat{k}$

$$\therefore \quad 6\hat{i} + 15\hat{j} - 8\hat{k} = \overline{C_1}$$

بالتعويض في (١) نحصل على:

$$\vec{v} = (4t^3 + 6)\hat{i} + (9t^2 - 8t + 15)\hat{j} - (3t^2 + 8)\hat{k} \,\ldots (٢)$$

ثانياً : **لإيجاد الموضع** : نضع $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ في (٢) وبفصل المتغيرات والتكامل:

$$\therefore \quad \int d\vec{r} = \int \left[(4t^3 + 6)\hat{i} + (9t^2 - 8t + 15)\hat{j} - (3t^2 + 8)\hat{k}\right]dt$$

$$\therefore \quad \vec{r} = \left[(t^4 + 6t)\hat{i} + (3t^3 - 4t^2 + 15t)\hat{j} - (t^3 + 8t)\hat{k}\right] + \overline{C_2}$$

ولإيجاد $\overline{C_2}$: في البداية: $t = 0$ ، $\vec{r} = \vec{r}_0 = 3\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$

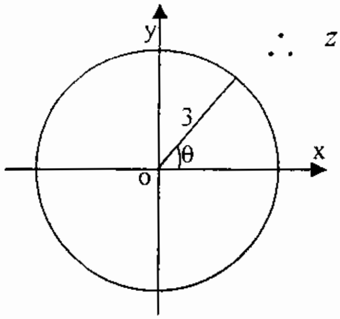
$$\therefore \quad \overline{C_2} = 3\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$$

$$\vec{r} = (t^4 + 6t + 3)\hat{i} + (3t^3 4t^2 + 15t - 1)\hat{j} + (4 - t^3 - 8t)\hat{k} \,\ldots\ldots (٣)$$

وهو المطلوب.

مثال (٧): أوجد الشغل المبذول في تحريك جسيم في المستوى (xy) لمرة واحدة حول دائرة نصف قطرها 3 وحدات ويقع مركزها عند نقطة الأصل ، إذا كان الجسيم يتحرك تحت تأثير القوة:

$$\vec{F} = (2x - y + z)\hat{i} + (x + y - z^2)\hat{j} + (3x - 2y + 4z)\hat{k}$$



الحـل: حيث أن الحركة تتم في المستوى xy : $z=0$ $\therefore$

$$\vec{F}=(2x-y)\hat{i}+(x+y)\hat{j}+(3x-2y)\hat{k}$$

وحيث أن الحركة هي في المستوى xy :

$$\therefore \quad d\vec{r}=dx\hat{i}+dy\hat{j}$$

ويكون الشغل المبذول :

$$W=\int \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int \left[\ (2x-y)dx+(x+y)dy\ \right]\ldots\ldots(١)$$

ولحساب هذا التكامل: حيث أن المعادلات البارامترية للدائرة:

$$x=a\cos\theta\ ,\ y=a\sin\theta$$

θ تتغير من $0 \longrightarrow 2\pi$

حيث نستخدم التعويض الآتي:

$$x=3\cos\theta \quad , \quad y=3\sin\theta$$

$$dx=-3\sin\theta d\theta \qquad dy=3\cos\theta d\theta$$

بالتعويض في (١) :

$$W=\int\{[2(3\cos\theta)-3\sin\theta][-3\sin\theta d\theta]+[3\cos\theta+3\sin\theta][3\cos\theta d\theta]\}$$

$$=\int\left\{-18\cos\theta\sin\theta+\underbrace{9\sin^2\theta+9\cos^2\theta}+9\sin\theta\cos\theta\right\}d\theta$$

$$=\int\{-9\cos\theta\sin\theta+9\}d\theta$$

$$=9\int_0^{2\pi}\{1-\sin\theta\cos\theta\}d\theta$$

$$=9\left\{\theta-\frac{1}{2}\sin^2\theta\right\}\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$=9[2\pi-0]=18\pi$$

$$\int\sin\theta\underbrace{\cos\theta\ d\theta}$$

$$=\int\sin\theta\, \underbrace{d(\sin\theta)}$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{2}$$

وهو المطلوب.

مثال(٨): إذا كانت العلاقة: $R=\alpha v^2+\frac{\beta}{v^2}$ ، حيث α,β ثابتان ، تعبر عن المقاومة الكلية (R) لحركة طائرة سرعتها v بالنسبة للهواء.

المطلوب: إثبات أن الحد الأدنى للقدرة المستهلكة بواسطة محركات الطائرة في مقاومة الهواء هي: $4\left(\frac{\alpha\beta^3}{27}\right)^{\frac{1}{4}}$

الحـــل: المقاومة(نوع من أنواع القوة)

$$R=\alpha v^2+\frac{\beta}{v^2} \quad \text{....................(١)}$$

القدرة (حاصل ضرب القوة في السرعة)

$$P=Rv=\left(\alpha v^2+\frac{\beta}{v^2}\right)v=\alpha v^3+\frac{\beta}{v} \quad \text{..............(٢)}$$

ولإيجاد الحد الأدنى (النهاية الصغرى للقدرة) :

نفاضل معادلة القدرة (المعادلة (٢)) بالنسبة للسرعة v ونساوي التفاضل بالصفر:

$$\frac{dP}{dv}=0\longrightarrow v_{\min}$$ (أقل قيمة للسرعة تعطي النهاية الصغرى للقدرة)

$$3\alpha v^2-\frac{\beta}{v^2}=0\ ,\ v=v_{\min}\ \therefore 3a\, v_{\min}^2=\frac{\beta}{v_{\min}^2}\longrightarrow v_{\min}^4=\frac{\beta}{3a}$$

$$\therefore v_{\min}=\left(\frac{\beta}{3\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$$

وبالتعويض في (٢) نحصل على الحد الأدنى (النهاية الصغرى) للقدرة المستهلكة بواسطة محركات الطائرة:

$$P_{\min}=\alpha v_{\min}^3+\frac{\beta}{v_{\min}}=\alpha\left(\frac{\beta}{3\alpha}\right)^{\frac{3}{4}}+\beta\left(\frac{\beta}{3\alpha}\right)^{-\frac{1}{4}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}}\alpha^{\frac{1}{4}}\beta^{\frac{3}{4}}+(3)^{\frac{1}{4}}\alpha^{\frac{1}{4}}\beta^{\frac{3}{4}}$$

$$=\left(\frac{\alpha\beta^3}{3^3}\right)^{\frac{1}{4}}+\underbrace{(3)^{\frac{1}{4}}(3)^{\frac{3}{4}}}\left(\frac{\alpha\beta^3}{3^3}\right)^{\frac{1}{4}}=\left(\frac{\alpha\beta^3}{3^3}\right)^{\frac{1}{4}}+3\left(\frac{\alpha\beta^3}{3^3}\right)^{\frac{1}{4}}=4\left(\frac{\alpha\beta^3}{27}\right)^{\frac{1}{4}}$$

وهو المطلوب.

مثال (٩): جسيم كتلته m يتحرك في المستوى بحيث يكون متجه موضعه هو:

$$\vec{r} = a\cos\omega t\ \hat{i} + b\sin\omega t\ \hat{j}$$

حيث a,b,ω ثوابت ، $a > b$

المطلوب:

(i) إثبات أن الجسيم يتحرك في مسار على شكل قطع ناقص مركزه نقطة الأصل ونصف محوريه a,b.

(ii) إثبات أن القوة المؤثرة على الجسيم $\vec{F}$ تكون متجه دائماً نحو مركز القطع وقيمتها $(m\,\omega^2 r)$ حيث $r = |\vec{r}|$

(iii) إيجاد طاقة حركة الجسيم عند النقطتين $A(a,0), B(0,b)$

(iv) إيجاد الشغل الكلي المبذول في تحريك الجسيم من A إلي B

(v) إثبات قاعدة الشغل و الطاقة أثناء الحركة من A إلي B

(vi) إثبات أن الشغل الكلي المبذول في تحريك الجسيم مرة واحدة حول القطع يساوي صفراً.

(vii) إذا كانت $\vec{p}$ هي متجه كمية حركة الجسيم فأثبت أن: $\vec{r} \wedge \vec{F} = 0$

$$\vec{r} \wedge \vec{p} = m\,a\,b\,\omega\,\hat{k}$$

(viii) إثبات مبدأ ثبوت الطاقة .

الحـل: المطلوب الأول:

حيث أن الحركة مستوية:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(١)$$

ولكن:

$$\vec{r} = a\cos\omega t\ \hat{i} + b\sin\omega t\ \hat{j} \quad \ldots\ldots(٢)$$

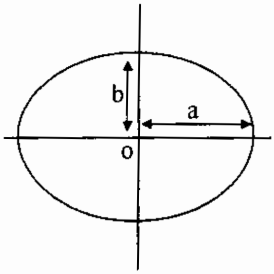
بالمقارنة:

$$\therefore\quad x = a\cos\omega t \longrightarrow \frac{x}{a} = \cos\omega t$$

$$\therefore\quad y = b\sin\omega t \longrightarrow \frac{y}{b} = \sin\omega t$$

بالتربيع والجمع: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\underbrace{\cos^2\omega t+\sin^2\omega t}_{=1}$

$$\therefore\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



وهي معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل

ونصف محورية a,b .

<u>المطلوب الثاني</u>: حيث أن $\bar{F}=m\,\bar{a}$

من (٢) بالتفاضل : $\bar{v}=\frac{d\bar{r}}{dt}=-\omega a\sin\omega t\ \hat{i}+\omega b\cos\omega t\ \hat{j}$

وبالتفاضل مرة أخرى:

$$\bar{a}=\frac{d\bar{v}}{dt}=-\omega^2 a\cos\omega t\ \hat{i}-\omega^2 b\sin\omega t\ \hat{j}$$

$$=-\omega^2\underbrace{\left(a\cos\omega t\hat{i}+b\sin\omega t\hat{j}\right)}_{=\bar{r}}\quad=-\omega^2\bar{r}$$

$$\therefore\quad \bar{F}=m\left(-\omega^2\bar{r}\right)=-m\omega^2\bar{r}$$

وهذا يعني أن إتجاه $\bar{F}$ هو عكس إتجاه $\bar{r}$ (إشارة ــ)

$\therefore$ $\bar{F}$ تتجه دائماً نحو المركز O

وقيمتها: $F=\left|\bar{F}\right|=\left|-m\omega^2\bar{r}\right|=m\omega^2 r$

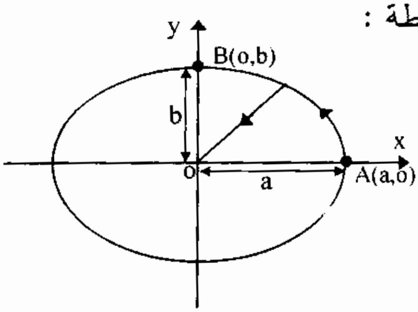
<u>المطلوب الثالث</u>:

طاقة الحركة: $T=\frac{1}{2}mv^2$

حيث: $\bar{v}=-\omega a\sin\omega t\hat{i}+\omega b\cos\omega t\hat{j}$

$$v^2=\bar{v}\cdot\bar{v}=\left(-\omega a\sin\omega t\right)^2+\left(\omega b\cos\omega t\right)^2$$

$$=\omega^2\left[a^2\sin^2\omega t+b^2\cos^2\omega t\right]\ldots\ldots\ldots(٣)$$



وتكون الصورة العامة لطاقة الحركة عند أي نقطة :

$$T=\frac{1}{2}m\omega^2\left[a^2\sin^2\omega t+b^2\cos^2\omega t\right]\ldots(٤)$$

ولإيجاد T عند $A(a,0)$:

حيث أن: $x=a\cos\omega t\,,y=b\sin\omega t$

فعند $A\,(a\,,0)$:

$$a=a\cos\omega t\longrightarrow\cos\omega t=1$$

$$0=b\sin\omega t\longrightarrow\sin\omega t=0\,,b\neq 0$$

بالتعويض في (٤):

$$T_A=\frac{1}{2}m\omega^2b^2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٥)$$

ولإيجاد T عند $B(0,b)$:

حيث أن: $x=a\cos\omega t\,,y=b\sin\omega t$

فعند $B\,(0\,,b)$:

$$0=a\cos\omega t\longrightarrow\cos\omega t=0$$

$$b=b\sin\omega t\longrightarrow\sin\omega t=1$$

بالتعويض في (٤):

$$T_B=\frac{1}{2}m\omega^2a^2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٦)$$

<u>**المطلوب الرابع**</u>: الشغل الكلي المبذول في الحركة من A إلي B

$$W_{A\to B}=\int\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_A^B\left(-m\omega^2\vec{r}\right)\cdot d\vec{r}=-m\omega^2\int_A^B\underbrace{\vec{r}\cdot d\vec{r}}=-m\omega^2\int_A^B\underbrace{rdr}$$

$$=-m\omega^2\left[\frac{1}{2}r^2\right]_A^B=-\frac{1}{2}m\omega^2\left[r_B^2-r_A^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}m\omega^2\left[r_A^2-r_B^2\right]=\frac{1}{2}m\omega^2\left[a^2-b^2\right]\ldots\ldots(٧)$$

حيث $r_A=a\;,\;r_B=b$

<u>المطلوب الخامس</u> : إثبات قاعدة الشغل والطاقة في الحركة من $A \longrightarrow B$

من (٧) وبإستخدام (٦) و (٥):

$$W = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 b^2 = T_B - T_A$$

أي أن الشغل المبذول= التغير في طاقة الحركة ، وهي قاعدة الشغل والطاقة.

<u>المطلوب السادس</u>: إيجاد الشغل المبذول في تحريك الجسيم مرة واحدة حول القطع:

إذا تحرك الجسيم مرة واحدة حول القطع فإنه يكون قد قطع دورة كاملة في زمن دوري قدره $\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)$ حيث ω هي السرعة الزاوية.

وهذا يعني أنه خلال دورة كاملة فإن الزمن t يتغير من $0 \longrightarrow \frac{2\pi}{\omega}$

الشغل المبذول خلال دورة كاملة:

$$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

حيث:

$$\vec{F} = -m\omega^2 \underset{\smile}{r}$$

$$= -m\omega^2 \underbrace{\left(a\cos\omega t\hat{i} + b\sin\omega t\hat{j}\right)}$$

$$d\vec{r} = \left(-\omega a\sin\omega t\hat{i} + \omega b\cos\omega t\hat{j}\right)dt$$

$$\therefore W = \oint (m\omega^3 a^2 \cos\omega t \sin\omega t - m\omega^3 b^2 \sin\omega t \cos\omega t)\,dt$$

$$= \oint m\omega^3 (a^2 - b^2)\sin\omega t \cos\omega t\,dt$$

$$= m\omega^3\left(a^2 - b^2\right)\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin\omega t\cos\omega t dt = m\omega^3\left(a^2 - b^2\right)\left[\frac{1}{2}\frac{\sin^2\omega t}{\omega}\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}}$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2\left(a^2 - b^2\right)\underbrace{\left[\sin^2 2\pi - \sin^2 0\right]}_{\text{صفر}=} = 0$$

المطلوب السابع : إيجاد المتجهين $\vec{r}\wedge\vec{p},\vec{r}\wedge\vec{F}$:

ملحوظة : يعرّف عزم متجه $\vec{A}$ بأنه المتجه $\vec{r}\wedge\vec{A}$ وبذلك فإن الكمية $\vec{r}\wedge\vec{F}$ تمثل عزم القوة $\vec{F}$ بينما الكمية $\vec{r}\wedge\vec{p}$ تمثل عزم كمية الحركة $\vec{p}$ والكمية $\vec{r}\wedge\vec{p}$ غالباً ما تسمى بكمية الحركة الزاوية.

إيجاد $\vec{r}\wedge\vec{F}$:

$$\vec{r}\wedge\vec{F}=\vec{r}\wedge\left(-m\omega^2\vec{r}\right)=-m\omega^2\left(\vec{r}\wedge\vec{r}\right)=0$$

[لأي متجه فإن $\vec{a}\wedge\vec{a}=0$] وهو عزم القوة $\vec{F}$.

إيجاد $\vec{r}\wedge\vec{p}$:

$$\vec{r}\wedge\vec{p}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a\cos\omega t & b\sin\omega t & 0\\ -m\omega a\sin\omega t & m\omega b\cos\omega t & 0\end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}\,(0)-\hat{j}\,(0)+\hat{k}\left(m\omega ab\cos^2\omega t+m\omega ab\sin^2\omega t\right)$$

$$=m\omega ab\left(\cos^2\omega t+\sin^2\omega t\right)\hat{k}=m\omega ab\hat{k}$$

وهو عزم كمية الحركة الخطية $\vec{p}$ (أو هو كمية الحركة الزاوية) .

المطلوب الثامن : ينص قانون ثبوت أو حفظ الطاقة على أن:

$$\underset{\text{الطاقة الكلية}}{E}=\underset{\text{طاقة الحركة}}{T}+\underset{\text{طاقة الجهد}}{U}=\underset{\text{ثابت}}{const.}$$

حيث:
$$T=\frac{1}{2}m\omega^2\left(a^2\sin^2\omega t+b^2\cos^2\omega t\right)\ldots\ldots\ldots\text{(i)}$$

(المعادلة رقم (٤)) .

و<u>لإيجاد طاقة الجهد</u> U :

من التعريف:
$$U=-W=-\int_0^r \vec{F}\cdot d\vec{r}=-\int_0^r\left(-m\omega^2\vec{r}\right)\cdot d\vec{r}$$

$$=m\varpi^2\int_0^r rdr=m\omega^2\left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^r=\frac{1}{2}m\omega^2r^2 \;\ldots\ldots\ldots(ii)$$

وبالتعويض عن قيمة r^2 حيث: $\vec{r}=a\cos\omega t\,\hat{i}+b\sin\omega t\hat{j}$

$$\therefore\; r^2=a^2\cos^2\omega t+b^2\sin^2\omega t$$

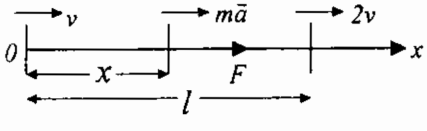
$$\therefore\; U=\frac{1}{2}m\omega^2[\;a^2\cos^2\omega t+b^2\sin^2\omega t\;]\ldots\ldots\ldots(iii)$$

وتكون الطاقة الكلية هي مجموع (iii) + (i) :

$$\therefore\quad E=T+U=\frac{1}{2}m\omega^2\left(a^2\sin^2\omega t+b^2\cos^2\omega t\right)$$
$$+\frac{1}{2}m\omega^2[\;a^2\cos^2\omega t+b^2\sin^2\omega t\;]=\frac{1}{2}m\omega^2\left(a^2+b^2\right)=const.$$

حيث a,b,m,ω ثوابت ، وهو المطلوب.

<u>مثال(١٠):</u> يتحرك جسيمان كتلة كل منهما m في خطين مستقيمين، فإذا كان الجسيم الأول يتحرك تحت تأثير قوة ثابتة، بينما يتحرك الثاني تحت تأثير قوة تبذل شغل بمعدل زمني ثابت، وبدأ الجسيمان الحركة في وقت واحد بسرعة u وقطع كل منهما مسافة l حتى تصل سرعة كل منهما إلى 2u، أثبت أن النسبة بين زمني حركة الجسيمين تساوي $\frac{28}{27}$.



<u>الحل:</u> <u>أولاً:</u> معادلات الحركة للجسيم الأول [الذي يتحرك بقوة ثابتة F]:

$$F=ma\quad\therefore\; a=\frac{F}{m}=\frac{dv}{dt}\rightarrow\int_u^{2u}dv=\frac{F}{m}\int_0^t dt\rightarrow u=\frac{Ft}{m}\;\ldots\ldots\;(١)$$

أيضاً فإن:
$$a=\frac{F}{m}=v\frac{dv}{dx}\rightarrow\int_u^{2u}v\,dv=\frac{F}{m}\int_0^l dx\rightarrow\left[\frac{1}{2}v^2\right]_u^{2u}=\frac{F}{m}l$$

$$\therefore\frac{3}{2}u^2=\frac{F}{m}l\quad\rightarrow\quad F=\frac{3mu^2}{2l}\qquad\qquad .... (٢)$$

من (١)،(٢) بحذف F نحصل على زمن الحركة:

$$t=\frac{mu}{F}=mu\left[\frac{2l}{3mu^2}\right]=\frac{2l}{3u}=t_1\qquad\qquad ....(٣)$$

<u>ثانياً</u>: معادلات الحركة للجسيم الثاني [الذي يتحرك بقوة تبذل شغلاً بمعدل زمني ثابت]: معدل بذل الشغل = p [القدرة] = القوة × السرعة

$$p=Fv\rightarrow\ F=\frac{p}{v}=ma\ \rightarrow\ a=\frac{p}{mv}=\frac{dv}{dt}$$

وبفصل المتغيرات والتكامل:

$$\therefore\int_u^{2u}v\,dv=\frac{p}{m}\int_0^t dt\quad\rightarrow\quad[\frac{1}{2}v^2]_u^{2u}=\frac{p}{m}t$$

$$\therefore\frac{3}{2}u^2=\frac{p}{m}t\quad\rightarrow\quad t=\frac{3m}{2p}u^2\qquad\qquad .... (٤)$$

أيضاً فإن:
$$a=\frac{p}{mv}=v\frac{dv}{dx}$$

وبفصل المتغيرات والتكامل:
$$\int_u^{2u}v^2\,dv=\frac{p}{m}\int_0^l dx$$

$$\therefore\left[\tfrac{1}{3}v^3\right]_u^{2u}=\frac{p}{m}l\quad\rightarrow\quad\frac{7}{3}u^3=\frac{p}{m}l\quad\rightarrow\quad p=\frac{7m}{3l}u^3\ ....(٥)$$

من (٤)،(٥) بحذف p نحصل على زمن الحركة في هذه الحالة:

$$t=\frac{3mu^2}{2[\frac{7mu^3}{3l}]}=\frac{9l}{14u}=t_2\qquad\qquad ....(٦)$$

من (٦)،(٣) نحصل على النسبة المطلوبة:
$$\frac{t_1}{t_2}=\frac{2l}{3u}[\frac{14u}{9l}]=\frac{28}{27}$$

وهو المطلوب.

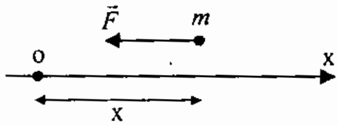
تطبيقات على قوانين الحركة

تطبيق (١) : المتذبذب التوافقي البسيط :

يعرف المتذبذب التوافقي البسيط بأنه جسيم كتلته m يتحرك في بعد واحد (محور x مثلاً) نحو نقطة ثابتة (O) تحت تأثير قوة $\overline{F}$ يتناسب مقدارها مع البعد x عن O .

رياضياً: $F = -k\,x \quad \therefore \quad F \propto (-x)$

حيث k ثابت التناسب



معادلة الحركة للمتذبذب التوافقي البسيط :

من قانون نيوتن الثاني : $F = ma = m\ddot{x}$ ....(٢)

حيث

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

من (٢) و (١):

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$\therefore \quad \ddot{x} = -\underbrace{\frac{k}{m}}\,x = -\underbrace{\omega^2}\,x$$

حيث

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\therefore \quad \ddot{x} = -\omega^2 x \;\text{........................(٣)}$$

المعادلة (٣) هي معادلة الحركة للمتذبذب .

