الباب الأول

علم الكنيماتيكا

(علم الحركة المجردة)

الباب الأول

علم الكنيماتيكا (الحركة المجردة)

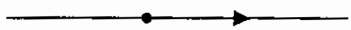
مقدمه:

أنواع الحركة :

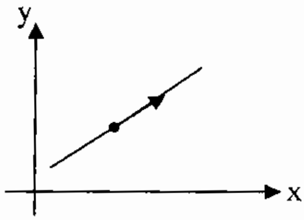
(١) حركة خطية :

تتم في خط مستقيم (في بعد واحد)

(١)



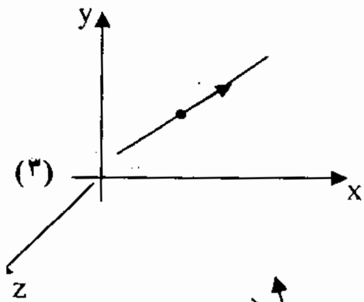
(٢)



(٢) حركة مستوية:

تتم في المستوى (في بعدين)

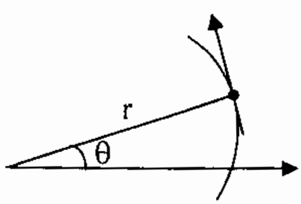
(٣)



(٣) حركة فراغية:

تتم في الفراغ (في ٣ أبعاد)

(٤)



(٤) حركة في منحنى (حركة زاوية):

تتم على منحنى (خلال زاوية معينة)

وكمثال لها :

الحركة الدائرية (على محيط دائرة).

الكميات الأساسية التي تحدد الحركة:

(١) **الإزاحة** $(\bar{r})$: هي كمية متجهة (لها مقدار واتجاه): وتعرف بأنها المسافة المقطوعة في اتجاه معين. القيمة العددية أو مقدار الإزاحة يسمى المسافة

$$\underset{\downarrow \atop \text{(كمية قياسية)}}{r} = |\bar{r}| = ab$$

∴ المسافة هي القيمة العددية للإزاحة.

(٢) **السرعة**$(\bar{v})$: وهي كمية متجهة: وتعرف بأنها معدل التغير الزمني للإزاحة.

$$\bar{v} = \frac{d\,\bar{r}}{d\,t} = \dot{\bar{r}}$$

$$v = \frac{d\,r}{d\,t} = \dot{r}$$

مقدار السرعة : $v = |\bar{v}|$ (كمية قياسية)

(٣) **العجلة أو التسارع**$(\bar{a})$: كمية متجهة ، هي معدل التغير الزمني للسرعة .

$$\therefore \bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \dot{\bar{v}}$$ (كميه متجهة)

مقدار العجلة : $$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$$ (كمية قياسية)

صور أخرى للعجلة:

(١) $$\alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{d^2r}{dt^2} = \ddot{r}$$

(٢) $$\alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\underbrace{\frac{dr}{dt}}_{v} = v\frac{dv}{dr}$$

$$\therefore \alpha = \underset{\downarrow_{(v,t)}}{\frac{dv}{dt}} = \underset{\downarrow_{(r,t)}}{\frac{d^2r}{dt^2}} = \underset{\downarrow_{(v,r)}}{v\frac{dv}{dr}}$$

حالة خاصة: إذا كان الجسيم يتحرك حركة خطيه (في بعد واحد)

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=v\,\frac{dv}{dx} \qquad |r=x$$

أنواع خاصة من الحركة:

(١) **الحركة بسرعة منتظمة:** إذا تحرك الجسيم بسرعة ثابتة المقدار والاتجاه.

(٢) **الحركة بعجله منتظمة:** إذا تحرك الجسيم بسرعة تتغير بمعدل زمني ثابت.

(٣) **الحركة بعجلة متغيرة:** إذا تحرك الجسيم بسرعة تتغير مع الزمن بالزيادة أو النقصان.

السرعة تتغير بالزيادة الحركة بعجلة متزايدة (تزايدية)	السرعة تتغير بالنقصان الحركة بعجلة متناقصة (تقصيرية)

(٤) **الحركة تحت تأثير الجاذبية:** هي حركة تتم في خط رأسي بعجله ثابتة تسمى عجلة الجاذبية الأرضية

$g=9.8\ m/\sec^2$ (متر/ث٢) $=32\ ft/\sec^2$ (قدم/ث٢)

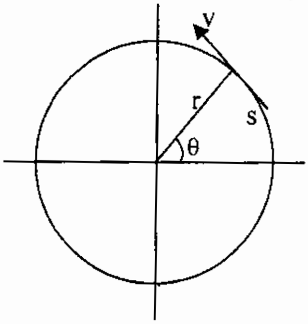
الحركة إلي أعلي (ضد الجاذبية) $\uparrow g=-$	الحركة إلي أسفل (مع الجاذبية) $\downarrow g=+$

السرعة الزاوية (w): إذا تحرك جسيم على محيط دائرة فقطع مسافة S هي عبارة عن قوس من الدائرة $\therefore S=r\,\theta$

ويسمى معدل تغير الزاوية θ بالنسبة للزمن بالسرعة الزاوية (w)

$$w=\frac{d\theta}{dt}=\dot{\theta}$$

العلاقة بين السرعة الخطية v والسرعة الزاوية w: إذا تحرك جسيم على محيط دائرة فان سرعته الخطية تكون دائما في اتجاه المماس .



$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(r\theta)}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = r\dot{\theta} = r\omega$$

$$\therefore v = r\omega \longrightarrow \omega = \frac{v}{r}$$

وهي العلاقة المطلوبة .

الحركة الخطية بعجلة منتظمة: إذا بدأ جسيم بسرعة ابتدائية v_0 وتحرك في خط مستقيم بعجلة ثابتة α فقطع مسافة x في زمن t ، وكانت سرعته أثناء الحركة هي v ، فان المعادلات الآتية تسمى معادلات الحركة الخطية بعجلة منتظمة:

(١) $v = v_0 + \alpha t$ (علاقة بين v,t)

(٢) $x = v_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ (علاقة بين x,t)

(٣) $v^2 = v_o^2 + 2\alpha x$ (علاقة بين v,x)

[v_0 , α ثابتان]

البرهان: **العلاقة الأولى**:

$$a = \frac{dv}{dt} \longrightarrow dv = a\,dt$$

$\downarrow$

(فصل المتغيرات)

$$\int dv = \alpha \int dt$$

وبإجراء التكامل :

$$\therefore v = \alpha t + c_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (١)$$

<u>ولإيجاد</u> c_1: من الشروط الابتدائية للحركة:

في البداية: $t=0$ ، $v=v_0$

بالتعويض في (١) :

$$v_0 = 0 + c_1$$
$$\therefore c_1 = v_0$$

وتصبح (١) :

$$v = \alpha t + v_0$$
$$\boxed{\therefore v = v_0 + \alpha t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

<u>العلاقة الثانية</u> :

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 + \alpha t$$

بفصل المتغيرات :

$$dx = (v_0 + \alpha t)\, dt$$

وبإجراء التكامل :

$$\int dx = \int (v_0 + \alpha t)\, dt$$
$$\therefore x = v_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 + c_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٢)$$

<u>ولإيجاد</u> c_2 :

في البداية $t=0$ ، $x=0$

بالتعويض في (٢) :

$$0 = 0 + 0 + c_2$$
$$\therefore c_2 = 0$$

$$\boxed{\therefore x = v_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

العلاقة الثالثة :

$$\alpha = v\frac{dv}{dt} \longrightarrow v\ dv = \alpha\ dx$$

$$\downarrow$$

(فصل المتغيرات)

وبإجراء التكامل :
$$\int v dv = \alpha \int dx$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}v^2 = \alpha x + c_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٣)$$

ولإيجاد c_3 : في البداية: $x = 0$, $v = v_0$

بالتعويض في (٣) :
$$\frac{1}{2}v_0^2 = 0 + c_3$$

وتصبح المعادلة (٣):
$$\therefore\ c_3 = \frac{1}{2}v_0^2$$

$$\frac{1}{2}v^2 = \alpha x + \frac{1}{2}v_0^2$$

بضرب الطرفين في 2:

$$\boxed{\therefore\ v^2 = v_0^2 + 2\alpha x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathrm{III})$$

ملخص: قوانين الحركة الخطية بعجله ثابتة:

$$v = v_0 + \alpha t$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2\alpha x$$

ملاحظات :

(١) إذا بدأ الجسيم الحركة من السكون : $v_0 = 0$ وتصبح معادلات الحركة:

$$v = \alpha t \quad ، \quad x = \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad ، \quad v^2 = 2\alpha x$$

(٢) إذا تحرك الجسيم بعجلة تقصيرية منتظمة: فان عجلته تكون سالبة الإشارة وتصبح معادلات الحركة:

$$v = v_0 - \alpha t \quad ، \quad x = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 \quad ، \quad v^2 = v_0^2 - 2\alpha x$$

(٣) إذا تحرك الجسيم حركه رأسيه خطيه تحت تأثير عجلة الجاذبية g : نضع $\alpha = g$ في معادلات الحركة :

(i) في الحركة إلي أسفل (مع الجاذبية): $(g = +)$

$$v = v_0 + gt \quad ، \quad x = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \quad ، \quad v^2 = v_0^2 + 2gx$$

(ii) في الحركة إلي أعلى (ضد الجاذبية): $(g = -)$

$$v = v_0 - gt \quad ، \quad x = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad ، \quad v^2 = v_0^2 - 2gx$$

أمثلة محلولة

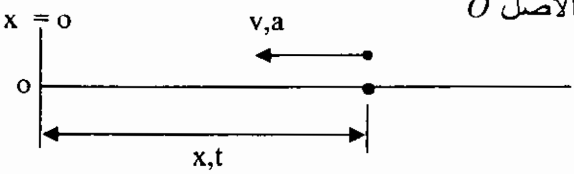
مثال(١): يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث أن بعده عن نقطة ثابتة O (نقطة الأصل) x يرتبط بالزمن t بالعلاقة : $x = 2t^3 - 3t^2 - 12t + 18$

أوجد الأتي :

(١) سرعة وعجلة الجسم عند أي لحظة t

(٢) موضع الجسيم وعجلته عندما تتلاشى سرعته

(٣) متى يمر الجسيم بنقطة الأصل O



الحــل:

العلاقة بين t , x:

$$x = 2t^3 - 3t^2 - 12t + 18 \ldots\ldots\ldots\ldots (١)$$

المطلوب الأول :

إيجاد v :

$$v=\frac{dx}{dt}=6t^2-6t-12=6(t^2-t-2)\ldots\ldots\ldots\ldots(٢)$$

إيجاد a :

$$a=\frac{dv}{dt}=12t-6=6(2t-1)\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٣)$$

المطلوب الثاني: إيجاد a, x عندما $v=0$

عندما تتلاشى السرعة: $v=0$

فمن (٢):

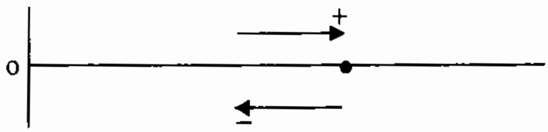
$$t^2-t-2=0$$

$(t-2)(t+1)=0 \qquad \therefore t=-1$ (مرفوض حيث لا يوجد زمن سالب)

أي أن السرعة تتلاشى بعد زمن $t=2$ $\quad \therefore t=2 \rightarrow$

وعند هذا الزمن : يكون الموضع (من (١)) :

$$x=2(2)^3-3(2)^2-12(2)+18=-2\,cm$$



(معنى إشارة سالب أن الجسيم يتحرك نحو O أي في إتجاه تناقص x).