ملحوظة: تعرّف حركة المتذبذب التوافقي البسيط بالحركة التوافقية البسيطة(ح.ت.ب).

أمثلة محلولة

مثال(١): أثبت أن $x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$

تمثل الحل العام لمعادلة المتذبذب التوافقي البسيط $\ddot{x} = -\omega^2 x$ ،

حيث A, B ثابتان.

الحل: لإثبات أن x تمثل الحل العام للمعادلة $\ddot{x} = -\omega^2 x$ فيجب أن تحققها.

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t = -\omega^2\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right) = -\omega^2 x$$

$\therefore$ الحل $x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ يمثل حلاً عاماً للمعادلة $\ddot{x} = -\omega^2 x$

وهو المطلوب .

مثال (٢): أثبت أن الحل : $x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ ، يمكن كتابته بالصورة :

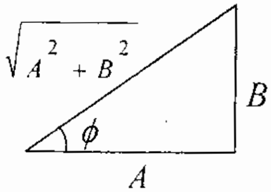
$$x = C\cos(\omega t - \phi)$$

حيث: $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ تعرف بسعة الحركة، $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{A}{B}\right)$ تعرف بزاوية الطور

الحل:

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t = \sqrt{A^2+B^2}\left[\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\omega t + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\omega t\right]$$

ولكن:



$$\sin\phi = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$\cos\phi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$\therefore \quad x = \underbrace{\sqrt{A^2+B^2}}\underbrace{\left[\cos\phi\cos\omega t + \sin\phi\sin\omega t\right]} = C\,\cos(\omega t - \phi)$$

حيث:

$$\underset{\text{سعة الحركة}}{\underset{\downarrow}{C = \sqrt{A^2+B^2}}} \quad ، \quad \underset{\text{زاوية الطور}}{\underset{\downarrow}{\phi = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)}}$$

وهو المطلوب.

<u>مثال(٣):</u> بفرض أن المتذبذب التوافقي البسيط بدأ الحركة من السكون من على بعد $x = a$ من مركز الحركة O فأوجد الحل العام للمعادلة $\ddot{x} = -\omega^2 x$ بالصورة:

$x = a\cos\omega t$ ، حيث $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

<u>الحـــل:</u>

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \longrightarrow \therefore \quad v\frac{dv}{dx} = -\omega^2 x$$

بفصل المتغيرات والتكامل:

$$\int v\,dv = -\omega^2 \int x\,dx$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}v^2 = -\frac{1}{2}\omega^2 x^2 + C_1 \quad \dots\dots\dots\dots(١)$$

<u>ولإيجاد</u> C_1 : من الشروط الإبتدائية $x = a \;,\; v = 0$

$$\therefore \quad C_1 = \frac{1}{2}\omega^2 a^2$$

وتصبح (١) :

$$\frac{1}{2}v^2 = -\frac{1}{2}\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}\omega^2 a^2$$

$$\therefore \quad v^2 = \omega^2(a^2 - x^2) \quad \therefore \quad v = \pm\omega\sqrt{a^2-x^2} \quad \dots\dots\dots\dots(٢)$$

وبأخذ الإشارة السالبة وذلك لأن الجسيم يتحرك نحو المركز O (في الإتجاه السالب لمحور x)

$$\therefore \quad v = -\omega\sqrt{a^2-x^2} = \frac{dx}{dt}$$

وبفصل المتغيرات والتكامل (للمرة الثانية):

$$\int \frac{-dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \omega \int dt \quad \therefore \cos^{-1}\frac{x}{a} = \omega t + C_2$$

ولإيجاد C_2 : في البداية $t=0$, $x=a$

$$\therefore \quad \underbrace{\cos^{-1} 1}_{=0} = 0 + C_2 \longrightarrow C_2 = 0$$

$$\therefore \quad \cos^{-1}\frac{x}{a} = \omega t \longrightarrow \frac{x}{a} = \cos\omega t \quad \therefore \quad x = a\cos\omega t$$

وهو المطلوب.

مثال(٤): أثبت أن طاقة الجهد للمتذبذب التوافقي البسيط تعطى بالعلاقة:

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

حيث $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$

الحـــل: طاقة الجهد:

$$U = -\int \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

وفي بعد واحد (محور x):

$$U = -\int F dx$$

وفي حالة المتذبذب:

$$F = m\ddot{x} = -m\omega^2 x$$

$$\therefore U = -\int(-m\omega^2 x)dx = \int m\omega^2 x\, dx = m\omega^2\int_0^x x dx$$

$$= m\omega^2\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^x = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

وحيث أن: $\omega^2 = \dfrac{k}{m} \longrightarrow m\omega^2 = k$:

$$\therefore U = \frac{1}{2}kx^2$$

وهو المطلوب.

مثال (٥): بإستخدام مبدأ (أو قاعدة) ثبوت الطاقة للمتذبذب التوافقي البسيط ، أوجد

معادلة الإزاحة للمتذبذب بالصورة $x = a\cos(\omega t + \varepsilon)$

حيث ε ثابت ، $a = \sqrt{\dfrac{2E}{m\omega^2}}$

E هي الطاقة الكلية للمتذبذب (مقدار ثابت)

الحل: مبدأ ثبوت الطاقة هو : $E = T + U$

حيث: T هي طاقة الحركة:

$$T = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

U هي طاقة الجهد:

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

الطاقة الكلية:

$$E = T + U = \frac{1}{2}m\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\,\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \omega^2 x^2\right]$$

$$\therefore \frac{2E}{m} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \omega^2 x^2 = \omega^2\left[\frac{1}{\omega^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x^2\right]$$

$$\therefore \frac{2E}{m\omega^2} = \left[\frac{1}{\omega^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x^2\right] \therefore \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \omega^2\left[\frac{2E}{m\omega^2} - x^2\right]$$

وبأخذ $\dfrac{2E}{m\omega^2} = a^2$

$$\therefore \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \omega^2\left[a^2 - x^2\right] \quad \therefore \frac{dx}{dt} = \pm\omega\sqrt{a^2 - x^2}$$

وبأخذ الإشارة السالبة لأن الجسيم يتحرك نحو المركز (x تقل بمرور الزمن) .

وبفصل المتغيرات و التكامل:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\omega\int dt \quad \therefore \cos^{-1}\frac{x}{a}=\omega t+\varepsilon$$

حيث ε ثابت التكامل

$$\therefore \frac{x}{a}=\cos(\omega t+\varepsilon)$$

$$\therefore x=a\cos(\omega t+\varepsilon)\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(\mathrm{I})$$

حيث $a=\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$ ، وهو المطلوب .

المقدار a في المعادلة (I) يعرف بسعة الحركة للمتذبذب التوافقي البسيط.

ملحوظة: من العلاقة $a=\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$

$$a^2=\frac{3E}{m\omega^2} \quad \therefore E=\frac{1}{2}m\omega^2a^2$$

وحيث أن m,ω ثوابت $\leftarrow$ $\boxed{E\propto a^2}$ $\therefore$

أي أن الطاقة الكلية للمتذبذب تتناسب مع مربع السعة.

مثال(٦): جسيم كتلته m يتحرك في خط مستقيم في اتجاه محور x تحت تأثير قوة طاقة جهدها U فإذا كان الجسيم يشغل الموضعين x_2 و x_1 عند اللحظتين t_2 و t_1 على الترتيب فبإستخدام مبدأ ثبوت الطاقة أثبت أن:

$$t_2-t_1=\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{E-U}}$$

حيث E هي الطاقة الكلية.

وإذا كانت طاقة الجهد للجسيم هي $U=\frac{1}{2}kx^2$ (أي أنه يتحرك كمتذبذب توافقي بسيط) ، وبدأ حركته من السكون عند النقطة $x=a$ فأثبت أن: $x=a\cos\omega t$

حيث $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$

الحـــل: المطلوب الأول : من مبدأ ثبوت الطاقة :

$$E = T + U = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + U$$

$$\therefore \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \left(\frac{2}{m} \right) [E - U] \quad \therefore \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - U}$$

وحيث أن الجسيم يتحرك في إتجاه محور x فناخذ الإشارة الموجبة

$$\therefore \frac{dx}{dt} = + \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - U} \quad \text{.......................(١)}$$

بفصل المتغيرات و التكامل:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U}}$$

$$\therefore t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U}} \quad \text{.......................(٢)}$$

و هو المطلوب الأول .

المطلوب الثاني: إذا كانت طاقة الجهد $U = \frac{1}{2} k x^2$ [الجسيم يتحرك كمتذبذب]وبدأ الجسيم الحركة من السكون أي عند $x = a$ ، $\frac{dx}{dt} = 0$

فمن (١):

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - \frac{1}{2} k x^2}$$

وبالتربيع:

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{2}{m} \left[E - \frac{1}{2} k x^2 \right]$$

ولكن: $\frac{dx}{dt} = 0$ عندما $x = a$

$$\therefore 0 = \underbrace{\frac{2}{m}}\underbrace{\left(E - \frac{1}{2} k a^2 \right)} \qquad \therefore \left(E - \frac{1}{2} k a^2 \right) = 0 \quad \therefore E = \frac{1}{2} k a^2$$

$$\therefore \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{2}{m} \left[\frac{1}{2} k a^2 - \frac{1}{2} k x^2 \right] = \left(\frac{k}{m} \right) (a^2 - x^2) = \omega^2 (a^2 - x^2)$$

وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين:

$$\frac{dx}{dt} = \pm\omega\sqrt{a^2 - x^2}$$

ولكن في حالة الحركة التوافقية البسيطة فإن x تقل بمرور الزمن ، أي أننا لابد من أخذ الإشارة السالبة:

$$\frac{dx}{dt} = -\omega\sqrt{a^2 - x^2}$$

وبفصل المتغيرات والتكامل:

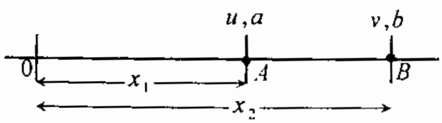
$$\int \frac{-dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \omega \int dt \qquad \therefore \cos^{-1}\frac{x}{a} = \omega t + C$$

ولإيجاد C: في البداية $t = 0 \ , \ x = a \longrightarrow C = 0$

$$\therefore \cos^{-1}\frac{x}{a} = \omega t \ \therefore \ x = a\cos\omega t$$

وهو المطلوب.

مثال(٧): يتحرك جسيم حركة توافقية بسيطة بحيث كانت سرعتيه u, v عند النقطتين A, B من خط الحركة، وكانت عجلتيه a, b عند نفس النقطتين على الترتيب، أثبت أن المسافة بين النقطتين A, B هي $\left(\frac{v^2 - u^2}{a+b}\right)$ وأن الزمن الدوري للحركة هو: $2\pi\sqrt{\frac{u^2 - v^2}{b^2 - a^2}}$.



الحل: معادلة الحركة التوافقية البسيطة هي:

$$\ddot{x} = -w^2 x \qquad (1)$$

ومنها يمكن إثبات العلاقة بين السرعة v والإزاحة x بالصورة:

$$v^2 = w^2 (A^2 - x^2) \qquad (2)$$

حيث A سعة الحركة.