أيضاً:

لإيجاد العجلة : من (٣):

$$a=6[2(2)-1]=18\quad cm/\sec^2$$

<u>المطلوب الثالث:</u> يمر الجسيم بنقطة الأصل عندما $x=0$ فبالتعويض في (١):

$$2t^3-3t^2-12t+18=0$$

وهي معادلة من الدرجة الثالثة في t (t لها ٣ قيم) يمكن حلها كالآتي :

$$\underbrace{2t^3-12t}_{2t(t^2-6)}\ \underbrace{-3t^2+18}_{-3(t^2-6)=0}=0$$

$$\therefore (2t-3)(t^2-6)=0 \quad \therefore 2t=3\to t=\frac{3}{2}$$

$$t^2=6\to t=\pm\sqrt{6}$$

يرفض الزمن السالب $\therefore$ يمر الجسيم بنقطة الأصل عند الزمنين :

$$t=\frac{3}{2} \quad , \quad t=\sqrt{6}$$

<u>**مثال(٢):**</u> إذا كانت العلاقة بين المسافة x والزمن t لجسيم يتحرك في خط مستقيم هي : $x=A\cos\omega t+B\sin\omega t$، حيث A,B,ω ثوابت ، أثبت الآتي:

(١) عجلة الجسيم هي : $\alpha=-\omega^2x$

(٢) سرعة الجسيم هي : $v^2=\omega^2\left(A^2+B^2-x^2\right)$

<u>**الحـــل:**</u> المطلوب هو α,v بدلالة x ، العلاقة بين x,t هي:

$$x=A\cos\omega t+B\sin\omega t \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(١)$$

<u>المطلوب الأول:</u> لإيجاد α نوجد v أولاً:

$$v=\frac{dx}{dt}=-\omega A\sin\omega t+\omega B\cos\omega t$$

$$=\omega\left[-A\sin\omega t+B\cos\omega t\right] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٢)$$

$$\therefore \alpha=\frac{dv}{dt}=\omega\left[-\omega A\cos\omega t-\omega B\sin\omega t\right]$$

$$=-\omega^2\left[A\cos\omega t+B\sin\omega t\right]=-\omega^2x \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(٣)$$

المعادلة (٣) هي معادلة العجلة.

المطلوب الثاني: إيجاد v بدلالة x ، يلزمنا حذف t

فبتربيع العلاقة (١):

$$x^2 = (A\cos\omega t + B\sin\omega t)^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (٤)$$

ومن (٢):

$$\frac{v}{\omega} = (-A\sin\omega t + B\cos\omega t)$$

بتربيع الطرفين :

$$\therefore \frac{v^2}{\omega^2} = (-A\sin\omega t + B\cos\omega t)^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (٥)$$

بجمع (٥) و (٤):

$$\therefore x^2 + \frac{v^2}{\omega^2} = (A\cos\omega t + B\sin\omega t)^2 + (-A\sin\omega t + B\cos\omega t)^2$$

$$= A^2\cos^2\omega t + 2AB\cos\omega t\sin\omega t + B^2\sin^2\omega t$$

$$+ A^2\sin^2\omega t - 2AB\sin\omega t\cos\omega t + B^2\cos^2\omega t$$

$$= A^2\underbrace{(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t)}_{=1} + B^2\underbrace{(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t)}_{=1} = A^2 + B^2$$

$$\therefore \frac{v^2}{\omega^2} = A^2 + B^2 - x^2 \quad \therefore v^2 = \omega^2(A^2 + B^2 - x^2)$$

وهو المطلوب ثانياً.

مثال (٣): إذا كان بعد جسيم (x) عن نقطة ثابتة O على خط مستقيم يعطى بدلالة الزمن (t) بالعلاقة الآتية :

$$x = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (١)$$

حيث A, B, ω ثوابت ، $i = \sqrt{-1}$

فأثبت أن :

(١) العجلة تعطى بالعلاقة $\alpha = -\omega^2 x$

(٢) العلاقة بين المسافة والسرعة هي : $v^2 = \omega^2(4AB - x^2)$

الحل :

$$x = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(١)$$

نوجد السرعة v بتفاضل (١) بالنسبة للزمن :

$$v = \frac{dx}{dt} = Ae^{i\omega t}(i\omega) + Be^{-i\omega t}(-i\omega)$$

$$= i\omega\left(Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \right) \ldots\ldots\ldots\ldots(٢)$$

ولإيجاد العجلة α نفاضل (٢) بالنسبة للزمن :

$$\alpha = \frac{dv}{dt} = i\omega\left[Ae^{i\omega t}(i\omega) - Be^{-i\omega t}(-i\omega) \right]$$

$$= (i\omega)^2\left[Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \right] = -\omega^2 x \ldots\ldots(٣)$$

وهو المطلوب أولاً.

المطلوب الثاني: علاقة بين المسافة والسرعة

فمن (١) بالتربيع:

$$x^2 = \left(Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \right)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٤)$$

ومن (٢):

$$\frac{v}{\omega} = i\left(Ae^{i\omega t} - Be^{-i\omega t} \right)$$

وبالتربيع:

$$\frac{v^2}{\omega^2} = -\left(Ae^{i\omega t} - Be^{-i\omega t} \right)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٥)$$

من (٥) و (٤) بالجمع :

$$x^2 + \frac{v^2}{\omega^2} = \left(Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \right)^2 - \left(Ae^{i\omega t} - Be^{-i\omega t} \right)^2$$

$$= A^2e^{2i\omega t} + 2AB + B^2e^{-2i\omega t} - \left(A^2e^{2i\omega t} - 2AB + B^2e^{-2i\omega t} \right) = 4AB$$

$$\therefore \frac{v^2}{\omega^2} = 4AB - x^2 \qquad \therefore v^2 = \omega^2\left(4AB - x^2\right)$$

وهو المطلوب ثانياً.

مثال(٤): إذا كانت العلاقة بين المسافة x والزمن t لجسيم متحرك هي علاقة من الدرجة الثانية بالصورة $x^2 = At^2 + 2Bt + c$

حيث A, B, c ثوابت ، فأثبت أن العجلة α تتناسب عكسياً مع مكعب المسافة إلا في الحالة الخاصة عندما : $B = \pm\sqrt{AC}$

الحــل :

$$x^2 = At^2 + 2Bt + c \quad \text{.........................(١)}$$

بتفاضل الطرفين بالنسبة للزمن :

$$\therefore 2x \cdot \frac{dx}{dt} = 2At + 2B$$

حيث $\frac{dx}{dt} = v$

$$\therefore x \cdot v = At + B \quad \text{.........................(٢)}$$

بالتفاضل ثانيةً :

$$x \cdot \frac{dv}{dt} + v \cdot \frac{dx}{dt} = A$$

$$\therefore x \cdot a + v^2 = A \quad \text{.........................(٣)}$$

حيث العجلة $\alpha = \frac{dv}{dt}$

المطلوب: إيجاد علاقة بين العجلة α والمسافة x : ولذلك نحذف السرعة v بين (٣) و (٢) .

فمن (٢):

$$v = \frac{At + B}{x}$$

بالتعويض في (٣):

$$x \cdot \alpha = A - v^2 = A - \left(\frac{At + B}{x}\right)^2 = \frac{Ax^2 - (At + B)^2}{x^2}$$

بقسمة الطرفين على x :

$$\alpha = \frac{Ax^2 - (At + B)^2}{x^3}$$

بالتعويض في البسط بقيمة x^2 من (١)

$$\alpha = \frac{A\left(At^2+2Bt+c\right)-\left(A^2t^2+2ABt+B^2\right)}{x^3} = \frac{AC-B^2}{x^3} = \frac{k}{x^3}$$

$$\therefore \alpha = \frac{k}{x^3} \longrightarrow \therefore \alpha \propto \frac{1}{x^3}$$

حيث $k = AC - B^2$

$\therefore$ العجلة تتناسب عكسيا مع مكعب المسافة إلا في الحالة الخاصة عندما $k=0$

أي عندما $AC = B^2$ ، أي عندما $B = \pm\sqrt{Ac}$. وهو المطلوب .

<u>مثال(٥):</u> يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث كانت العلاقة بين المسافة التي يقطعها x والسرعة v بعد زمن معين هي: $x = A\sqrt{v} - B$ ، حيث A, B ثابتان . المطلوب :

(١) إيجاد الزمن اللازم حتى تبلغ سرعة الجسيم ضعف قيمتها الابتدائية v_0

(٢) إثبات أن العجلة α تعطى بدلالة السرعة بالعلاقة: $\alpha = \frac{2}{A}v^{\frac{3}{2}}$

<u>الحـل:</u> أولاً : نوجد v_0

حيث أن : $x = A\sqrt{v} - B \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(١)$

وذلك عند زمن t .

وعند بداية الحركة :

$$v = v_0 \quad , \quad x = 0 \quad , \quad t = 0$$

فبالتعويض في (١) :

$$0 = A\sqrt{v_0} - B$$

$$A\sqrt{v_0} = B \Rightarrow v_0 = \frac{B^2}{A^2} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٢)$$

وهي السرعة الابتدائية للحركة .

المطلوب الأول: هو إيجاد علاقة بين الزمن والسرعة :

من (١) :

$$\sqrt{v}=\frac{x}{A}+\frac{B}{A}=\frac{x+B}{A}$$

$$\therefore v=\left(\frac{x+B}{A}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٣)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{dx}{dt}=\left(\frac{x+B}{A}\right)^2=\frac{(x+B)^2}{A^2}$$

بفصل المتغيرات والتكامل :

$$\int dt=A^2\int\frac{dx}{(x+B)^2}$$

$$\therefore t=A^2\left[\frac{-1}{(x+B)}\right]+c=-\frac{A^2}{x+B}+c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٤)$$

لإيجاد c : في البداية : $x=0$, $t=0$

من (٤):

$$0=-\frac{A^2}{B}+C \longrightarrow C=\frac{A^2}{B}$$

وتصبح (٤):

$$t=-\frac{A^2}{\underbrace{X+B}_{=A\sqrt{v}}}+\frac{A^2}{B}$$

$$=-\frac{A^2}{A\sqrt{v}}+\frac{A^2}{B}=\frac{A^2}{B}-\frac{A}{\sqrt{v}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٥)$$

عندما تبلغ السرعة ضعف قيمتها الابتدائية فإن :

$$v=2v_0=2\frac{B^2}{A^2}$$

ويكون الزمن اللازم للوصل إلي هذه السرعة هو :

$$t=\frac{A^2}{B}-\frac{A}{\sqrt{2\frac{B^2}{A^2}}}=\frac{A^2}{B}-\frac{A^2}{\sqrt{2}B}=\frac{A^2}{B}\underbrace{\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\underbrace{0.293}\frac{A^2}{B}$$

وهو المطلوب الأول .

المطلوب الثاني: علاقة بين العجلة والسرعة :

من (١): $$\sqrt{v} = \frac{x}{A} + \frac{B}{A}$$

بتفاضل الطرفين بالنسبة للزمن :

$$\frac{1}{2\sqrt{v}} \underbrace{\frac{dv}{dt}} = \frac{1}{A} \underbrace{\frac{dx}{dt}}$$

$$\therefore \frac{1}{2\sqrt{v}} \underbrace{\alpha} = \frac{1}{A} \underbrace{v} \qquad \therefore \quad \alpha = \frac{2\sqrt{v}}{A} v \quad \therefore \quad a = \frac{2}{A} \quad v^{\frac{3}{2}}$$

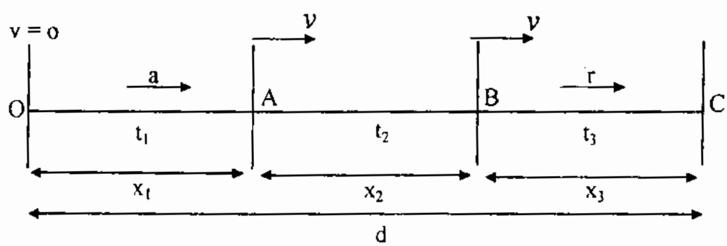
وهو المطلوب ثانياً .

مثال (٦): قطار بدأ حركته من السكون من نقطة الأصل O ، ووصل في حركته إلى نقطة A بعجلة ثابتة α حتى أصبحت سرعته v عند A ، ثم ظلت سرعته ثابتة لفترة زمنية معينه (من نقطة A إلى B) ثم تناقصت سرعته إلى الصفر عند نقطة C ، حيث كان متحركاً من B إلى C بعجلة تقصيرية r .
فإذا كانت المسافة الكلية المقطوعة بواسطة القطار هي d فأثبت أن :

الزمن الكلي لرحلة القطار هو : $t = \frac{d}{v} + \frac{v}{2}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{r}\right)$

وأوجد قيمة السرعة v التي تجعل هذا الزمن أقل ما يمكن ، وأثبت أن أقل قيمة للزمن t هي : $t_{\min} = \sqrt{2d\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{r}\right)}$

الحـل :



القطار يمر أثناء حركته بثلاث مراحل :

(١) في المسافة من O إلى $A(x_1)$: السرعة الابتدائية $v_0 = 0$ ، العجلة ثابتة $= \alpha$ ، وصل القطار إلى A في زمن t_1 بسرعة v.

معادلات الحركة :

$$v = v_0 + \alpha t \longrightarrow v = \alpha t_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(١)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2\alpha x \longrightarrow v^2 = 2\alpha x_1 \ldots\ldots\ldots\ldots(٢)$$

(٢) في المسافة من A إلى $B(x_2)$: السرعة v منتظمة ، العجلة = صفر (لثبات السرعة) ، الزمن $= t_2$

معادلات الحركة :

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \longrightarrow x_2 = v\, t_2 \ldots\ldots\ldots\ldots(٣)$$

(٣) في المسافة من B إلى $C\,(x_3)$: السرعة الابتدائية $= v$ ، والعجلة تقصيرية $= -r$ ، والسرعة النهائية = صفر خلال زمن $t = t_3$

معادلات الحركة :

$$v = v_0 + \alpha t \longrightarrow 0 = v - r\, t_3$$

$$\therefore \quad v = r t_3 \ldots\ldots\ldots\ldots(٤)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2\alpha t \longrightarrow 0 = v^2 - 2r\, x_3$$

$$\therefore \quad v^2 = 2r x_3 \ldots\ldots\ldots\ldots(٥)$$

لإيجاد الزمن الكلي لحركة القطار:

من (١) $\longleftarrow$ $$t_1 = \frac{v}{\alpha} \ldots\ldots\ldots\ldots(٦)$$

من (٣) $\longleftarrow$ $$t_2 = \frac{x_2}{v} \ldots\ldots\ldots\ldots(٧)$$

من (٤) $\longleftarrow$ $$t_3 = \frac{v}{r} \ldots\ldots\ldots\ldots(٨)$$

وللتخلص من x_2 في (٧) :

من (٢) ⟵ (٩) .... $x_1 = \dfrac{v^2}{2\alpha}$

من (٥) ⟵ (١٠) .... $x_3 = \dfrac{v^2}{2r}$

ولكن: المسافة الكلية : $d = x_1 + x_2 + x_3$

$$\therefore \quad x_2 = d - x_1 - x_3$$

$$x_2 = d - \frac{v^2}{2\alpha} - \frac{v^2}{2r} = d - \frac{v^2}{2}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{r}\right) \quad \text{...........(١١)}$$

بالتعويض في (٧) :

$$t_2 = \frac{d}{v} - \frac{v}{2}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{r}\right) \quad \text{.............................(١٢)}$$

بجمع (٨) و (١٢) و (٦) نحصل على الزمن الكلي :

$$t = t_1 + t_2 + t_3$$

$$\therefore t = \frac{v}{\alpha} + \frac{d}{v} - \frac{v}{2}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{r}\right) + \frac{v}{r}$$

$$= \frac{d}{v} + \frac{v}{2}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{r}\right) \quad \text{.............................(١٣)}$$

وهو المطلوب الأول .

<u>**ولإيجاد قيمة v التي تجعل الزمن t أقل ما يمكن:**</u> من (١٣) نجد أن t دالة في v فلكي تكون t اقل ما يمكن نوجد التفاضل $\dfrac{dt}{dv}$ ونساويه بالصفر فنحصل على قيمة v التي تجعل t نهاية صغرى (أي اقل ما يمكن) ، فبالتفاضل بالنسبة إلى v :

$$\frac{dt}{dv} = -\frac{d}{v^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{r}\right)$$

وبمساواة هذا المقدار بالصفر :

$$0=-\frac{d}{v^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{r}\right)$$

$$\therefore\ \frac{d}{v^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha+r}{\alpha r}\right)\qquad \therefore\ \frac{v^2}{d}=2\left(\frac{\alpha r}{\alpha+r}\right)$$

$$v^2=2d\left(\frac{\alpha r}{\alpha+r}\right)$$

$$\therefore\ v=\sqrt{2d\left(\frac{\alpha r}{\alpha+r}\right)}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(١٤)$$

وهى قيمة v التي تجعل t أقل ما يمكن.

<u>ولإيجاد اقل قيمة لـ</u> t: نعوض من(١٤) في (١٣) :

$$t_{\min}=\frac{d}{v}+\frac{v}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{r}\right)=\frac{d}{v}+\frac{v}{2}\left(\frac{\alpha+r}{\alpha r}\right)=d\sqrt{\frac{\alpha+r}{2d\alpha r}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2d\alpha r}{\alpha+r}}\left(\frac{\alpha+r}{\alpha r}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{d(\alpha+r)}{2\alpha r}}+\sqrt{\frac{d\alpha r}{2(\alpha+r)}\cdot\left(\frac{\alpha+r}{\alpha r}\right)^2}=\sqrt{\frac{d(\alpha+r)}{2\alpha r}}+\sqrt{\frac{d(\alpha+r)}{2\alpha r}}$$

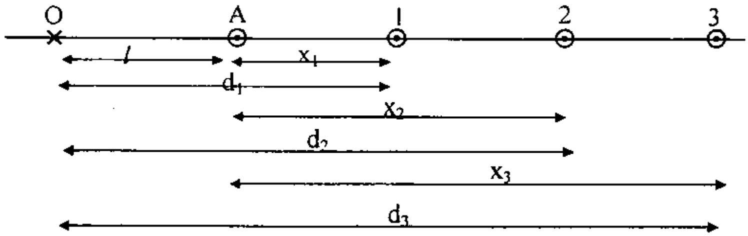
$$=2\sqrt{\frac{d(\alpha+r)}{2\alpha r}}=\sqrt{\frac{2d(\alpha+r)}{2\alpha r}}=\sqrt{2d\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{r}\right)}$$

وهو المطلوب .