من (2) :

$$v=\pm w\sqrt{A^2-x^2} \qquad (3)$$

وإذا كانت x_2 , x_1 هما بعدي النقطتين A,B عن 0 فإنه من (2) ,(1):

عند النقطة A:

$$u^2=w^2(A^2-x_1^2) \qquad (4)$$

$$a=-w^2x_1 \qquad (5)$$

عند النقطة B:

$$v^2=w^2(A^2-x_2^2) \qquad (6)$$

$$b=-w^2x_2 \qquad (7)$$

من (6) ,(4) بالطرح:

$$\begin{aligned} v^2-u^2 &= w^2(A^2-x_2^2)-w^2(A^2-x_1^2) \\ &= -w^2(x_2^2-x_1^2)=-w^2(x_2-x_1)(x_1+x_2) \qquad (8) \end{aligned}$$

ومن (6) ,(5) بالجمع:

$$a+b=-w^2(x_1+x_2) \qquad (9)$$

من (9) , (8) بالقسمة:

$$\frac{v^2-u^2}{a+b}=x_2-x_1$$

أي أن المسافة بين A,B هي:

$$AB=x_2-x_1=\frac{v^2-u^2}{a+b} \qquad (10)$$

وهو المطلوب أولاً.

<u>ولإيجاد الزمن الدوري:</u>

$$T=\frac{2\pi}{w} \qquad (11)$$

ونوجد w كالتالي: بتربيع (7) ,(5) ثم الطرح نحصل على:

$$b^2 - a^2 = w^4 (x_2^2 - x_1^2) \tag{12}$$

وبقسمة (8) على (12):

$$\therefore \frac{v^2 - u^2}{b^2 - a^2} = -\frac{w^2 (x_2^2 - x_1^2)}{w^4 (x_2^2 - x_1^2)} = -\frac{1}{w^2}$$

$$\therefore \frac{1}{w^2} = \frac{u^2 - v^2}{b^2 - a^2} \to \frac{1}{w} = \sqrt{\frac{u^2 - v^2}{b^2 - a^2}} \to w = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{u^2 - v^2}} \tag{13}$$

بالتعويض في (11) نحصل على:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{u^2 - v^2}{b^2 - a^2}}$$

وهو المطلوب ثانياً.

تطبيق(٢) : تصادم الجسيمات:

هناك نوعان من التصادم الحادث بين الجسيمات :

(١) **تصادم مرن** : وفيه لا يحدث أي تغيير في كتل الجسيمات نتيجة التصادم.

(٢) **تصادم غير مرن** : وفيه يكون الجسمين المتصادمين جسماً واحداً كتلته تساوي مجموع كتلتي الجسمين المتصادمين .

وبالنسبة للتصادم المرن فإنه يكون نوعان أيضاً :

(١) **تصادم مباشر** : ويكون في إتجاه الحركة لكلاً الجسمين قبل التصادم مباشرة في إتجاه العمود المشترك عند نقطة التماس والذي يسمى خط التصادم .

(٢) **تصادم مائل** : وفيه يكون إتجاه حركة أحد الجسمين أو كلاهما قبل التصادم مائلاً على إتجاه خط التصادم .

ويتحكم في عملية التصادم قانونان هامان هما :

(١) **قانون حفظ كمية الحركة** : وينص على أن " مجموع كميتي حركة الجسمين المتصادمين بعد التصادم تساوي مجموع كميتي الحركة للجسمين قبل التصادم "

(٢) **قانون نيوتن التجريبي** : وينص على أن " خارج قسمة السرعة النسبية بعد التصادم على السرعة النسبية قبل التصادم تكون كمية ثابتة وفي إتجاه معاكس " وتسمى هذه الكمية معامل التصادم e ، ويكتب هذا بالصورة

$$-e=\frac{\text{السرعة النسبية بعد التصادم}}{\text{السرعة النسبية قبل التصادم}}$$

وللأجسام تامة المرونة فإن $e=1$.

أولاً: التصادم غير المرن: إذا كان الجسم الأول كتلته m_1 والثاني كتلته m_2 وكان الأول متحركاً بسرعة u وكان الثاني ساكناً. بعد التصادم يلتصق الجسمان ويتحركان بسرعة واحدة مشتركة v.

ومن مبدأ ثبوت كمية الحركة:

كمية الحركة بعد التصادم = كمية الحركة قبل التصادم

$$m_1 u + m_2 \cdot 0 = (m_1 + m_2) \cdot v$$

ومنها نوجد السرعة المشتركة:

$$v = \frac{m_1}{m_1 + m_2} u \quad ....(١)$$

ملحوظة:

(١) إذا كان الجسم الثاني متحركاً بسرعة w في نفس إتجاه السرعة u فإن:

$$m_1 u + m_2 w = (m_1 + m_2) v$$

وإذا كانت السرعة w في اتجاه مضاد للسرعة u فإن:

$$m_1 u - m_2 w = (m_1 + m_2) v$$

(٢) يصاحب عملية التصادم عادة فقد في طاقة الحركة وتكون طاقة الحركة المفقودة بالتصادم (E) هي:

$E =$ طاقة الحركة قبل التصادم ــ طاقة الحركة بعد التصادم $= E_1 - E_2$

$$= \frac{1}{2} m_1 u^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2$$

$$= \frac{1}{2} m_1 u^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1 u}{m_1 + m_2}\right)^2 = \frac{1}{2} m_1 u^2 - \frac{1}{2}\frac{m_1^2 u^2}{m_1 + m_2}$$

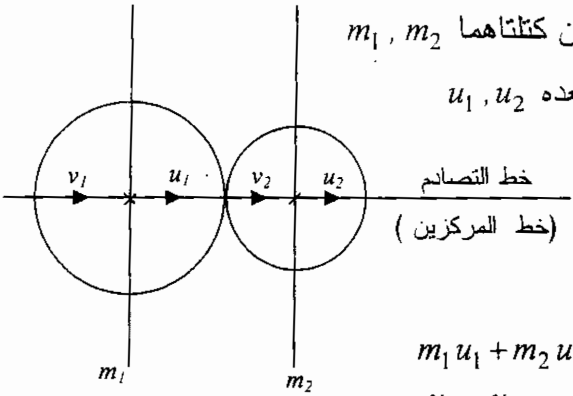
$$= \frac{1}{2} m_1 u^2 \left[1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right] = \frac{1}{2} m_1 u^2 \left[\frac{m_1 + m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right) u^2 = \frac{1}{2} \mu u^2 \quad .... (٢)$$

حيث $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ تعرف بالكتلة المختزلة للمجموعة المكونة من الجسمين.

ثانياً: التصادم المرن:

(١) دراسة تصادم كرتين تصادماً مباشراً :



إذ كان لدينا جسمان على شكل كرتين كتلتاهما $m_1\ ,\ m_2$

وسرعتاهما قبل التصادم $v_1\ ,\ v_2$ وبعده $u_1\ ,\ u_2$

فمن قانون حفظ كمية الحركة :

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} (1)$$

ومن قانون نيوتن التجريبي $\frac{u_2 - u_1}{v_2 - v_1} = -e$

حيث : $u_2 - u_1$ = السرعة النسبية بعد التصادم .

$v_2 - v_1$ = السرعة النسبية قبل التصادم .

$$\therefore\ u_2 - u_1 = -e\left(v_2 - v_1\right) \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} (2)$$

بضرب (2) في m_2:

$$m_2 u_2 - m_2 u_1 = -e m_2 (v_2 - v_1) \quad \text{\_\_\_\_} (3)$$

من (1),(3) بالطرح:

$$m_1 u_1 + m_2 u_1 = m_1 v_1 + m_2 v_2 + e m_2 v_2 - e m_2 v_1$$

$$\therefore\ u_1 \left(m_1 + m_2\right) = \left(m_1 - e m_2\right) v_1 + m_2 \left(1 + e\right) v_2$$

$$\therefore\ u_1 = \frac{\left(m_1 - e m_2\right) v_1 + m_2 \left(1 + e\right) v_2}{m_1 + m_2} \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} (4)$$

وبالمثل يمكن إثبات أن :

$$u_2 = \frac{\left(m_2 - e m_1\right) v_2 + m_1 \left(1 + e\right) v_1}{m_1 + m_2} \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} (5)$$

العلاقتان (5) ، (4) تعطيان سرعتي الجسمين المتصادمين بعد التصادم مباشرة .

حالة خاصة :

إذا كانت كتلتي الجسمين متساويتين $(m_1 = m_2 = m)$ وكان الجسمان تــامي المرونة $(e=1)$ فإن (5) ، (4) تعطيان :

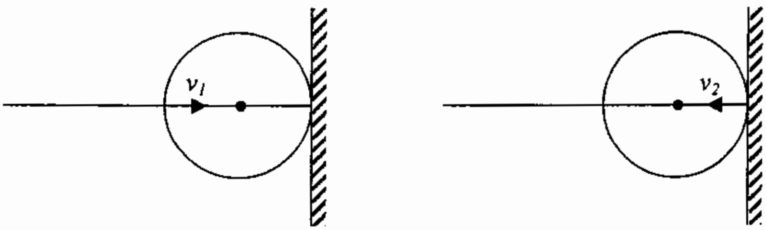
$$u_1 = \frac{(\mathrm{m}-\mathrm{m})\, v_1 + m(1+1)\, v_2}{m+m} = \frac{2m v_2}{2m} = v_2$$

$$u_2 = \frac{(\mathrm{m}-\mathrm{m})\, v_2 + m(1+1)\, v_1}{m+m} = \frac{2m v_1}{2m} = v_1$$

أي أنه إذا كان هناك جسمان متساويان في الكتلة وتامي المرونة ويتحركان في نفس إتجاه خط التصادم فإنهما يتبادلان سرعتيهما .

دراسة تصادم كرة بمستوى ثابت:

في حالة التصادم المرن لكرة كتلتها m تتحرك بسرعة v مع مستوى ثابت ، فإنها ترتد بسرعة u في إتجاه عمودي على المستوى .



في هذه الحالة ننظر إلى المستوى الثابت كأنه كرة ذات نصف قطر لانهائي وكتلة كبيرة للغاية ، وحيث أن المستوى ثابت فإن $u_1 = u_2 = 0$

ويصبح قانون نيوتن بالصورة :

$$\frac{-v_2 - 0}{v_1 - 0} = -e \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} (1)$$

حيث : السرعة النسبية بعد التصادم = $-v_2 - 0$

السعة النسبية قبل التصادم = $v_1 - 0$

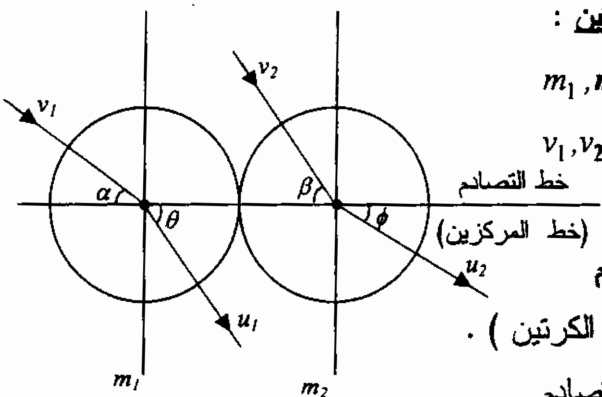
من (1) :

$$-v_2=-ev_1$$

$$\therefore\ v_2=e\,v_1 \quad \_\_\_\_\_\_(2)$$

وهذا يعني أن الكرة سوف تترك المستوى بسرعة قدرها e مرة قدر سرعتها الإبتدائية، وإذا كانت الكرة تامة المرونة فإن $e=1$ وبالتالي فإن $v_2=v_1$ أي أن سرعة الارتداد تساوي سرعة السقوط (أو السرعة الابتدائية).

(٢) <u>دراسة التصادم المائل لكرتين</u> :



إذا كان لدينا كرتان كتلتاهما m_1, m_2 وكانت سرعتاهما قبل التصادم v_1, v_2 في إتجاهين يميلان بزاويتين α, β مع خط التصادم (أو الخط الواصل بين مركزي الكرتين) .