<u>مثال(٧):</u> جسيم يتحرك في خط مستقيم بعجلة منتظمة α من نقطة A بسرعة v_0 من على بعد ℓ من نقطة الأصل O. فإذا كانت أبعاده عن نقطة الأصل عند الأزمنة $t_1\ ,\ t_2\ ,\ t_3$ هي : $d_1\ ,\ d_2\ ,\ d_3$ على الترتيب ، أثبت أنه إذا كانت $t_1\ ,\ t_2\ ,\ t_3$ تشكل متوالية حسابية حيث الفرق المتوسط بين الزمنين المتتالين هو d ، وكانت $d_1\ ,d_2\ ,\ d_3$ تشكل متوالية هندسية ، فإن العجلة تعطى بالعلاقة :

$$\alpha=\frac{\left(\sqrt{d_1}-\sqrt{d_3}\right)^2}{d^2}$$

الحـــل :



معادلات الحركة :

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$d_1 = \ell + x_1 = \ell + v_0 t_1 + \frac{1}{2}\alpha t_1^2$$

$$d_2 = \ell + x_2 = \ell + v_0 t_2 + \frac{1}{2}\alpha t_2^2$$

$$d_3 = \ell + x_3 = \ell + v_0 t_3 + \frac{1}{2}\alpha t_3^2$$

وحيث أن t_1 , t_2 , t_3 تشكل متوالية حسابية (عددية) فإن :

$t_1 + t_3 = 2t_2$ ....(١)

وحيث أن d_1 , d_2 , d_3 تشكل متوالية هندسية فإن :

$d_2 = \sqrt{d_1 d_3}$ ....(٢)

والفرق المتوسط d يعني أن :

$d = t_2 - t_1 = t_3 - t_2$ ....(٣)

والآن : لإيجاد α : بحذف ℓ, v_0 من معادلات d_1 , d_2 , d_3

$$d_1 + d_3 - 2d_2 = v_0\left(t_1 + t_3 - 2t_2\right) + \frac{1}{2}\alpha\left(t_1^2 + t_3^2 - 2t_2^2\right)$$

وباستخدام (١) : $t_1 + t_3 - 2t_2 = 0$

$\therefore d_1 + d_3 - 2d_2 = \frac{1}{2}\alpha\left(t_1^2 + t_3^2 - 2t_2^2\right)$ ....(٤)

$\alpha = \dfrac{2\left(d_1 + d_3 - 2d_2\right)}{t_1^2 + t_3^2 - 2t_2^2}$ ....(٥)

وباستخدام (٢) :

$$d_1+d_3-2\underbrace{d_2}=d_1+d_3-2\underbrace{\sqrt{d_1d_3}}=\left(\sqrt{d_1}-\sqrt{d_3}\right)^2 \;........(٦)$$

وباستخدام (٣) :

$$t_1^2+t_3^2-2t_2^2=\underbrace{\left(t_1^2-t_2^2\right)}+\underbrace{\left(t_3^2-t_2^2\right)}$$

$$=\underbrace{(t_1-t_2)(t_1+t_2)}+\underbrace{(t_3-t_2)(t_3+t_2)}$$

$$=\underbrace{(t_3-t_2)}\,(t_3+t_2)-\underbrace{(t_2-t_1)}\,(t_1+t_2)$$

$$=d\,(t_3+t_2)-d\,(t_1+t_2)=d\,(t_3-t_1)$$

ولكن:

$$t_3-t_2=t_2-t_1$$

$$\therefore\; t_3\underbrace{-t_1+t_1}-t_2=t_2-t_1 \qquad \therefore\; t_3-t_1=2t_2-2t_1=2(t_2-t_1)=2d$$

$$\therefore\; t_1^2+t_3^2-2t_2^2=d\,(2d)=2d^2 \;......................(٧)$$

بالتعويض من (٧) و (٦) في (٥):

$$\alpha=\frac{2\left(\sqrt{d_1}-\sqrt{d_3}\right)^2}{2d^2}=\frac{\left(\sqrt{d_1}-\sqrt{d_3}\right)^2}{d^2}$$

وهو المطلوب .

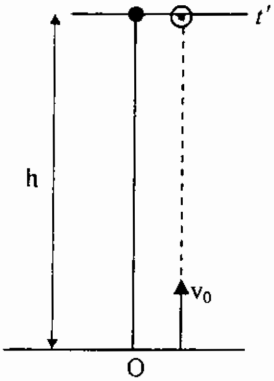
<u>مثال(٨):</u> على الحركة الرأسية تحت تأثير الجاذبية:

قذف جسيم من نقطة O رأسياً إلى أعلى بسرعة v_0 وبعد زمن t قذف جسيم آخر إلي أعلى من نفس النقطة O وبنفس السرعة v_0 ، فالتقي الجسيمان بعد زمن t' على ارتفاع h ، أثبت أن t',h يعطيان بالعلاقتين :

$$t'=\frac{t}{2}+\frac{v_0}{g} \quad , \quad h=\frac{4v_0^2-g^2t^2}{8g}$$

حيث g عجلة الجاذبية الأرضية.

<u>الحــل</u>: حيث أن الحركة رأسية إلي أعلى فتكون العجلة $\alpha=-g$



الجسيمان التقيا بعد زمن t' من البداية على ارتفاع h فتكون معادلة الحركة :

(١) للجسيم الأول :

$$h=v_0t'-\frac{1}{2}g(t')^2 \text{..........................(١)}$$

(٢) للجسيم الثاني :

$$h=v_0(t'-t)-\frac{1}{2}g(t'-t)^2 \text{................(٢)}$$

وذلك حيث أن الجسيم الأول وصل إلى الارتفاع h بعد زمن t' بينما الجسيم الثاني وصل إلى الارتفاع h بعد زمن $(t'-t)$ لأنه قذف بعد الأول بزمن t .

بحذف h بين (٢) و (١) [وذلك لإيجاد t'] :

بالطرح :

$$0=v_0t-\frac{1}{2}gt'^2+\frac{1}{2}g(t'-t)^2=v_0t-\frac{1}{2}gt'^2+\frac{1}{2}g(t'^2-2tt'+t^2)$$

$$=v_0t-\frac{1}{2}g\,t(2t'-t)$$

$$\therefore\ v_0=\frac{1}{2}g\,(2t'-t)\longrightarrow\qquad \therefore\ 2t'-t=\frac{2v_0}{g}$$

وهو المطلوب الأول
$$t'=\frac{t}{2}+\frac{v_0}{g} \text{......................(٣)}$$

ولإيجاد h: بالتعويض عن t' من (٣) في (١) :

$$h = v_0\left(\frac{t}{2}+\frac{v_0}{g}\right)-\frac{1}{2}g\left(\frac{t}{2}+\frac{v_0}{g}\right)^2 = v_0\left(\frac{t}{2}+\frac{v_0}{g}\right)-\frac{1}{2}g\left(\frac{t^2}{4}+\frac{tv_0}{g}+\frac{v_0^2}{g^2}\right)$$

$$= v_0\left(\frac{t}{2}+\frac{v_0}{g}\right)-\left(\frac{gt^2}{8}+\frac{tv_0}{2}+\frac{v_0^2}{2g}\right) = v_0\left(\frac{t}{2}+\frac{v_0}{g}\right)-\left(\frac{gt}{4}+\frac{v_0}{2}\right)\left(\frac{t}{2}+\frac{v_0}{g}\right)$$

$$= \left(\frac{t}{2}+\frac{v_0}{g}\right)\left(v_0-\frac{v_0}{2}-\frac{g\,t}{4}\right) = \left(\frac{t}{2}+\frac{v_0}{g}\right)\left(\frac{v_0}{2}-\frac{g\,t}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{t}{2}+\frac{v_0}{g}\right)\cdot\underbrace{\frac{g}{2}\left(\frac{v_0}{g}-\frac{t}{2}\right)} = \frac{g}{2}\left(\frac{v_0^2}{g^2}-\frac{t^2}{4}\right) = \frac{g}{2}\left(\frac{4v_0^2-t^2g^2}{4g^2}\right) = \frac{4v_0^2-t^2g^2}{8g}$$

وهو المطلوب ثانياً .

<u>الحركة الخطية بعجلة متغيرة:</u> في هذه الحالة تعطى العجلة المتغيرة بدلالة المسافة أو الزمن أو السرعة ، والمطلوب هو إيجاد :

(١) علاقة بين السرعة والزمن.

(٢) علاقة بين المسافة والزمن.

(٣) علاقة بين المسافة والسرعة.

ويكون لدينا الحالات الثلاثة الآتية :

(١) <u>إذا كانت العجلة دالة في المسافة</u> $\alpha = f(x)$: والمطلوب إيجاد :

(أ) <u>علاقة بين المسافة والسرعة</u> :

$$\alpha = f(x) = v\frac{dv}{dx} \longrightarrow v\,dv = f(x)dx$$

ثم نجري عملية التكامل فنوجد العلاقة المطلوبة: $v = R(x)$

(ب) علاقة بين المسافة و الزمن :

$$v = R(x) = \frac{dx}{dt} \longrightarrow dt = \frac{dx}{R(x)}$$

ثم نجري عملية التكامل ونوجد العلاقة المطلوبة $t = H(x)$

(٢) **إذا كانت العجلة دالة في الزمن** $\alpha = f(t)$: والمطلوب إيجاد:

(أ) علاقة بين السرعة و الزمن :

$$\alpha = f(t) = \frac{dv}{dt} \longrightarrow dv = f(t)dt$$

ثم نجري عملية التكامل ونوجد العلاقة المطلوبة $v = R(t)$

(ب) علاقة بين المسافة و الزمن :

$$v = R(t) = \frac{dx}{dt} \longrightarrow dx = R(t)dt$$

ثم نجري عملية التكامل ونحصل على العلاقة المطلوبة $x = H(t)$

(٣) **إذا كانت العجلة دالة في السرعة** $\alpha = f(v)$: والمطلوب إيجاد :

(أ) علاقة بين السرعة و الزمن :

$$\alpha = f(v) = \frac{dv}{dt} \longrightarrow dt = \frac{dv}{f(v)}$$

ونجري عملية التكامل فنحصل على العلاقة المطلوبة $t = R(v)$

(ب) علاقة بين المسافة و السرعة :

$$\alpha = f(v) = v\frac{dv}{dx} \longrightarrow dx = \frac{vdv}{f(v)}$$

ونجري عملية التكامل فنحصل على العلاقة المطلوبة : $x = H(v)$

أمثلة محلولة

مثال (١): إذا كانت العلاقة بين العجلة والسرعة لجسيم متحرك هي $\alpha = 2v + 3$ وبدأ الجسيم الحركة بسرعة $3\ m/\sec$، أثبت أن العلاقة بين السرعة والزمن هي : $v = \frac{3}{2}\left(3e^{2t} - 1\right)$

وأن العلاقة بين المسافة والزمن هي : $x = \frac{9}{4}\left[\left(e^{2t} - 1\right) - \frac{2}{3}t\right]$

الحل: هنا: $\alpha = f(v)$

$$\therefore \alpha = 2v + 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(١)$$

أولاً: **لإيجاد العلاقة بين السرعة والزمن** : نضع $\alpha = \frac{dv}{dt}$

$$\therefore \quad \frac{dv}{dt} = 2v + 3$$

بفصل المتغيرات والتكامل :

$$\int \frac{dv}{2v + 3} = \int dt$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\ln(2v + 3) = t + C_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٢)$$

$$\left[\int \frac{dx}{ax} = \frac{1}{a}\ln\left(ax + b\right)\right]$$

لإيجاد c_1 : في البداية $v = 3 \quad , \quad t = 0$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\ln(6+3) = 0 + c_1 \quad \therefore \quad c_1 = \frac{1}{2}\ln 9$$

بالتعويض في(٢):

$$\therefore \quad t = \frac{1}{2}\ln\left(2v + 3\right) - \frac{1}{2}\ln 9 = \frac{1}{2}\ln\frac{2v + 3}{9}$$

$$\therefore \underbrace{2t} = \ln \underbrace{\frac{2v+3}{9}}$$

$$\therefore \quad e^{2t} = \frac{2v+3}{9} \qquad \therefore \quad 9e^{2t} = 2v+3$$

$$\therefore \ 2v = 9e^{2t} - 3 = 3\left(3e^{2t} - 1\right)$$

$$\therefore \quad v = \frac{3}{2}\left(3e^{2t} - 1\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٣)$$

وهو المطلوب الأول.

ثانياً: العلاقة بين المسافة والزمن :

نضع $v = \dfrac{dx}{dt}$ في (٣) فنحصل على :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3}{2}\left(3e^{2t} - 1\right)$$

بفصل المتغيرات والتكامل:

$$\int dx = \frac{3}{2}\int \left(3e^{2t} - 1\right)dt$$

$$\int e^{\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$$

$$\therefore \quad x = \frac{3}{2}\left[3\frac{e^{2t}}{2} - t\right] + C_2$$

$$= \frac{9}{4}e^{2t} - \frac{3}{2}t + C_2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(٤)$$

ولإيجاد C_2 : في البداية : $t = 0$, $x = 0$

$$0 = \frac{9}{4}e^{0} - 0 + c_2 \qquad 0 = \frac{9}{4} + C_2$$

$$\therefore \quad C_2 = -\frac{9}{4}$$

بالتعويض في (٤):

$$x = \frac{9}{4}e^{2t} - \frac{3}{2}t - \frac{9}{4} = \frac{9}{4}\left[\left(e^{2t} - 1\right) - \frac{2}{3}t\right]$$

وهو المطلوب الثاني .

<u>مثال (٢):</u> يتحرك جسيم في الاتجاه الموجب لمحور x مبتدئاً من السكون من نقطة الأصل ، فإذا كانت عجلة الجسيم α بعد مضي زمن t تعطى بالعلاقة $\alpha = k\,e^{-nt}$ حيث k, n ثابتان ، أثبت أن السرعة تعطى بدلالة الزمن بالعلاقة $v = \frac{k}{n}\left(1-e^{-nt}\right)$ وأن العلاقة بين المسافة والسرعة هي :

$$n\,x = (n\,t - 1)v + \alpha\,t$$

<u>الحل:</u> العجلة هنا $\alpha = f(t)$

$$\alpha = k\ e^{-nt} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (١)$$

<u>المطلوب الأول</u> : علاقة بين السرعة والزمن :

نضع $\alpha = \frac{dv}{dt}$ في (١) :

$$\therefore \frac{dv}{dt} = k e^{-nt}$$

بفصل المتغيرات والتكامل :

$$\int dv = k\int e^{-nt}dt$$

$$v = -\frac{k}{n}e^{-nt} + C_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٢)$$

<u>ولإيجاد</u> C_1 : في البداية $v = 0 \quad , \quad t = 0$

$$\therefore \quad 0 = -\frac{k}{n}e^{0} + C_1 = -\frac{k}{n} + C_1$$

$$\therefore C_1 = \frac{k}{n}$$

بالتعويض في (٢) :

$$\therefore v = \frac{k}{n}e^{-nt} + \frac{k}{n} = \frac{k}{n}\left(1 - e^{-nt}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٣)$$

وهو المطلوب أولاً .

المطلوب الثاني: علاقة بين المسافة و السرعة

نضع $v=\dfrac{dx}{dt}$ في (٣) :

$$\frac{dx}{dt}=\frac{k}{n}\left(1-e^{-nt}\right)$$

بفصل المتغيرات و التكامل :

$$\int dx=\frac{k}{n}\int\left(1-e^{-nt}\right)dt$$

$$\therefore\quad x=\frac{k}{n}\left[t-\frac{e^{-nt}}{-n}\right]+C_2=\frac{k}{n}\left[t+\frac{e^{-nt}}{n}\right]+C_2\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٤)$$

ولإيجاد C_2 : في البداية $t=0$, $x=0$

$$\therefore\quad 0=\frac{k}{n}\left[0+\frac{e^{0}}{n}\right]+C_2\qquad\therefore\ C_2=-\frac{k}{n^2}$$

بالتعويض في (٤) :

$$x=\frac{k}{n}\left[t+\frac{e^{-nt}}{n}\right]-\frac{k}{n^2}=\frac{k}{n}\left[t+\frac{e^{-nt}}{n}-\frac{1}{n}\right]$$

$$\therefore\quad n\,x=k\left[t+\frac{e^{-nt}}{n}-\frac{1}{n}\right]=\frac{k}{n}\left[nt+e^{-nt}-1\right]$$

$$=\frac{k}{n}\left[nt-1\right]+\frac{k}{n}e^{-nt}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٥)$$

وهي علاقة بين المسافة x والزمن t والمطلوب هو إيجاد علاقة بين المسافة x والسرعة v :

فمن (١) :

$$\alpha=k\,e^{-nt}$$

$$\therefore\ \frac{k}{n}e^{-nt}=\frac{\alpha}{n}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٦)$$

ومن (٣):

$$v=\frac{k}{n}\left(1-e^{-nt}\right)$$

$$\therefore\ \frac{k}{n}=v+\frac{k}{n}e^{-nt}$$

وباستخدام (٦) :

$$\therefore\quad \frac{k}{n}=v+\frac{\alpha}{n}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٧)$$

بالتعويض من (٧) و (٦) في (٥) :

$$\therefore nx=\left(v+\frac{\alpha}{n}\right)(nt-1)+\frac{\alpha}{n}=(nt-1)v+(nt-1)\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha}{n}=(nt-1)v+\alpha t$$

وهو المطلوب ثانياً .

مثال (٣): يتحرك جسيم من السكون بعجلة ترتبط بالزمن بالعلاقة $a=\alpha-\beta t^2$ حيث α,β ثابتان اثبت أن الجسيم يكتسب أقصى سرعة له بعد زمن قدره $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ وأنه يكون قد قطع مسافة قدرها $\left(\frac{5}{12}\frac{\alpha^2}{\beta}\right)$ ثم أوجد العلاقة بين هذه المسافة وأقصى سرعة .

الحل: ملحوظة :

يتحرك الجسيم بأقصى سرعة $(v=v_{\max})$ عندما تتلاشى عجلته $\left(a=\frac{dv}{dt}=0\right)$ [من قوانين النهايات العظمى] .

ولحل المسألة:

حيث أن : $a=\alpha-\beta t^2 \ldots\ldots\ldots\ldots(١)$

فبوضع $a=0$ نحصل على الزمن الذي تتلاشى عنده العجلة أي زمن الوصول إلى أقصى سرعة

$$\therefore 0=\alpha-\beta t_{\max}^2$$

$$\therefore t_{\max}=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \ldots\ldots\ldots\ldots(٢)$$

ولإيجاد أقصى سرعة :

نوجد علاقة بين السرعة والزمن ونعوض فيها بالزمن $t_{\max}$ فنحصل على $v_{\max}$

فبوضع $a=\frac{dv}{dt}$ في (١): $\frac{dv}{dt}=\alpha-\beta t^2$

$$\therefore \int dv=\int(\alpha-\beta t^2)dt \qquad \therefore v=\alpha t-\frac{1}{3}\beta t^3+C_1$$

ولإيجاد C_1 : في البداية $t=0$ و $v=0 \longleftarrow C_1=0$

$$\therefore \quad v=\alpha t-\frac{1}{3}\beta t^3 \quad \text{..............................(٣)}$$

وتعطي هذه العلاقة السرعة v عند أي زمن t وبالتعويض عن $t=t_{\max}$ نحصل على:

$$v_{\max}=\alpha\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)-\frac{1}{3}\beta\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^3=\sqrt{\frac{\alpha^3}{\beta}}-\frac{1}{3}\beta\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}}=\sqrt{\frac{\alpha^3}{\beta}}-\frac{1}{3}\alpha^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{\beta}{\beta^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\sqrt{\frac{\alpha^3}{\beta}}-\frac{1}{3}\alpha^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{\beta^{\frac{1}{2}}}=\sqrt{\frac{\alpha^3}{\beta}}-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{\alpha^3}{\beta}}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\alpha^3}{\beta}} \quad \text{..............(٤)}$$

ولإيجاد المسافة: نوجد علاقة بين x,t ونعوض عن $t=t_{\max}$ فنحصل على $x=x_{\max}$

فمن (٣): بوضع $v=\dfrac{dx}{dt} \leftarrow$ $\qquad \therefore \quad \dfrac{dx}{dt}=\alpha t-\dfrac{1}{3}\beta t^3$

$$\therefore \quad \int dx=\int\left(\alpha t-\frac{1}{3}\beta t^3\right)dt \quad \therefore \quad x=\frac{1}{2}\alpha t^2-\frac{1}{12}\beta t^4+C_2$$

ولإيجاد C_2 : في البداية $t=0$ و $x=0 \longleftarrow C_2=0$

$$\therefore \quad x=\frac{1}{2}\alpha t^2-\frac{1}{12}\beta t^4 \quad \text{.......................(٥)}$$

وبوضع $t=t_{\max}$ في (٥) نحصل على المسافة التي يصل عندها الجسيم إلى أقصى سرعته.

$$x_{\max}=\frac{1}{2}\alpha\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2-\frac{1}{12}\beta\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^4=\frac{1}{2}\alpha\cdot\frac{\alpha}{\beta}-\frac{1}{12}\beta\cdot\frac{\alpha^2}{\beta^2}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{\beta}-\frac{1}{12}\frac{\alpha^2}{\beta}=\frac{5}{12}\frac{\alpha^2}{\beta} \quad \text{..........................(٦)}$$

وهو المطلوب الثاني.