ولتكن u_1, u_2 سرعتاهما بعد التصادم في إتجاهين يميلان بزاويتين θ, ϕ مع خط التصادم .

بتحليل السرعات نجد أن لكل سرعة مركبتين أحدهما عمودية على خط التصادم والأخرى في إتجاهه ، وتكون السرعات في إتجاه العمودي دائماً ثابته بمعنى أن :

$$v_1 \sin\alpha = u_1 \sin\theta \quad \_\_\_\_\_\_(1)$$

$$v_2 \sin\beta = u_2 \sin\phi \quad \_\_\_\_\_\_(2)$$

وبتطبيق قانون حفظ كمية الحركة في إتجاه خط المركزين :

$$\therefore\ m_1 u_1 \cos\theta + m_2 u_2 \cos\phi = m_1 v_1 \cos\alpha + m_2 v_2 \cos\beta \quad \_\_\_\_\_\_(3)$$

كما أن قانون نيوتن التجريبي يطبق أيضاً في إتجاه خط المركزين :

$$\frac{u_2 \cos\phi - u_1 \cos\theta}{v_2 \cos\beta - v_1 \cos\alpha} = -e$$

$$\therefore u_2 \cos\phi - u_1 \cos\theta = -e\left(v_2 \cos\beta - v_1 \cos\alpha\right) \quad \_\_\_\_\_\_(4)$$

المعادلات (4) ، (3) ، (2) ، (1) كافية لتعيين الكميات الأربع المجهولة u_1, u_2, θ, ϕ التي تحدد السرعات بعد التصادم مقداراً وإتجاهاً .

حالات خاصة :

(١) إذا كان الجسم الثاني ساكناً لحظة التصادم $(v_2 = 0)$ فمن (2)

$$0 = u_2 \sin\phi \rightarrow \sin\phi = 0 \rightarrow \phi = 0$$

وهذا يعني أنه إذا تصادم جسم متحرك تصادماً مائلاً مع جسم آخر ساكن فإن الأخير يبدأ الحركة في إتجاه خط المركزين .

(٢) إذا كانت $m_1 = m_2$ وكانت $e = 1$ فمن (4) ، (3)

$$u_1 \cos\theta + u_2 \cos\phi = v_1 \cos\alpha + v_2 \cos\beta \qquad (5)$$

$$u_2 \cos\phi - u_1 \cos\theta = v_1 \cos\alpha - v_2 \cos\beta \qquad (6)$$

من (6) ، (5) بالطرح :

$$u_1 \cos\theta = v_2 \cos\beta \qquad (7)$$

من (6) ، (5) بالجمع :

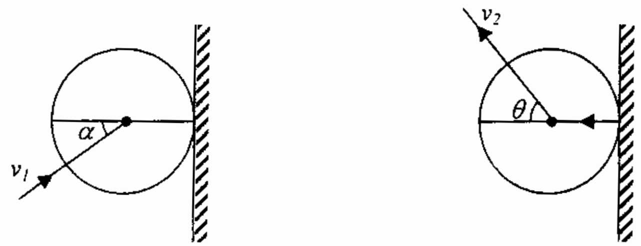
$$u_2 \cos\phi = v_1 \cos\alpha \qquad (8)$$

من (8) ، (7) نجد أن : إذا تصادم جسمان تاماً المرونة ومتساوياً الكتلة تصادماً مائلاً فإنهما يتبادلان سرعتيهما في إتجاه خط المركزين .

تصادم كرة بمستوى أملس ثابت: في حالة التصادم المرن لكرة كتلتها m تتحرك بسرعة في إتجاه يميل بزاوية α مع العمودي على مستوى ثابت ، وأرتدت الكرة بسرعة v_2 في إتجاه يميل بزاوية θ مع العمودي على المستوى .

في هذه الحالة : يكون قانون نيوتن بالصورة :

$$\frac{-v_2 \cos\theta - 0}{v_1 \cos\alpha - 0} = -e \qquad (9)$$



حيث : السرعة النسبية بعد التصادم = $-v_2\,cos\theta-0$

السرعة النسبية قبل التصادم = $v_1\,cos\alpha-0$

من (9) : $-v_2\,cos\theta=-e\,v_1\,os\alpha$

$$v_2\,cos\theta=e\,v_1\,os\alpha \qquad \_\_\_\_\_\_\_\_ (10)$$

أيضاً : بتطبيق قانون حفظ كمية الحركة على الكرة المتحركة في الإتجاه العمودي على خط المركزين فإن :

$$v_2\,sin\,\theta=v_1\,sin\alpha \qquad \_\_\_\_\_\_\_\_ (11)$$

من (11) ، (10) بالتربيع والجمع نحصل على

$$v_2^2\left(sin^2\theta+cos^2\theta\right)=v_1^2\left(e^2cos^2\alpha+sin^2\alpha\right)$$

$$\therefore\ v_2^2=v_1^2\left(sin^2\alpha+e^2cos^2\alpha\right) \qquad \_\_\_\_\_\_ (12)$$

أيضاً : من (11) ، (10) بالقسمة :

$$tan\theta=\frac{1}{e}\left(tan\alpha\right) \qquad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ (13)$$

العلاقتان (13) ، (12) تعطيان السرعة بعد التصادم مقداراً وإتجاهاً في هذه الحالة .

<u>**حالة خاصة**</u>: في حالة إذا كانت الكرة تامة المرنة $e=1$ فإن (13) تصبح $\tan\theta=\tan\alpha$ أي أن $\theta=\alpha$، ومن (10) فإن $v_2=v_1$ وهذا يعني أن الكرة ترتد بعد التصادم بسرعة تساوي عددياً مقدار السرعة قبل التصادم وأن زاوية الارتداد (أو الانعكاس) تكون مساوية لزاوية السقوط.

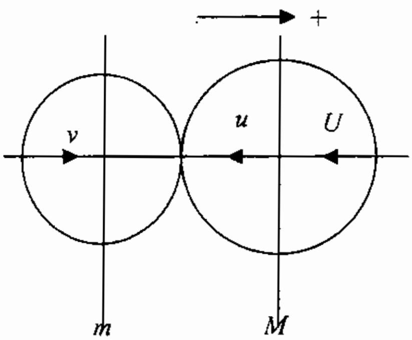
أمثلة محلولة :

مثال (١) : كرتان كتلتاهما M , m تصادما تصادماً مباشراً عندما كانا يتحركـــان في إتجاهين متعاكسين بسرعتين u, v على التوالي ونتيجة للتصادم سكنت الكرة m ، أثبت أن $M(1+e)u=(m-eM)v$

الحل: نفرض أن الكرة M تتحرك بسرعة U بعد التصادم ، فمن مبدأ حفظ كمية الحركة

$$mv - Mu = m \times 0 = -MU$$

$$\therefore\ MU = Mu - mv \qquad \_\_\_\_\_\_ (1)$$



ومن قانون نيوتن التجريبي :

$$\frac{(-U)-0}{(-u)-v} = -\,e$$

$$\therefore -U = -e(-u-v)$$

$$\therefore\ U = -e(u+v) \qquad \_\_\_\_\_\_ (2)$$

من (2) ، (1) :

$$-Me\,(u+v) = Mu - mv$$

$$\therefore -Meu - Mev = Mu - mv \ \therefore\ Meu + Mu = mv - Mev$$

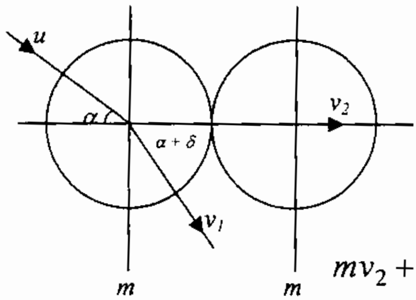
$$\therefore\ M(1+e)u = (m - eM)v$$

وهو المطلوب .

مثال (٢) : كرة ملساء اصطدمت بكرة أخرى مساوية لها في الكتلـــة وفـــي حالـــة سكون، وذلك في إتجاه يصنع زاوية α مع خط المركزين لحظة التصادم ، فإذا كانت δ هي الزاوية التي تنحرف خلالها حركة الكرة المتصادمة فاثبت أن :

$$tan\,\delta = \frac{(1+e)\,tan\alpha}{1-e+2tan^2\alpha}$$

<u>الحل</u> : نفرض أن سرعة الكرة الأولى هي u في إتجاه يصنع زاوية α مع خط التصادم ولتكن سرعة الكرة الأولى بعد التصادم هي v_1 صانعة زاوية $\alpha+\delta$ مع خط التصادم (حيث δ هي زاوية إنحراف الحركة نتيجة التصادم) ولتكن v_2 هي سرعة الكرة الثانية والتي تكون في إتجاه خط المركزين (بسبب أنهـا كانت ساكنة قبل التصادم) .



كمية الحركة في الإتجاه العمودي ثابتة :

$$v_1 \sin(\alpha+\delta)=u \sin\alpha \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(1)$$

وفي إتجاه خط المركزين :

$$m v_2 + m v_1 \cos(\alpha+\delta)=m u \cos\alpha$$

$$\therefore v_2 + v_1 \cos(\alpha+\delta)=u \cos\alpha \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(2)$$

ومن قانون نيوتن :

$$v_2 - v_1 \cos(\alpha+\delta)=-e\,[0-u\cos\alpha]$$

$$\therefore v_2 - v_1 \cos(\alpha+\delta)= e\,u\cos\alpha \qquad \text{\_\_\_\_\_}(3)$$

من (3) ، (2) بالطرح :

$$2\,v_1 \cos(\alpha+\delta)=(1-e)\,u\cos\alpha \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(4)$$

ومن (4) ، (1) بالقسمة :

$$\frac{1}{2}\tan(\alpha+\delta)=\frac{1}{1-e}\tan\alpha$$

$$\therefore \tan(\alpha+\delta)=\frac{2\tan\alpha}{1-e}=\tan\phi\ ,\ \phi=\alpha+\delta$$

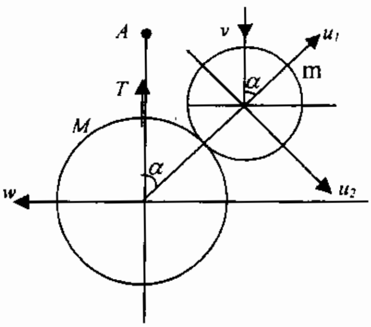
وإذا كانت $\delta=\phi-\alpha$ فإن :

$$\tan\delta=\frac{\tan\phi-\tan\alpha}{1+\tan\phi\tan\alpha}=\frac{\dfrac{2\tan\alpha}{1-e}-\tan\alpha}{1+\dfrac{2\tan\alpha}{1-e}\tan\alpha}$$

$$=\frac{2\tan\alpha-(1-e)\tan\alpha}{(1-e)+2\tan^2\alpha}=\frac{(1+e)\tan\alpha}{1-e+2\tan^2\alpha}$$

وهو المطلوب .

مثال(٣): كرة كتلتها M معلقة من نقطة ثابتة A بواسطة خيط غير مرن بحيث كانت في حالة سكون. سقطت عليها كرة صغيرة الحجم كتلتها m بسرعة v رأسياً لأسفل بحيث كان خط المركزين في لحظة التصادم يصنع زاوية α مع الرأسي، فإذا كان معامل الارتداد هو e فأوجد سرعة الكرة المعلقة بعد التصادم، وكذلك مقدار الفقد في طاقة الحركة نتيجة التصادم.



الحل: نفرض أن سرعة الكرة المعلقة بعد التصادم هي w (في الاتجاه الأفقي) وأن u_1 هي مركبة سرعة الكرة الساقطة بعد التصادم في اتجاه خط المركزين وأن u_2 هي المركبة في الاتجاه العمودي.

في لحظة التصادم يتوتر الخيط ويظهر به شد T وتكون الحركة الممكنة للكرة المعلقة في اتجاه عمودي على الخيط. فبتطبيق مبدأ ثبوت كمية الحركة في الاتجاه العمودي على الخيط (أي في الاتجاه الأفقي) وباعتبار كمية الحركة في هذا الاتجاه قبل التصادم تساوي صفراً:

$$\therefore 0 = m u_1 \sin\alpha + m u_2 \cos\alpha - Mw$$

حيث $u_2 = v\sin\alpha$

$$\therefore w = \frac{m}{M}(u_1 \sin\alpha + u_2 \cos\alpha) = \frac{m}{M}\sin\alpha(u_1 + v\cos\alpha) \quad \_\_\_ (1)$$

وبتطبيق قانون نيوتن التجريبي في اتجاه خط المركزين:

$$\therefore \frac{u_1 - (-w\sin\alpha)}{-v\cos\alpha - 0} = -e$$

$$\therefore u_1 + w\sin\alpha = ev\cos\alpha \quad \_\_\_\_\_\_ (2)$$

من (2):

$$u_1 = ev\cos\alpha - w\sin\alpha \quad \_\_\_\_\_\_ (3)$$

بالتعويض في (1):

$$w=\frac{m}{M}\sin\alpha(ev\cos\alpha-w\sin\alpha+v\cos\alpha)=\frac{mv}{M}\sin\alpha\cos\alpha(1+e)-\frac{m}{M}w\sin^2\alpha$$

$$\therefore w\left(1+\frac{m}{M}w\sin^2\alpha\right)=\frac{mv}{M}(1+e)\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\therefore w\left(\frac{M+m\sin^2\alpha}{M}\right)=\frac{mv}{M}(1+e)\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\therefore w=\frac{mv(1+e)\sin\alpha\cos\alpha}{M+m\sin^2\alpha} \quad \text{\_\_\_\_\_}(4)$$

وهو المطلوب أولاً.

<u>ولإيجاد طاقة الحركة المفقودة نتيجة التصادم:</u>

$$E=E_1-E_2=\frac{1}{2}m(v\ \sin\alpha)^2-\left[\frac{1}{2}mu_1^2+\frac{1}{2}Mw^2\right] \quad \text{\_\_\_\_\_\_}(5)$$

ولكن: من (3),(4):

$$u_1=ev\cos\alpha-\frac{mv(1+e)\sin^2\alpha\cos\alpha}{M+m\sin^2\alpha}=\frac{v\cos\alpha[eM-m\sin^2\alpha]}{M+m\sin^2\alpha} \quad \text{\_\_\_}(6)$$

بالتعويض من (6),(4) في (5):

$$E=\frac{1}{2}mv^2\cos^2\alpha-\frac{1}{2}mv^2\cos^2\alpha\left[\frac{eM-m\sin^2\alpha}{M+m\sin^2\alpha}\right]^2-$$

$$-\frac{1}{2}mv^2\frac{mM(1+e)^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{(M+m\sin^2\alpha)^2}$$

$$=\frac{1}{2}mv^2\cos^2\alpha\left[1-\left(\frac{eM-m\sin^2\alpha}{M+m\sin^2\alpha}\right)^2-\frac{mM(1+e^2)\sin^2\alpha}{(M+m\sin^2\alpha)^2}\right]$$

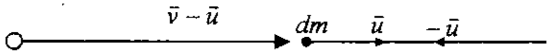
$$=\frac{1}{2}mv^2\cos^2\alpha\left[\frac{(M+m\sin^2\alpha)^2-(eM-m\sin^2\alpha)^2-mM(1+e^2)\sin^2\alpha}{(M+m\sin^2\alpha)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}mv^2\cos^2\alpha\left[\frac{M(1-e^2)}{M+m\sin^2\alpha}\right]=\frac{1}{2}\frac{mM(1-e^2)}{M+m\sin^2\alpha}v^2\cos^2\alpha$$

وهو المطلوب الثاني.

تطبيق(٣): الحركة مع تغير الكتلة:

إذا تحرك جسيم في خط مستقيم بحيث تغيرت كتلته بانتظام أثناء الحركة فإن: قانون نيوتن الثاني يصبح غير صالح للتطبيق ويجب تعديله. فبفرض أن كتلة الجسيم عند اللحظة t هي m وسرعته $\vec{v}$، فإذا التصق جزء صغير من المادة كتلته dm يتحرك بسرعة ثابتة $\vec{u}$ فبإضافة السرعة $(-\vec{u})$ إلى الكتلة المتحركة m تصبح سرعتها $(\vec{v}-\vec{u})$ وتكون معادلة الحركة هي:



$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{dm(\vec{v}-\vec{u})}{dt}=\frac{d\,(m\vec{v})}{dt}-\vec{u}\,\frac{dm}{dt}$$

وهي معادلة حركة الجسيم المتغير الكتلة، ويمكن وضعها في الصورة التالية:

$$\vec{F}=m\frac{d\vec{v}}{dt}+(\vec{v}-\vec{u})\frac{dm}{dt} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(1)$$

ملاحظات:

(١) الكميات $\vec{F},\vec{v},\vec{u}$ في المعادلة (1) هي متجهات فتقاس في نفس الاتجاه .

(٢) إذا كانت المادة التي التصقت بالجسيم أثناء الحركة ساكنة فإن: $\vec{u}=0$

$$\therefore\quad \vec{F}=\frac{d\,(m\vec{v})}{dt}=m\,\frac{d\vec{v}}{dt}+\vec{v}\,\frac{dm}{dt}$$

(٣) إذا كان الجسيم يفقد جزءاً من مادته أثناء الحركة (كما في حالة الصواريخ المتحركة)، فإن $(\frac{dm}{dt})$ تكون سالبة.

أمثلة محلولة:

مثال(١): الحركة الرأسية لقطرات المطر.

قطرة مطر كروية الشكل تسقط رأسياً من السكون تحت تأثير ثقلها وسط سحابة ساكنة فإذا كانت كتلة القطرة تزداد أثناء نزولها نتيجة لتكاثف بخار الماء على سطحها بمعدل يتناسب مع مساحة سطحها فأوجد سرعة هذه القطرة عند أي لحظة والمسافة التي قطعتها.

الحل: نفرض أن نصف قطر القطرة عند بداية الحركة $= a$

وبعد زمن t ثانية $= r$

$\therefore$ كتلة القطرة: الكثافة × الحجم $= m$

$$= (\frac{4}{3}\pi r^3)\times(1) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

باعتبار كثافة الماء $= 1$.

$$\frac{dm}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \qquad \_\_\_\_(1)$$

ولكن: من رأس المسألة: مساحة سطح القطرة $\propto \frac{dm}{dt}$

$$\therefore \frac{dm}{dt} \propto 4\pi r^2 \;\rightarrow\; \frac{dm}{dt} = \lambda\cdot(4\pi r^2) \quad \_\_\_(2)$$

حيث λ ثابت.

بمساواة $(1),(2)$:

$$\therefore 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} = \lambda(4\pi r^2)$$

$$\therefore \frac{dr}{dt} = \lambda \rightarrow dr = \lambda\, dt \;\rightarrow\; r = \lambda t + c_1$$

عند البداية: $t=0\,, r=a \;\rightarrow\; c_1 = a \;\rightarrow\; \boxed{r = \lambda t + a}$

ولإيجاد السرعة عند أي لحظة: حيث أن القطرة تسقط وسط سحابة ساكنة فإن بخار الماء الذي يتكاثف على القطرة يمكن اعتباره ساكناً أي أن $u = 0$ وتصبح معادلة الحركة:

$$F = mg = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

$$\therefore \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot g = \frac{d(\frac{4}{3}\pi r^3 v)}{dt}$$

$$\therefore r^3 g = \frac{d(r^3 v)}{dt} \quad \therefore (\lambda t + a)^3 g = \frac{d[((\lambda t + a)^3 v]}{dt}$$

وبالتكامل نحصل على:

$$\int(\lambda t + a)^3 g\, dt = \int d[(\lambda t + a)^3 v]$$

$$\therefore \frac{(\lambda t + a)^4}{4\lambda} g = (\lambda t + a)^3 v + c_2$$

ولإيجاد c_2: في البداية $t=0\,,\,v=0$ $\leftarrow$ $c_2=\dfrac{a^4}{4\lambda}g$

$$\therefore \frac{(\lambda t+a)^4}{4\lambda}g=(\lambda t+a)^3v+\frac{a^4}{4\lambda}g$$

$$\therefore (\lambda t+a)^3v=\frac{g}{4\lambda}[(\lambda t+a)^4-a^4]$$

$$\therefore v=\frac{g}{4\lambda}[(\lambda t+a)-a^4(\lambda t+a)^{-3}] \qquad \_\_\_\_\_(3)$$

وهي سرعة القطرة عند أي زمن. وهو المطلوب أولاً.

ولإيجاد المسافة التي تقطعها القطرة:

$$v=\frac{dx}{dt}=\frac{g}{4\lambda}[(\lambda t+a)-a^4(\lambda t+a)^{-3}]$$

وبإجراء التكامل:

$$x=\frac{g}{4\lambda}[\frac{(\lambda t+a)^2}{2\lambda}-a^4\frac{(\lambda t+a)^{-2}}{-2\lambda}]+c_3$$

$$=\frac{g}{8\lambda^2}[(\lambda t+a)^2+a^4(\lambda t+a)^{-2}]+c_3$$

ولإيجاد c_3: في البداية $t=0\,,\,x=0$ $\leftarrow$ $c_3=-\dfrac{a^2}{4\lambda^2}g$

$$\therefore x=\frac{g}{8\lambda^2}[(\lambda t+a)^2-2a^2+a^4(\lambda t+a)^{-2}]$$

$$=\frac{g}{8\lambda^2}[(\lambda t+a)-\frac{a^2}{(\lambda t+a)}]^2$$

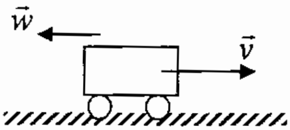
$$=\frac{g}{8\lambda^2}[\frac{(\lambda t+a)^2-a^2}{(\lambda t+a)}]^2=\frac{g}{8\lambda^2}[\frac{\lambda^2t^2+2a\lambda t}{(\lambda t+a)}]^2$$

$$=\frac{gt^2}{8}[\frac{\lambda^2t^2+2a\lambda t}{\lambda t(\lambda t+a)}]^2=\frac{gt^2}{8}[\frac{\lambda t+2a}{\lambda t+a}]^2$$

وهي المسافة المقطوعة عند أي لحظة.

<u>مثال(٢):</u> إذا قذف رجل موجود على عربة تتحرك بدون مقاومة كتلة من الرمل مقدارها m في الثانية في اتجاه مضاد لحركة العربة وبذلك يبذل شغلاً قدره H في الثانية ، أثبت أن سرعة الرمل بالنسبة للعربة هي $\sqrt{\frac{2Hg}{m}}$ حيث g عجلة الجاذبية الأرضية.

<u>الحل:</u> نفرض أن M هي كتلة العربة بما فيها وأن $\vec{v}$ هي سرعتها عند الزمن t وأن سرعة الرمل بالنسبة للعربة هي $(-\vec{w})$.



فحيث أن: سرعة الرمل بالنسبة للعربة = سرعة الرمل - سرعة العربة (من قوانين السرعة النسبية).