المطلوب الأخير: علاقة بين v_{max} , x_{max} :

فمن (٤) :

$$v_{max} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\alpha^3}{\beta}} \therefore \quad v^2_{max} = \frac{4}{9}\frac{\alpha^3}{\beta} \therefore \quad \frac{\alpha^2}{\beta} = \frac{9}{4}\,\frac{v^2_{max}}{\alpha} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٧)$$

بالتعويض عن $\frac{\alpha^2}{\beta}$ في (٦) :

$$\therefore \quad x_{max} = \frac{5}{12}\left(\frac{9}{4}\frac{v^2_{max}}{\alpha}\right) = \frac{15}{16\alpha}v^2_{max}$$

وهي العلاقة المطلوبة

$$\therefore x_{max} = \frac{15}{16\alpha}v^2_{max}$$

مثــال (٤): قذف جسيم من نقطة الأصل في الإتجاه الموجب لمحور x بسرعة إبتدائية v_0 وبعجلة تقصيرية يتناسب مقدارها مع مربع سرعة الجسيم $(a = -k\,v^2)$ حيث k ثابت ، v سرعة الجسيم. أبثت العلاقات الآتية:

(١) بين السرعة والزمن: $v = \dfrac{v_0}{1 + kv_0 t}$

(٢) بين السرعة والمسافة: $v = v_0 e^{-kx}$

(٣) بين المسافة والزمن: $x = \dfrac{1}{k}\ln(\,1 + k\,v_0\,t\,)$

الحـــل:

(١) إيجاد العلاقة بين $v\,,t$:

$$a = -kv^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(١)$$

$$\downarrow$$

$$\therefore \quad \frac{dv}{dt} = -\,k\;v^2$$

بفصل المتغيرات والتكامل:

$$\therefore \quad \int -\frac{dv}{v^2} = k\int dt \qquad \int -v^{-2}dv = k\int dt$$

$\therefore \quad v^{-1} = kt + C_1$ ....(٢)

لإيجاد C_1 : في البداية: $v = v_0 \quad , \quad t = 0$

$\therefore \quad v_0^{-1} = 0 + C_1 \longrightarrow C_1 = v_0^{-1}$

بالتعويض في (٢):

$\therefore \quad v^{-1} = kt + v_0^{-1}$

$\therefore \quad \dfrac{1}{v} = \dfrac{1}{v_0} + kt$

بالضرب في v_0 :

$\dfrac{v_0}{v} = 1 + kv_0 t$

$\therefore \quad \dfrac{v}{v_0} = \dfrac{1}{1 + kv_0 t} \longrightarrow v = \dfrac{v_0}{1 + kv_0 t}$ ....(٣)

(٢) إيجاد العلاقة بين v, x :

نضع $a = v\dfrac{dv}{dx}$ في (١) :

$\therefore \quad v\dfrac{dv}{dx} = -kv^2 \longrightarrow \dfrac{dv}{dx} = -kv$

بفصل المتغيرات و التكامل:

$\int \dfrac{dv}{v} = -k \int dx$

$\therefore \quad \ln v = -kx + C_2$ ....(٤)

لإيجاد C_2 : في البداية: $v = v_0 \quad , \quad x = 0$

$\therefore \quad C_2 = \ln v_0$

بالتعويض في (٤):

$\ln v = -kx + \ln v_0$

$\therefore \quad \ln \dfrac{v}{v_0} = -kx$

$\ln a = b \Rightarrow \therefore \quad a = e^b$

$\therefore \quad \dfrac{v}{v_0} = e^{-kx} \qquad \therefore \quad v = v_0 e^{-kx}$ ....(٥)

(٣) إيجاد العلاقة بين x, t :

من (٥):

$$v = v_0 e^{-kx} \longrightarrow \frac{v}{v_0} = e^{-kx}$$

$$\ln\frac{v}{v_0} = -kx \rightarrow x = -\frac{1}{k}\ln\frac{v}{v_0}$$

$$\therefore x = \frac{1}{k}\ln\frac{v_0}{v} \qquad \text{(٦)}$$

ومن (٣) :

$$v = \frac{v_0}{1 + kv_0 t} \qquad \therefore \quad \frac{v_0}{v} = 1 + k v_0 t$$

بالتعويض في (٦):

$$\therefore \quad x = \frac{1}{k}\ln\left(1 + k v_0 t\right) \qquad \text{(٧)}$$

وهو المطلوب .

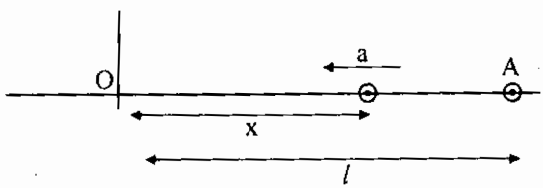
مثال(٥) : الحركة تحت تأثير قانون التربيع العكسي :

يتحرك جسيم في خط مستقيم في إتجاه محور x بعجلة تتجه دائماً نحو نقطة الأصل O وتتناسب عكسياً مع مربع بعد الجسيم عن O (أي تخضع لقانون التربيع العكسي) فإذا بدأ الجسيم الحركة من السكون عند نقطة A التي تبعد مسافة ℓ عن O فأثبت أن الزمن t يعطى بدلالة المسافة x بالعلاقة:

$$t = \sqrt{\frac{\ell}{2k}}\left[\ell\cos^{-1}\sqrt{\frac{x}{\ell}} + \sqrt{x\left(\ell - x\right)}\right]$$

حيث k ثابت . ومن ثم أوجد الزمن اللازم للوصول إلى النقطة O

الحــل:



$$a = -\frac{k}{x^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (١)$$

[إشارة ــ لأن الجسيم يتحرك نحو O أي في الإتجاه السالب لمحور x] ،

حيث k ثابت.

<u>لإيجاد الزمن بدلالة المسافة</u>: نوجد أولاً السرعة بدلالة المسافة وذلك بوضع $a = v\dfrac{dv}{dx}$ في (١)

$$\therefore \quad v\frac{dv}{dx} = -\frac{k}{x^2}$$

بفصل المتغيرات والتكامل:

$$\int v dv = -k\int \frac{dx}{x^2}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}v^2 = -k\left[-\frac{1}{x}\right] + C_1 = \frac{k}{x} + C_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٢)$$

<u>ولإيجاد</u> C_1 : في البداية:- $x = \ell \quad , \quad v = 0$

$$\therefore \quad C_1 = -\frac{k}{\ell}$$

بالتعويض في (٢):

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{k}{x} - \frac{k}{\ell}$$

$$\therefore \quad v^2 = 2k\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ell}\right) = \frac{2k}{x\,\ell}(\ell - x) \qquad \therefore \quad v = \pm\sqrt{\frac{2k}{\ell}}\sqrt{\frac{\ell - x}{x}}$$

نأخذ إشارة ــ [لأن الجسيم يتحرك نحو O]

$$\therefore \quad v = -\sqrt{\frac{2k}{\ell}}\sqrt{\frac{\ell - x}{x}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٣)$$

<u>ولإيجاد الزمن</u> t بدلالة المسافة x : نضع $v = \dfrac{dx}{dt}$ في (٣) :

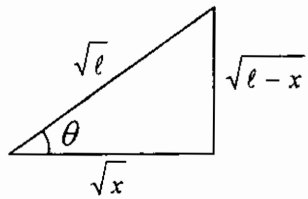
$$\therefore \quad \frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{2k}{\ell}}\sqrt{\frac{\ell - x}{x}}$$

وبفصل المتغيرات:

$$\int dt=-\sqrt{\frac{\ell}{2k}}\int\sqrt{\frac{x}{\ell-x}}dx$$

$$\therefore\quad t=-\sqrt{\frac{\ell}{2k}}\int\left[\sqrt{\frac{x}{\ell-x}}dx\right]\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٤)$$

ولإيجاد التكامل $\int\sqrt{\frac{x}{\ell-x}}dx$: نأخذ التعويض: $x=\ell\cos^2\theta$



$$\therefore dx=-2\ell\cos\theta\cdot\sin\theta d\theta$$

$$\sqrt{\frac{x}{\ell-x}}=\sqrt{\frac{\ell\cos^2\theta}{\ell-\ell\cos^2\theta}}=\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{1-\cos^2\theta}}$$

$$=\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\therefore\quad\int\sqrt{\frac{x}{\ell-x}}dx=\int\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot(-2\ell\cos\theta\sin\theta d\theta)$$

$$=-2\ \ell\int\underbrace{\cos^2\theta}\ d\theta=-2\ \ell\int\underbrace{\frac{1}{2}(1+\cos2\theta)}\ d\theta$$

$$=-\ell\int(1+\cos2\theta)d\theta=-\ell\left[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]+C_2$$

وبالتعويض في (٤) :

$$\therefore\quad t=\sqrt{\frac{\ell}{2k}}\left[\ell\left(\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right)\right]+C_2\ldots\ldots(٥)$$

ولكن: $x=\ell\cos^2\theta$

$$\therefore\cos\theta=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\ell}}\qquad\therefore\qquad\theta=\cos^{-1}\sqrt{\frac{x}{\ell}}$$

$$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\sqrt{\frac{\ell-x}{\ell}}\cdot\sqrt{\frac{x}{\ell}}=\frac{2}{\ell}\sqrt{x(\ell-x)}$$

وتصبح (٥) :

$$t=\sqrt{\frac{\ell}{2k}}\left[\ell\cos^{-1}\sqrt{\frac{x}{\ell}}+\frac{\ell}{2}\cdot\frac{2}{\ell}\sqrt{x\left(\ell-x\right)}\right]+C_2$$

$$=\sqrt{\frac{\ell}{2k}}\left[\ell\cos^{-1}\sqrt{\frac{x}{\ell}}+\sqrt{x\left(\ell-x\right)}\right]\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٦)$$

وهو المطلوب. [حيث $C_2=0 \longleftarrow$ في البداية $t=0, x=\ell$]

__ولإيجاد الزمن اللازم للوصول إلي نقطة__ O : نضع $x=0$ في (٦) التي هي علاقة عامة تعطي الزمن t عند أي مسافة x

$$\therefore\ t_0=\sqrt{\frac{\ell}{2k}}\left[\ell\cos^{-1}0+\sqrt{0}\right]$$

$$=\sqrt{\frac{\ell}{2k}}\cdot\ell\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi\ell^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2k}}$$

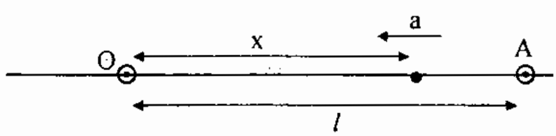
$\cos^{-1}1=0$

$\cos^{-1}0=\frac{\pi}{2}$

وهو المطلوب الثاني .