أي أن: سرعة الرمل = سرعة العربة + سرعة الرمل بالنسبة للعربة.

$$\therefore \vec{u} = \vec{v} + (-\vec{w}) = \vec{v} - \vec{w} \qquad \_\_\_\_\_(1)$$

معادلة الحركة مع تغير الكتلة:

$$\vec{F} = M\frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} - \vec{u})\frac{dM}{dt}$$

وإذا كانت العربة تتحرك بدون مقاومة فإن: $\vec{F} = 0$

وأيضاً: حيث أن العربة تفقد جزءاً من الرمل فإن:

$$\frac{dM}{dt} = -m$$

وتصبح معادلة الحركة:

$$0 = M\frac{d\vec{v}}{dt} + [\vec{v} - (\vec{v} - \vec{w})](-m)$$

$$\therefore M\frac{d\vec{v}}{dt} = wm \qquad \_\_\_\_\_\_(2)$$

ومن قاعدة الشغل والطاقة: الشغل المبذول في الثانية = التغير في طاقة الحركة

$$\therefore\ Hg = \frac{d}{dt}[\frac{1}{2}mv^2] + \frac{1}{2}mu^2$$

$$= Mv\frac{dv}{dt} + \frac{1}{2}v^2\frac{dM}{dt} + \frac{1}{2}m(\vec{v} - \vec{w})^2$$

$$= Mv\frac{dv}{dt} + \frac{1}{2}v^2(-m) + \frac{1}{2}m(\vec{v} - \vec{w})^2$$

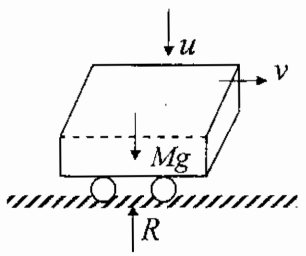
وبالتعويض من (2):

$$\therefore Hg = v\,wm - \frac{1}{2}v^2 m + \frac{1}{2}mv^2 - mvw + \frac{1}{2}mw^2 = \frac{1}{2}mw^2$$

$$\therefore w^2 = \frac{2Hg}{m} \rightarrow w = \sqrt{\frac{2Hg}{m}}$$

وهي سرعة الرمل المطلوبة.

مثال(٣): تنزلق عربة سكة حديد مفتوحة كتلتها M_0 على قضبان أفقية ملساء بسرعة أفقية منتظمة v_0 فإذا بدأ المطر في السقوط بسرعة u رأسياً إلى أسفل داخل العربة بمعدل زمني ثابت λ، برهن أن المسافة التي قطعتها العربة بعد مرور زمن t من بدء سقوط المطر هي: $\frac{M_0 v_0}{\lambda}\ln(1+\frac{\lambda t}{M_0})$، وأوجد رد الفعل العمودي من القضبان على العربة.



الحل: نفرض أن كتلة العربة بما سقط فيها من ماء بعد مضي زمن t من بدء سقوط المطر هي M وأن سرعة العربة حينئذ هي v.

وحيث أن العربة تتحرك بسرعة منتظمة فإنه لا توجد قوى أفقية (أي في اتجاه حركة العربة) بينما القوى الرأسية المؤثرة هي: وزن العربة إلى أسفل Mg ورد الفعل العمودي من القضبان R . وحيث أن المطر يسقط بمعدل ثابت λ $\leftarrow$ $\therefore \frac{dM}{dt} = \lambda$

$$\therefore dM = \lambda\, dt \rightarrow M = \lambda t + c_1$$

وفي البداية: $t = 0\,,\, M = M_0$ $\leftarrow$ $c_1 = M_0$

$$\therefore \boxed{M = M_0 + \lambda t} \qquad \_\_\_(1)$$

المعادلة العامة للحركة مع تغير الكتلة:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(M\vec{v}) - \vec{u}\frac{dM}{dt}$$

المركبة الأفقية:

$$0 = \frac{d}{dt}(Mv) \qquad \_\_\_\_\_\_(2)$$

المركبة الرأسية:

$$Mg - R = -u\frac{dM}{dt} \qquad \_\_\_\_\_(3)$$

من (2): $\frac{d}{dt}(Mv) = 0 \rightarrow Mv = c_2$

وفي البداية: $v = v_0 \,,\, M = M_0 \rightarrow c_2 = M_0 v_0 \rightarrow Mv = M_0 v_0$

[استخدمنا (1)] $\therefore v = \frac{M_0 v_0}{M} = \frac{M_0 v_0}{M_0 + \lambda t} \qquad \_\_\_\_\_\_(4)$

<u>ولإيجاد المسافة x</u>: من (4):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{M_0 v_0}{M_0 + \lambda t}$$

$$\therefore \int_0^x dx = \int_0^t \frac{M_0 v_0}{M_0 + \lambda t} dt \rightarrow x = \frac{M_0 v_0}{\lambda} \ln(M_0 + \lambda t)\Big|_0^t$$

$$= \frac{M_0 v_0}{\lambda}\left[\ln(M_0 + \lambda t) - \ln M_0\right]$$

$$= \frac{M_0 v_0}{\lambda} \ln\frac{M_0 + \lambda t}{M_0} = \frac{M_0 v_0}{\lambda} \ln(1 + \frac{\lambda t}{M_0})$$

<u>ولإيجاد رد الفعل العمودي</u>: من العلاقة:

$$R = Mg + u\frac{dM}{dt}$$

وبالتعويض عن M من (1) واعتبار أن $\frac{dM}{dt} = \lambda$ نحصل على:

$$R = (M_0 + \lambda t)g + \lambda u$$

وهو المطلوب ثانياً.

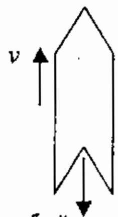
مثال(٤): الحركة الرأسية للصاروخ:

أعد صاروخ للحركة رأسياً إلى أعلى وكانت كتلته الابتدائية (بالوقود) m_0 فإذا كان الصاروخ يقذف في الثانية كتلة من الغاز بمعدل ثابت قدره λm_0 وبسرعة نسبية w (بالنسبة للصاروخ) رأسياً إلى أسفل، وإذا كانت كتلة غلاف الصاروخ وما يحتويه من معدات (بخلاف الوقود) هي m فأثبت أن:

الصاروخ ينطلق في الحال (مباشرة) إذا كان $\lambda w > g$.

وإذا انطلق الصاروخ رأسياً إلى أعلى مباشرة فأوجد أقصى سرعة يكتسبها الصاروخ والتي يصل إليها عندما ينفذ كل الوقود (أي عندما يحترق الوقود بأكمله) وأوجد الارتفاع الذي يصل إليه الصاروخ عند اكتسابه أقصى سرعة.

الحل: نفرض أن كتلة غلاف الصاروخ وما يحتويه من معدات ووقود عند الزمن t هي M ، فعند بداية الحركة: $t = 0$ ، $M = m_0$ وعندما يحترق الوقود كله بعد زمن $t = t^1$ تكون $M = m$. وإذا كانت سرعة الصاروخ عند الزمن t هي v وسرعة الغازات المشتعلة إلى أسفل هي v_0 فإن:



السرعة النسبية للغازات بالنسبة للصاروخ = سرعة الغازات − سرعة الصاروخ

$$\therefore\ w = v_0 - (-v) = v_0 + v \quad \rightarrow \quad \boxed{v_0 = w - v}$$

التغير في الكتلة الحادث في الثانية هو:

$$\frac{dM}{dt} = -\lambda m_0$$

$$\therefore dM = -\lambda m_0\, dt \quad \rightarrow \quad M = -\lambda m_0 t + c_1$$

وفي البداية: $M = m_0\ ,\ t = 0 \leftarrow c_1 = m_0 \leftarrow M = m_0 - \lambda m_0 t$

$$\therefore\ M = m_0(1 - \lambda t)$$

وتكون معادلة الحركة للصاروخ:

$$F=\frac{d}{dv}(Mv)-(-v_0)\frac{dM}{dt}=\frac{d}{dt}(mv)+v_0\frac{dM}{dt}$$

حيث F هي القوة المؤثرة على الصاروخ: $F=-Mg$.

$$\therefore -Mg=\frac{d}{dt}(Mv)+v_0\frac{dM}{dt}$$

وبالتعويض عن: $M=m_0(1-\lambda t)\ ,\ v_0=w-v\ ,\ \frac{dM}{dt}=-\lambda m_0$

$$\therefore -m_0(1-\lambda t)g=\frac{d}{dt}[m_0(1-\lambda t)v]+(w-v)(-\lambda m_0)$$

$$\therefore \frac{d}{dt}[(1-\lambda t)v]=-(1-\lambda t)g+\lambda(w-v)$$

$$\therefore (1-\lambda t)\frac{dv}{dt}-v\lambda=-(1-\lambda t)g+\lambda w-\lambda v$$

وبالقسمة على $(1-\lambda t)$ نحصل على:

$$\boxed{\frac{dv}{dt}=-g+\frac{\lambda w}{1-\lambda t}} \qquad \_\_\_\_\_\_(1)$$

وتعطي هذه المعادلة العجلة عند أي لحظة t .

عند بداية الحركة: $t=0$ وتكون العجلة الابتدائية: $\frac{dv}{dt}=-g+\lambda w$

وهذه يجب أن تكون موجبة حتى يرتفع الصاروخ مباشرة (في الحال):

$$\therefore \frac{dv}{dt}>0 \rightarrow -g+\lambda w>0 \quad \rightarrow \boxed{\lambda w>g}$$

وهو المطلوب أولاً.

وإذا انطلق الصاروخ رأسياً مباشرة فلإيجاد السرعة عند أي لحظة:

نكامل (1) بالنسبة للزمن: $dv=\int[-g+\frac{\lambda w}{1-\lambda t}]dt$

$$\therefore v=-gt-w\ln(1-\lambda t)+c_2$$

وفي البداية: $v=0\ ,\ t=0 \leftarrow c_2=0$

$$\therefore \boxed{v=-gt-w\ln(1-\lambda t)} \qquad \_\_\_\_(2)$$

ولإيجاد المسافة (أو الارتفاع) الذي يصل إليه الصاروخ عند الزمن t:

نكامل (2): $x = -g\int t\,dt - w\int \ln(1-\lambda t)\,dt$

وحيث أن: $\int \ln x\,dx = x\ln x - x$ [من جدول التكاملات القياسية]:

$$\therefore x = -\frac{1}{2}gt^2 - \frac{w}{-\lambda}\left[(1-\lambda t)\ln(1-\lambda t) - (1-\lambda t)\right] + c_3$$

$$= -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{w}{\lambda}(1-\lambda t)\left[\ln(1-\lambda t) - 1\right] + c_3$$

وفي البداية: $x=0\ ,\ t=0 \leftarrow 0=\frac{w}{\lambda}\left[\ln 1 - 1\right] + c_3 \leftarrow c_3 = \frac{w}{\lambda}$

$$\therefore \boxed{x = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{w}{\lambda}(1-\lambda t)\left[\ln(1-\lambda t) - 1\right] + \frac{w}{\lambda}} \qquad \text{\_\_\_\_\_}(3)$$

وهو الارتفاع الذي يصل إليه الصاروخ بعد الزمن t.