__مثال(٦) :__ جسيم يتحرك من السكون من عند نقطة A التي تبعد مسافة ℓ عن نقطة الأصل O ، فإذا كان الجسيم يتحرك بعجلة مقدارها $\mu\left(x+\frac{\ell^4}{x^3}\right)$ نحو المركز حيث μ ثابت ، أثبت أن الجسيم يصل إلي المركز O بعد زمن قدره $\frac{\pi}{4\sqrt{\mu}}$.

__الحـل:__



معادلة العجلة :

$$a=-\mu\left(x+\frac{\ell^4}{x^3}\right)\dots\dots\dots\dots\dots\dots(١)$$

[إشارة ــ لأن الحركة نحو O]

نوجد أولاً علاقة بين v,x :

$$v\frac{dv}{dx}=-\mu\left(x+\frac{\ell^4}{x^3}\right)$$

بفصل المتغيرات و التكامل:

$$\int v dv=-\mu\int\left(x+\frac{\ell^4}{x^3}\right)dx$$

$$\frac{1}{2}v^2=-\mu\left[\frac{x^2}{2}-\frac{\ell^4}{2x^2}\right]+C$$

$$\therefore\ v^2=-\mu\left[x^2-\frac{\ell^4}{x^2}\right]+C_1\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(٢)$$

ولإيجاد C_1 : في البداية: $x=\ell\quad,\quad v=0$

$$0=-\mu\left[\ell^2-\frac{\ell^4}{\ell^2}\right]+C_1\longrightarrow\therefore\ C_1=0$$

بالتعويض في (٢) :

$$v^2=-\mu\left[x^2-\frac{\ell^4}{x^2}\right]=\mu\left[\frac{\ell^4}{x^2}-x^2\right]=\mu\frac{\ell^4-x^4}{x^2}$$

$$\therefore\ v=\pm\sqrt{\mu}\frac{\sqrt{\ell^4-x^4}}{x}\qquad\therefore\ v=-\sqrt{\mu}\frac{\sqrt{\ell^4-x^4}}{x}$$

ولإيجاد الزمن t بعد قطع الجسيم مسافة x :

نضع $v=\dfrac{dx}{dt}$

$$\therefore\ \frac{dx}{dt}=-\sqrt{\mu}\frac{\sqrt{\ell^4-x^4}}{x}$$

وبفصل المتغيرات و التكامل:

$$\int dt=-\frac{1}{\sqrt{\mu}}\int\frac{x dx}{\sqrt{\ell^4-x^4}}$$

$$\therefore\ t=-\frac{1}{\sqrt{\mu}}\int\frac{x dx}{\sqrt{\ell^4-x^4}}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(٣)$$

ولإيجاد التكامل في (٣): نستخدم التعويض : $x^2 = \ell^2 \cos\theta$

$$\therefore \quad 2x\,dx = -\ell^2 \sin\theta\, d\theta \qquad \therefore \quad x\,dx = -\frac{\ell^2}{2}\sin\theta\, d\theta$$

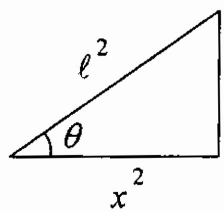
أيضاً : $\sqrt{\ell^4 - x^4} = \sqrt{\ell^4 - \ell^4\cos^2\theta} = \sqrt{\ell^4(\ 1-\cos^2\theta\ )} = \ell^2 \sin\theta$

وبالتعويض في (٣)

$$\therefore \quad t = -\frac{1}{\sqrt{\mu}}\int \frac{-\frac{\ell^2}{2}\sin\theta\, d\theta}{\ell^2 \sin\theta} = \frac{1}{2\sqrt{\mu}}\int d\theta$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\mu}}\theta + C_2 \ = \frac{1}{2\sqrt{\mu}}\cos^{-1}\frac{x^2}{\ell^2} + C_2 \ \ldots\ldots\ldots (٤)$$

حيث $x^2 = \ell^2 \cos\theta$



$$\therefore \cos\theta = \frac{x^2}{\ell^2} \qquad \therefore \quad \theta = \cos^{-1}\frac{x^2}{\ell^2}$$

ولإيجاد C_2: في البداية: $x = \ell \quad , \quad t = 0$

$$\therefore \quad C_2 = 0 \quad \therefore \quad t = \frac{1}{2\sqrt{\mu}}\cos^{-1}\frac{x^2}{\ell^2}$$

ويكون الزمن اللازم للوصول إلي المركز $(x = 0)$ هو :

$$t_0 = \frac{1}{2\sqrt{\mu}}\cos^{-1} 0 = \frac{1}{2\sqrt{\mu}}\cdot\frac{\pi}{2} \qquad \therefore \quad t_0 = \frac{\pi}{4\sqrt{\mu}}$$

وهو المطلوب.

تطبيق علي الحركة الخطية: الحركة في وسط مقاوم :

هي نوع من أنواع الحركة الخطية يتحرك فيها الجسيم في وسط مادي يقاوم حركته فإذا تحرك جسيم في خط رأسي إلي أسفل في وسط مادي يقاوم حركته بقوة مقاومة R (وهي دائماً ضد الحركة). فإن معادلة حركة الجسيم هي:

$$a = g - R$$

حيث : R قوة المقاومة للحركة ، g عجلة الجاذبية ، a عجلة الحركة (العجلة التي يتحرك بها الجسيم)

المقاومة R :

وجد عملياً أن R تتناسب مع سرعة الجسيم أو مع مربعها وبوجه عام فإن :

$R \propto v^n, n = 1, 2, \ldots$

$\therefore \boxed{R = kv^n}$, k ثابت

أمثلة محلولة

مثال (١) : المقاومة تتناسب مع السرعة

$$R \propto V \rightarrow R = kv$$

وكمثال لهذه الحالة: حركة قطرات المطر (مع ثبوت كتلتها أثناء الحركة)

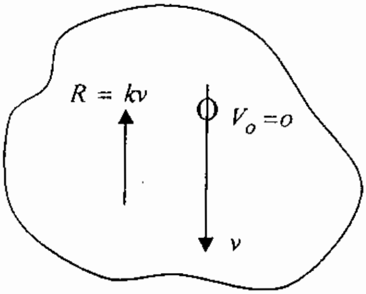
المثال : قطرة مطر تتحرك رأسياً إلي أسفل من السكون تحت تأثير الجاذبية الأرضية وسط سحابة ساكنة تقاوم حركة القطرة بمقاومة تتناسب مع سرعة القطرة (v) . المطلوب :

(١) إيجاد سرعة القطرة بعد زمن معين t .

(٢) إيجاد المسافة (x) المقطوعة بعد هذا الزمن.

(٣) إيجاد العلاقة بين السرعة v والمسافة المقطوعة x.

الحـــل:



معادلة حركة قطرة المطر:

إذا كانت a هي عجلة الحركة (العجلة التي تتحرك بها القطرة)

$\therefore \quad a = g - R = g - kv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (١)$

ولإيجاد العلاقة بين t , v : نضع $a = \dfrac{dv}{dt}$ في (١) :

$$\therefore \quad \frac{dv}{dt} = g - kv = k\left(\frac{g}{k} - v\right) = k(\lambda - v) \qquad \Big| \quad \frac{g}{k} = \lambda$$

بفصل المتغيرات و التكامل:

$$\int -\frac{dv}{\lambda - v} = -k \int dt \qquad \Big| \quad \int \frac{dx}{\alpha + x} = \ln(a + x)$$

$\therefore \quad In(\lambda - v) = -kt + C_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٢)$

إيجاد C_1 : في البداية: $t = 0$, $v = 0$

$\therefore \quad C_1 = \ln \lambda$

بالتعويض في (٢): $\ln(\lambda - v) = -kt + \ln \lambda$

$$\therefore \quad \ln \frac{\lambda - v}{\lambda} = -kt \qquad \therefore \quad \frac{\lambda - v}{\lambda} = e^{-kt}$$

$$\therefore \quad 1 - \frac{v}{\lambda} = e^{-kt} \longrightarrow \frac{v}{\lambda} = 1 - e^{kt} \qquad \therefore \quad v = \lambda\left(1 - e^{-kt}\right)$$

وهي العلاقة بين t , v .

<u>ولإيجاد العلاقة بين</u> x,t : نضع $v=\frac{dx}{dt}$ في علاقة v

$$\therefore \frac{dx}{dt}=\lambda\left(1-e^{-kt}\right)$$

بفصل المتغيرات والتكامل :

$$\int dx=\lambda\int\left(1-e^{-kt}\right)dt \qquad \therefore x=\lambda\left[t+\frac{e^{-kt}}{k}\right]+C_2 \quad \text{..........(٣)}$$

<u>إيجاد</u> C_2 :

في البداية $t=0$, $x=0$ $\leftarrow$ $\qquad C_2=-\frac{\lambda}{k}$

بالتعويض في (٣):

$$\therefore \quad x=\lambda\left[t+\frac{e^{-kt}}{k}\right]-\frac{\lambda}{k}=\lambda\left[t-\frac{1}{k}+\frac{1}{k}e^{-kt}\right]=\lambda\left[t-\frac{1}{k}\left(1-e^{-kt}\right)\right]$$

وهي العلاقة بين x,t .