يكتسب الصاروخ أقصى سرعة له عندما ينفذ كل الوقود وذلك بعد زمن $t=t'$

وعندها $M = m_0$

$$\therefore m = m_0\ (1-\lambda t') \rightarrow \frac{m}{m_0} = 1-\lambda t' \rightarrow t' = \frac{1-\frac{m}{m_0}}{\lambda} = \frac{m_0 - m}{\lambda m_0}$$

بعد هذا الزمن تصبح عجلة الصاروخ (من (1)):

$$\frac{dv}{dt} = -g + \frac{\lambda w}{1-\lambda t'} = -g + \frac{\lambda w}{m/m_0} = -g + \frac{\lambda w m_0}{m} \qquad \text{\_\_\_\_}(4)$$

وتصبح سرعة الصاروخ (أقصى سرعة) من (2):

$$v_{\max} = -g\left(\frac{m_0 - m}{\lambda m_0}\right) - w\ln\left[1-\lambda\left(\frac{m_0 - m}{\lambda m_0}\right)\right]$$

$$= -\frac{g}{\lambda}\left(1-\frac{m}{m_0}\right) - w\ln\left[1-\left(1-\frac{m}{m_0}\right)\right]$$

$$= -\frac{g}{\lambda}\left(1-\frac{m}{m_0}\right) - w\ln\frac{m}{m_0} = w\ln\frac{m_0}{m} - \frac{g}{\lambda}\left(1-\frac{m}{m_0}\right)$$

ويكون الارتفاع الذي وصل إليه الصاروخ حينئذ هو:

$$x' = -\frac{1}{2}g t'^2 + \frac{w}{\lambda}(1-\lambda t')\left[\ln(1-\lambda t') - 1\right] + \frac{w}{\lambda}$$

$$= -\frac{1}{2}g\left[\frac{m_0 - m}{\lambda m_0}\right]^2 + \frac{w}{\lambda}\left(\frac{m}{m_0}\right)\left[\ln\frac{m}{m_0} - 1\right] + \frac{w}{\lambda}$$

$$= \frac{w}{\lambda}\left[1 - \frac{m}{m_0} + \frac{m}{m_0}\ln\frac{m}{m_0}\right] - \frac{g}{2\lambda^2}\left(1 - \frac{m}{m_0}\right)^2$$

<u>ملحوظة</u>: بعد هذا الارتفاع [أي بعد نفاذ الوقود] يتحرك الصاروخ تحت تأثير وزنه(الجاذبية) فقط بسرعة ابتدائية = v_{max}.

<u>مسألة:</u> صاروخ كتلته $3m$ منها $2m$ من الوقود تكفي للاشتعال لمدة دقيقة واحدة فإذا كان الصاروخ يقذف مادته بانتظام بسرعة نسبية w رأسياً لأسفل حيث $w = 75g$ فأثبت أن الصاروخ لا ينطلق إلا بعد 15 ثانية من بدء اشتعال الوقود وأن أقصى سرعة يكتسبها الصاروخ هي: $15g\left(5\ln\frac{5}{2} - 3\right)$.

<u>الحل:</u> إذا كانت m_0 هي الكتلة الأصلية للصاروخ فإن: $m_0 = 3m$ ويكون التغير الحادث في الكتلة وحدة الزمن (أي كتلة الوقود المشتعل في الثانية الواحدة) هو:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{2m}{60} = \frac{m}{30}$$

وهذا التغير يتناسب مع m_0 أي أن: $\frac{dM}{dt} = \lambda m_0 = 3m\lambda$

$$\therefore \lambda = \frac{m/30}{3m} = \frac{\text{كتلة الوقود المشتعل في الثانية}}{\text{الكتلة الأصلية للصاروخ}} = \frac{1}{90}$$

معادلة حركة الصاروخ:

$$\frac{dv}{dt} = -g + \frac{\lambda w}{1-\lambda t} = -g + \frac{\frac{1}{90}w}{1 - \frac{1}{90}} = -g + \frac{w}{90-t} \qquad \text{———} (1)$$

عند بداية الحركة: $t=0$ وتكون: $\frac{dv}{dt}=-g+\frac{w}{90}$ وهذه يجب أن تكون موجبة حتى يرتفع الصاروخ، أي أن الصاروخ لا ينطلق على الفور إلا إذا كان $\frac{dv}{dt}>0$ أي إذا كان: $\boxed{w>90\,g}$.

وإذا كانت $w = 75g$: فإن معادلة الحركة (1) تصبح:

$$\frac{dv}{dt}=-g+\frac{75g}{90-t} \qquad \_\_\_\_\_(2)$$

ويبدأ الصاروخ في الانطلاق عندما تصبح العجلة $\frac{dv}{dt}=0$ حيث أنه إذا كانت عجلة الصاروخ سالبة فإنه لن ينطلق وعندما تساوي صفراً فإن الصاروخ يكتسب بعدها عجلة موجبة وينطلق فوراً:

$\therefore$ شرط أن يبدأ الصاروخ في الانطلاق حيث $w=75g$ هو:

$$-g+\frac{75g}{90-t}=0 \;\rightarrow\; 75=90-t \;\rightarrow\; t=90-75=15\sec.$$

أي أن الصاروخ لا ينطلق إلا بعد 15 ثانية من بدء اشتعال الوقود.

ولإيجاد أقصى سرعة: بتكامل المعادلة (2):

$$v=-g\int dt+75g\int\frac{dt}{90-t}=-gt-75g\ln(90-t)+c$$

ولكن: $v=0$ عندما $t=15$

$$\therefore 0=-15g-75g\ln 75+c \;\rightarrow\; c=15g+75g\ln 75$$

$$\therefore v=-gt-75g\,\ln(90-t)+15g+75g\ln 75=15g-gt+75g\ln\frac{75}{90-t}$$

وهذه السرعة تتزايد باستمرار حتى ينفذ كل الوقود أي بعد $t=60\sec$ (بعد دقيقة من بدء الاشتعال كما في رأس المسألة) وتصبح السرعة حينئذ سرعة نهائية (أو سرعة قصوى).

$$v_{\max} = 15g - 60g + 75g \ln \frac{75}{90-60}$$
$$= -45g + 75g \ln \frac{75}{30} = -45g + 75g \ln \frac{5}{2}$$
$$= 15g[5 \ln \frac{5}{2} - 3]$$

وهو المطلوب.

مسائل على الباب الثاني

(١) يتحرك جسيم من السكون من نقطة الأصل في خط مستقيم تحت تأثير قوة $F = 12 - 2t$. أوجد الزمن t الذي يعود بعده الجسيم إلى نقطة الأصل.

(٢) جسيم كتلته الوحدة يتحرك في مجال قوة تعطى بدلالة الزمن t بالعلاقة:

$$\vec{F} = (6t - 8)\hat{i} - 60t^3\hat{j} + (20t^3 + 36t^2)\hat{k}$$

فإذا بدأ الجسيم الحركة من الموضع $\vec{r_0} = 2\hat{i} - 3\hat{k}$ بسرعة إبتدائية $\vec{v_0} = 5\hat{i} + 4\hat{j}$ ، فأوجد الآتي:

(i) سرعة الجسيم عند اللحظة $t = 1$

(ii) موضع الجسيم عند اللحظة $t = 1$ وطاقة حركته عند تلك اللحظة

(٣) قوة تعطى بالعلاقة: $\vec{F} = (2xy + z^3)\hat{i} + x^2\hat{j} + 3xz^2\hat{k}$

إستخدمت في إزاحة جسيم من النقطة A التي متجه موضعها $\vec{r_1} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ إلى النقطة B التي متجه موضعها $\vec{r_2} = 3\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$ ، أوجد الشغل المبذول بواسطة القوة $\vec{F}$ في هذه الإزاحة.

(٤) إذا كانت القوة المؤثرة على جسيم كتلته m تعطى بدلالة الزمن t بالعلاقة: $\vec{F} = a\cos\omega t\hat{i} + b\sin\omega t\hat{j}$

وبدأ الجسيم حركته من السكون من عند نقطة الأصل ، فأوجد الآتي:

(i) موضع الجسيم وسرعته عند أي لحظة t

(ii) المعادلات البارامترية لمسار الجسيم

(٥) أوجد الشغل المبذول في تحريك جسيم لمرة واحدة في المستوى (xy) حول دائرة نصف قطرها a ومعادلتها الإتجاهية $\vec{r} = a(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j})$ علماً بأن الجسيم يتحرك تحت تأثير القوة: $\vec{F} = \frac{1}{x^2 + y^2}(x\hat{i} - y\hat{j})$

(٦) جسيم كتلته m يتحرك في المستوى (xy) بحيث أن متجه موضعه هو:

$$\vec{r} = a\left(\cos\omega t\hat{i} + \sin\omega t\hat{j}\right)$$

حيث ω ثابت ، اثبت الآتي:

(i) مسار الجسيم هو دائرة نصف قطرها a ومركزها نقطة الأصل.

(ii) السرعة $\vec{v}$ تكون عمودية على المتجه $\vec{r}$

(iii) القوة المؤثرة على الجسيم تتجه دائماً نحو مركز الدائرة ومقدارها يساوي $\left(m\omega^2 r\right)$

(iv) الشغل المبذول في تحريك الجسيم مرة واحدة حول المسار يساوي صفراً .

(v) عزم القوة $\vec{F}$ يساوي صفراً بينما عزم كمية الحركة p يساوي $\left(ma^2\omega\hat{k}\right)$

(vi) قانون بقاء الطاقة.

(٧) إذا كانت قوة سحب قاطرة لقطار يتحرك من السكون على قضبان أفقية ملساء تساوي مقداراً ثابتاً Q وبعد أن تصل سرعة القطار إلى قيمة ثابتة u تبذل الآلة شغلاً بمعدل ثابت $p = Qu$ ، أثبت أنه عند تصل سرعة القطار إلى السرعة v حيث $v > u$ يتعين الزمن t والمسافة المقطوعة من بداية الحركة بالعلاقتين:

$$t = \frac{M}{2p}(u^2 + v^2) \quad , \quad x = \frac{M}{6p}(u^3 + 2v^3)$$

(٨) قارب بخاري كتلته M يلزمه قدره P ليتحرك بأقصى سرعة u، فإذا كانت قوة السحب للآلة ثابتة عند جميع السرعات وكانت المقاومة R تتناسب مع مربع السرعة $(R = kMv^2)$، حيث k ثابت، v سرعة القارب عند أي لحظة، فأوجد المسافة التي يقطعها القارب بعد مضي زمن t من بدء الحركة، علماً بأن القارب بدأ الحركة من السكون.

(٩) تتحرك نقطة مادية في خط مستقيم بعجلة مقدارها $(\frac{\pi^2}{67}x)$ تتجه نحو نقطة الأصل، فإذا علم أنه عندما $t = 2\sec.$ كانت النقطة المتحركة تمر بنقطة الأصل وأنه عندما $t = 4\sec.$ كانت سرعتها $4\,ft./\sec.$ ، عين حركة النقطة المادية تعييناً تاماً.

(١٠) عند نهايات ٣ ثوان متتالية كانت المسافات التي قطعتها نقطة تتحرك حركة توافقية بسيطة هي 1,5,5 مقاسة في نفس الاتجاه من مركز الحركة 0.
أثبت أن زمن الذبذبة الكاملة هو: $(\frac{2\pi}{\cos^{-1}\frac{3}{5}})$.

(١١) صاروخ كتلته الكلية $5M$ فيه $2m$ من الوقود تكفي للاشتعال لمدة دقيقة واحدة، فإذا كان الصاروخ يقذف مادته بانتظام بسرعة نسبية w رأسياً إلى أسفل، فأثبت أن الصاروخ ينطلق فوراً إذا كانت $w > 150g$، وإذا كانت $w = 125g$ فأثبت أن الصاروخ لا ينطلق إلا بعد 25ثانية من بدء اشتعال الوقود، ثم أوجد أقصى سرعة يكتسبها الصاروخ.

(١٢) كرة ملساء كتلتها m تتحرك بسرعة v تصادمت تصادما مائلا بكرة ملساء أخرى كتلتها M في حالة سكون ، فإذا كان خط حركة الكرة m يصنع زاوية α مع خط المركزين لحظة التصادم ، وانحرفت الكره بعد التصادم خلال زاوية قائمة فاثبت أن $tem^2\alpha = \frac{eM - m}{M + m}$