<u>ولإيجاد العلاقة بين</u> x,v : نضع $a=v\frac{dv}{dx}$ في معادلة العجلة (١) :

$$\therefore \quad v\frac{dv}{dx}=k\left(\lambda-v\right)$$

بفصل المتغيرات والتكامل:

$$\int\frac{-v\,dv}{\lambda-v}=-k\int dx$$

$$\therefore \int\frac{\lambda-v-\lambda}{\lambda-v}dv=-kx+C_3 \qquad \therefore\int\left[1-\frac{\lambda}{\lambda-v}\right]dv=-kx+C_3$$

$$\therefore \quad v+\lambda\ln\left(\lambda-v\right)=-kx+C_3 \qquad \Bigg| \qquad \int\frac{dx}{a-x}=-\ln\left(a-x\right)$$

<u>لإيجاد</u> C_3 : في البداية: $v=0$, $x=0$

$$\therefore \quad C_3=\lambda\ln\lambda$$

بالتعويض عن C_3:

$$\therefore \quad v+\lambda\ln(\lambda-v)=-kx+\lambda\ln\lambda$$

من هذه العلاقة يمكن إيجاد v بدلالة x أو x بدلالة v
فمثلاً

$$kx=\lambda\ln\lambda-\lambda\ln(\lambda-v)-v=\lambda\ln\frac{\lambda}{\lambda-v}-v$$

$$\therefore \quad x=\frac{1}{k}\left[\lambda\ln\frac{\lambda}{\lambda-v}-v\right]$$

ويمكن كذلك إيجاد v بدلالة x .

<u>مثال (٢):</u> <u>المقاومة تتناسب مع مربع السرعة</u> $R\propto v^2 \to R=kv^2$

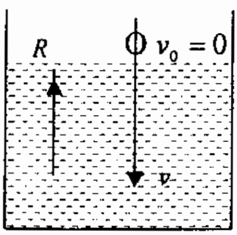
<u>وكمثال لهذه الحالة</u> : كرة معدنية تتحرك رأسياً إلي أسفل من السكون داخل كوب به سائل لزج (الجلسرين مثلاً) بحيث كان السائل يقاوم حركة الكرة بمقاومة R تتناسب مع مربع سرعة الكرة v داخل السائل. المطلوب:

(١) إيجاد سرعة الكرة بعد أي زمن t .

(٢) إيجاد المسافة x التي تقطعها الكرة بعد هذا الزمن .

(٣) العلاقة بين السرعة v والمسافة المقطوعة x .

<u>الحــل :</u>



<u>معادلة حركة الكرة :</u>

إذا كانت a هي عجلة الكرة المتحركة فإن:

$$\frac{g}{k}=\lambda^2$$

$$\therefore a=g-R=g-kv^2=k\left(\frac{g}{k}-v^2\right)$$

$$=k\left(\lambda^2-v^2\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(١)$$

العلاقة بين $v\ ,t$:

نضع $a=\frac{dv}{dt}$ في (١) :

$$\therefore \quad \frac{dv}{dt}=k\left(\lambda^2-v^2\right)$$

بفصل المتغيرات والتكامل :

$$\int \frac{dv}{\lambda^2-v^2}=k\int dt$$

ومن جدول التكاملات القياسية :

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\lambda}\tanh^{-1}\frac{v}{\lambda}=kt+C_1$$

ولإيجاد C_1 : في البداية: $v=0\ ,\ t=0 \leftarrow c_1=0$

حيث $\tanh^{-1}0=0$

وبالتعويض عن C_1 :

$$\frac{1}{\lambda}\tanh^{-1}\frac{v}{\lambda}=kt$$

$$\therefore \tanh^{-1}\frac{v}{\lambda}=\lambda kt \quad \therefore \frac{v}{\lambda}=\tanh\lambda kt \quad \therefore \quad v=\lambda\tanh\lambda kt$$

وهي العلاقة المطلوبة.

العلاقة بين $x\ ,t$ نضع $v=\frac{dx}{dt}$ في علاقة v :

$$\therefore \frac{dx}{dt}=\lambda\tanh\lambda kt$$

بفصل المتغيرات والتكامل:

$$\int dx=\lambda\int \tanh\lambda kt\,dt$$

ولكن: من جدول التكاملات القياسية

$$\int \tanh ax\,dx=\frac{1}{a}\ln(\cosh ax)$$

$$\therefore \quad x=\lambda\cdot\frac{1}{\lambda k}\ln[\cosh\lambda kt]+C_2$$

$$=\frac{1}{k}\ln[\cosh\lambda kt]+C_2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٢)$$

ولإيجاد C_2 : في البداية: $t=0\ ,\ x=0$

$$0=\frac{1}{k}\ln[\cosh 0]+C_2=\frac{1}{k}\ln 1+C_2=C_2\longrightarrow C_2=0$$

بالتعويض في (٢) :

$$\therefore \quad x = \frac{1}{k}\ln\left[\cosh \lambda k t\right]$$

وهي العلاقة بين x, t .

العلاقة بين v, x :

نضع $a = v\,\dfrac{dv}{dx}$ في (١) :

$$v\,\frac{dv}{dx} = k\left(\lambda^2 - v^2\right) \qquad\Big|\qquad \lambda^2 = \frac{g}{k}$$

بفصل المتغيرات والتكامل:

$$\int \frac{-2v\,dv}{\lambda^2 - v^2} = -2k\int dx$$

[ضربنا الطرفين في (2-) لكي نحصل على كسر بسطه يساوي تفاضل مقامه]

$$\therefore \quad \ln\left(\lambda^2 - v^2\right) = -2kx + C_3 \;\ldots\ldots(٣)$$

لإيجاد C_3 :

في البداية: $v = 0 \quad , \quad x = 0$

$$\therefore \quad C_3 = \ln\lambda^2$$

وبالتعويض في (٣):

$$\ln\left(\lambda^2 - v^2\right) = -2kx + \ln\lambda^2$$

ومن هذه العلاقة يمكن إيجاد v بدلالة x أو x بدلالة v .

فمثلاً:

$$\ln\frac{\lambda^2 - v^2}{\lambda^2} = -2kx \quad \therefore \quad \frac{\lambda^2 - v^2}{\lambda^2} = e^{-2kx} \quad \therefore 1 - \frac{v^2}{\lambda^2} = e^{-2kx}$$

$$\therefore \quad \frac{v^2}{\lambda^2} = 1 - e^{-2kx} \quad \therefore \quad v^2 = \lambda^2\left(1 - e^{-2kx}\right) \quad \therefore \quad v = \lambda\sqrt{1 - e^{-2kx}}$$

وهو المطلوب ثالثاً.

مسائل على الباب الأول

(١) يتعين موضع جسيم يتحرك على خط مستقيم بالعلاقة $x=\frac{1}{2}\alpha t^2+\beta t+\gamma$ حيث α,β,γ ثوابت، أوجد سرعته v وعجلته a ثم أثبت : $v^2=\beta^2+2\alpha(x-\gamma)$.

(٢) يتحرك جسيم تحت تأثير عجلة ترتبط ببعد الجسيم عن نقطة ثابتة بالعلاقة $\alpha=x+2$ فإذا بدأ الجسيم الحركة بسرعة تساوي 2 وحدة ، فأثبت أن العلاقة بين المسافة والزمن هي: $x=2(e^t-1)$

حيث e هي أساس اللوغرثمات النابرية.

(٣) إذا كانت العلاقة بين السرعة والمسافة لجسيم متحرك في خط مستقيم تتعين بالعلاقة $v=v_0e^{-kx}$ حيث k ثابت ، v_0 هي السرعة الإبتدائية للجسيم المتحرك ، أوجد كلاً من المسافة والسرعة والعجلة بدلالة الزمن.

(٤) بدا جسيم حركته من السكون من النقطة $p_1(\ell,0)$ حيث $\ell>0$ نحو نقطة الأصل O بعجلة تتجه دائماً نحو O ويتناسب مقدارها عكسياً مع مكعب البعد عن O ، فإذا كان مقدار العجلة على بعد $1\ cm$ من نقطة الأصل هو n^2 فأوجد سرعة الجسيم والزمن الذي يأخذه حتى يصل إلى النقطة $p_2(b,0)$ حيث $\ell>b>0$.

(٥) يتحرك جسيم في خط مستقيم بعجلة مقدارها $\left(\frac{k}{x^3}\right)$ حيث k ثابت ، x هو بعد الجسيم عن نقطة الأصل عند أي لحظة. فإذا بدأ الجسيم الحركة من السكون من على بعد ℓ من O فأثبت أن الجسيم يصل إلى O بعد زمن قدره $\frac{\ell^2}{\sqrt{k}}$.

(٦) يتحرك جسيم في خط مستقيم من السكون من نقطة تبعد مسافة ℓ عن مركز طارد O. فإذا كان الجسيم يتحرك بعجلة يتناسب مقدارها عكسياً مع مربع المسافة $\left(\alpha = \frac{k}{x^2}\right)$، حيث k ثابت ، أوجد السرعة عند النقطة التي تبعد مسافة x عن O وأثبت أن الزمن اللازم للوصول إلى تلك النقطة هو :

$$t = \sqrt{\frac{\ell}{2k}}\left[\sqrt{x\left(x-\ell\right)} + \ell \cdot \ln\left(\sqrt{\frac{x}{e}} + \sqrt{\frac{x}{e} - 1}\right)\right]$$

(٧) يتحرك جسيم في خط مستقيم $0x$ بعجلة تقصيرية $\alpha e^{\beta v}$ حيث v السرعة عند أي لحظة أثناء الحركة، α,β ثابتان، فإذا بدأ الجسيم الحركة من 0 بسرعة v_0 فأوجد المسافة والزمن اللذان يتوقف عندهما الجسيم عن الحركة.

(٨) يتحرك جسيم في خط مستقيم $0x$ بعجلة تتجه دائماً نحو الأصل ومقدارها $a = \frac{\mu^2}{x^3}$ حيث μ ثابت، أوجد سرعة الجسيم والزمن الذي يأخذه حتى يصل إلى نقطة B التي تبعد مسافة ℓ عن 0، إذا علمت أن الجسيم بدأ حركته من السكون عند نقطة A التي تبعد مسافة k عن 0 حيث $k > \ell > 0$.

(٩) قذفت نقطة مادية رأسياً إلى أعلى بسرعة ابتدائية v_0 في وسط تتناسب مقاومته مع مربع السرعة، أوجد أقصى ارتفاع تصل إليه النقطة المادية وزمن الوصول إلى هذا الارتفاع.

(١٠) قذفت نقطة مادية كتلتها m رأسياً إلى أعلى بسرعة ابتدائية $v_0 = \sqrt{\frac{3g}{k}}$ في وسط تقدر مقاومته بالمقدار (kmv^2) حيث k ثابت، v سرعة النقطة المادية حينئذ . أثبت أن أقصى ارتفاع تصل إليه النقطة المادية هو $(\frac{1}{k}\ln 2)$، وإذا بدأت النقطة المادية في الهبوط بعد ذلك فأثبت أنها تصل إلى نقطة القذف بسرعة تساوي نصف سرعتها الابتدائية.